الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي - تبسة

Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi– Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **Master Académique**

En : Génie Civil

Spécialité : Structures

Par : **DOUZDIA ISLEM**

Sujet :

Analyse du comportement statique et en vibrations libres des poutres épaisses à gradient de propriété (FGM)

Présenté et soutenu publiquement, le **08/06/2026**, devant le jury composé de :

Mr. Harkati Elhadi	**Professeur**	**Président**
Mr. Boutagouga Djamal	**Professeur**	**Rapporteur**
Mr. Abderrahmani Saif Eddine	**Docteur**	**Examinateur**

Promotion : 2025/2026


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciement

Je tiens à remercier le superviseur, Pr BOUTGOUGA Djamel, département de Génie Civil de l'Université Larbi Tébessi– Tébessa, pour ses conseils précieux, sa générosité, son suivi et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de cette période. Je le remercie encore une fois pour sa patience et sa présence, qui m'ont permis d'organiser cette mémoire de manière satisfaisante.

Je souhaite également exprimer ma gratitude aux membres de jury, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants du Département de Génie Civil de Université Larbi Tébessi – Tébessa – qui a contribué à ma formation.

Dédicace

À ceux qui ont cru en moi depuis le premier jour, à ceux qui ont été la source de ma force, de mon ambition et de mon courage.

À celle qui a veillé et s'est fatiguée pour que j'arrive jusqu'ici,

À la source de tendresse et la compagne de mes prières.

À mon père Rachid et ma mère Zina,

Merci pour votre amour, vos sacrifices et vos prières silencieuses qui m'ont portée jusqu'à ce moment.

À mes frères et ma sœur,

Vous êtes la racine de ma sagesse et la tendresse de mon cœur. Que Dieu vous protège et vous bénisse.

À celle dont le soutien m'a nourrie, dont les encouragements ont été ma lumière dans l'obscurité, et qui a été ma compagne fidèle dans ce parcours,

Ma chère femme, Meryem, ce succès est le fruit de ta patience et de ton amour. Merci du fond du cœur.

À ceux qui partagent avec moi le rire et les larmes,

À ceux qui sont et resteront une partie de mon âme,

Anaïs Ritel, Muslim Anas, les plus précieuses bénédictions que Dieu m'a offertes.

À la famille bienveillante de ma femme, merci pour votre accueil, votre amour et votre soutien constants.

À celles qui ont été la lumière sur mon chemin, le soutien dans mes journées, et le sourire inoubliable mes amis et mes collègues :

Nadir, Zaki, Mahdi, Hichem, Walid, Ammar, Karim, Abdou, Bahi, Rais.

Ce succès ne serait pas complet sans vous.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude du comportement statique et dynamique des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF). Les matériaux FGM se distinguent par une distribution continue de leurs propriétés mécaniques à travers l'épaisseur, permettant de combiner les avantages de plusieurs matériaux et d'améliorer les performances structurelles dans des environnements exigeants.

L'objectif principal de ce travail est de développer des modèles numériques adaptés à l'analyse des poutres FGM minces et épaisses. Pour ce faire, les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ont été utilisées afin de prendre en compte respectivement les effets de flexion pure et les effets du cisaillement transversal. Une attention particulière a été portée à l'influence de l'indice de puissance *n*, du rapport d'élancement *(L/h)* ainsi que des différentes conditions aux limites sur la réponse de la structure.

Par ailleurs, une analyse vibratoire a été menée afin d'évaluer les caractéristiques dynamiques des poutres FGM. Les matrices de rigidité et de masse ont été formulées dans le cadre de la méthode des éléments finis pour déterminer les fréquences propres de vibration et étudier l'effet des paramètres géométriques et matériels sur le comportement dynamique.

Les résultats numériques obtenus mettent en évidence l'importance de la théorie de Timoshenko pour les poutres épaisses *(L/h < 20)*, alors que la théorie d'Euler-Bernoulli fournit des résultats satisfaisants pour les poutres minces. L'étude montre également que l'augmentation de l'indice de puissance *n* modifie progressivement les propriétés effectives du matériau, conduisant à une diminution de la rigidité globale et à une augmentation des déplacements. Sur le plan dynamique, cette évolution se traduit par une réduction des fréquences propres de la structure. Les comparaisons effectuées avec les résultats de référence disponibles dans la littérature démontrent la précision et la fiabilité des modèles développés.

Ce travail constituent ainsi une contribution à l'analyse numérique des structures en matériaux à gradient fonctionnel et offrent un outil efficace pour leur conception et leur optimisation dans divers domaines d'ingénierie, notamment l'aéronautique, le génie civil et la construction mécanique.

Mots-clés : Matériaux à gradient fonctionnel (FGM), poutres FGM, méthode des éléments finis, théorie d'Euler-Bernoulli, théorie de Timoshenko, analyse statique, analyse vibratoire, fréquences propres, loi de puissance.

Abstract

This master's thesis is dedicated to the study of the static and dynamic behavior of Functionally Graded Material (FGM) beams using the Finite Element Method (FEM). FGM materials are characterized by a continuous distribution of their mechanical properties through the thickness, making it possible to combine the advantages of several materials and improve structural performance in demanding environments.

The main objective of this work is to develop numerical models suitable for the analysis of both thin and thick FGM beams. To achieve this, the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories were used to account for pure bending effects and transverse shear deformation effects, respectively. Particular attention was paid to the influence of the power-law index n, the aspect ratio (L/h), and various boundary conditions on the structural response.

Furthermore, a vibration analysis was conducted to evaluate the dynamic characteristics of the FGM beams. Stiffness and mass matrices were formulated within the framework of the finite element method to determine the natural frequencies of vibration and to study the effect of geometric and material parameters on the dynamic behavior.

The obtained numerical results highlight the importance of the Timoshenko theory for thick beams ($L/h < 20$), whereas the Euler-Bernoulli theory provides satisfactory results for thin beams. The study also shows that increasing the power-law index n progressively modifies the effective material properties, leading to a decrease in overall stiffness and an increase in displacements. Dynamically, this evolution results in a reduction of the structure's natural frequencies. Comparisons made with reference results available in the literature demonstrate the accuracy and reliability of the developed models.

Consequently, the work carried out constitutes a contribution to the numerical analysis of functionally graded material structures and provides an efficient tool for their design and optimization in various engineering fields, including aeronautics, civil engineering, and mechanical design.

Keywords : Functionally Graded Materials (FGM), FGM beams, Finite Element Method (FEM), Euler-Bernoulli theory, Timoshenko theory, static analysis, vibration analysis, natural frequencies, power law.

ملخص

تُعنى هذه المذكرة بدراسة السلوك الستاتيكي والديناميكي للعوارض المصنوعة من المواد ذات التدرج الوظيفي (FGM) باستخدام طريقة العناصر المحدودة (MEF). تتميز مواد الـ FGM بتوزيع مستمر لخصائصها الميكانيكية عبر السماكة، مما يسمح بالجمع بين مزايا مواد متعددة وتحسين الأداء الهيكلي في البيئات الصعبة.

يتمثل الهدف الرئيسي لهذا العمل في تطوير نماذج عددية ملائمة لتحليل العوارض المصنوعة من الـ FGMبنوعيها؛ النحيفة والسميكة. ولتحقيق ذلك، تم الاعتماد على نظريتي "أويلر-برنولي" و"تيموشينكو" لأخذ تأثيرات الانحناء النقي وتأثيرات قوى القص المستعرض في الاعتبار على التوالي. كما أُولي اهتمام خاص لدراسة تأثير مؤشر القوة n، ونسبة النحافة أو (L/h)، بالإضافة إلى الشروط الحدية المختلفة على استجابة العارضة.

علاوة على ذلك، أُجري تحليل اهتزازي لتقييم الخصائص الديناميكية لعوارض الـ FGM حيث صُيغت مصفوفات الصلابة والكتلة في إطار طريقة العناصر المحدودة لتحديد الترددات الطبيعية للاهتزاز، ودراسة أثر المعاملات الهندسية والمادية على السلوك الديناميكي.

تُظهر النتائج العددية المحصل عليها أهمية نظرية "تيموشينكو" بالنسبة للعوارض السميكة($L/h < 20$) ، في حين تقدم نظرية "أويلر-برنولي" نتائج مرضية بالنسبة للعوارض الرقيقة. كما تبين الدراسة أن زيادة مؤشر القوة(n) تُغير تدريجياً الخصائص الفعالة للمادة، مما يؤدي إلى انخفاض في الصلابة الإجمالية وزيادة في الازاحات .أما على الصعيد الديناميكي، فينعكس هذا التطور في شكل انخفاض في الترددات الطبيعية للهيكل. وتؤكد المقارنات التي أُجريت مع النتائج المرجعية المتاحة في الأدبيات العلمية مدى دقة وموثوقية النماذج المطورة.

وفي الختام، يشكل العمل مساهمة في التحليل العددي للهياكل المصنوعة من المواد ذات التدرج الوظيفي، وتوفر أداة فعالة لتصميمها وتحسينها في مجالات هندسية متعددة، لا سيما الطيران، الهندسة المدنية، وبناء الآلات والميكانيك.

الكلمات المفتاحية: المواد ذات التدرج الوظيفي(FGM) ، عوارضFGM ، طريقة العناصر المحدودة، نظرية أويلر-برنولي، نظرية تيموشينكو، التحليل الاستاتيكي، التحليل الاهتزازي، الترددات الطبيعية، قانون القوة.

Table des matières

Résumé……...…I
Abstract ……...II
ملخص……III
Introduction Générale ……1
Chapitre I: Les matériaux fonctionnellement gradués ……....4
I.1 Introduction……5
I.2 Définition des matériaux FGM……...……....5
I.3 Historique et concept des FGM.....6
I.4 Processus et technique de fabrication des FGM 8
I.5 Types de FGM 8
I.6 Comparaison des materiaux types FGM et les composites traditionnels 9
I.7 Domaines d'applicationns des matériaux fonctionnellement gradués 11
I.8 Pour des utilisations structurelles (integration du caractere refractaire).....13
I.9 Les avantages et les inconvénients des FGM 14
I.9.1 Les avantages 14
I.9.2 Les inconvénients 14
I.10 Propriétés des FGM.....15
I. 10.1 Propriétés physiques et mécaniques des FGM.....15
I. 11. Propriétés matériels des poutre FGM 15
I. 11.1 Fonction de puissance (P-FGM).....18
I. 11.2 Fonction sigumoïde (S-FGM).....19
I. 11.2 Fonction exponentielle (E-FGM).....20
I.12 Conclusion 21
Chapitre II: Théorie de poutre.....22
II.1 Introduction 23
II.2 Historique des théories des poutres…….....23
II.3 Comportement des poutres composites.....23
II.4 Conditions aux limites d'une poutre 23
II.5 Les différentes théories des poutres 24
II.5.1 Modéle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory - CBT) 25
II.5.2 Modéle de Timoshenko (FSDBT) 26
II.5.3 Théorie d'Ordre Elevé(HSDT).....27
II.6 Conclusion.....31
ChapitreIII: Formulation des éléments poutres par la méthode des éléments finis…….32
III.1 Introduction……33
III.2 Méthode des éléments finis 33
III.3 Pourquoi avoir choisi MEF ?.....33
III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis 34
III.5 Domaines d'application du MEF :.....34
III.6 Avantages et inconvénients de la MEF :.....34
III.7 Application de la méthode des éléments finis.....35

III.8 Formes classiques d'éléments.....36
III.9 Formulation de l'ÉLEMENT fini POUTRE de Bernoulli (poutre mince) : 38
III.9.1 Approximation du champ de déplacement 39
III.9.2 Définir les relations déformation-déplacement et déformation-contrainte.....40
III.9.3 Expression de la déformation.....41
III.9.4 L'énergie de déformation de l'élément poutre…… 41
III.10 Formulation de la Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Timoshenko (y compris la déformation transversale du cisaillement) 43
III.11 Formulation de la Matrice de masse des poutres 46
III.11.1. Poutre d'Euler-Bernoulli (CBT) ……46
III.11.2. Poutre de Timoshenko (FSDT) ……47
III.12 Conclusion.....48
Chapitre IV: Formulation des éléments poutres FGM Minces et Epaisses par la MEF..49
IV.1 Introduction…….50
IV.2 Description du problème…….50
IV.3 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces (poutre de Bernoulli)..50
IV.3.1 Champs de déplacement……..51
IV.3.2 Le champ de déformation……51
IV.3.3 Les contraintes…….51
IV.3.4 Application du principe de EPTM……...51
IV.3.5 Interpolation des déplacements……52
IV.3.6 Evaluation des matrices de rigidité……..54
IV.4 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces et épaisses (poutre de Timoshenko)…….56
IV.4.1 Champs de déplacement……56
IV.4.2 Le champ de déformation…… 56
IV.4.3 Matrice de rigidité de l'élément poutre FGM de Timoshenko……..57
IV.4.4 Matrice de masse cohérente pour un élément fini de poutre de Timoshenko en matériau FGM……...……...……59
IV.5 Conclusion……63
ChapitreV :Validation et Analyse du comportement statique des poutres FGM ...…....64
V.1 Introduction ……..……...……..65
V.2 Validation numérique…….65
V.3 Conclusion……..81
Conclusion générale ……81
References ……84

Liste des Figures

Figure (I.2) : Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus (Naebe et al 2016)
Figure (I.3.a) : Variation continue
Figure (I.3.b) : Variation discrète
Figure (I.4) : variation continue de la microstructure.
Figure (I.5) : Différentes types des matériaux
Figure (I.6) : Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites.
Figure (I.7) : Utilisation des FGM dans les implants dentaires [8]
Figure (I.8) : représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures ; (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM.
Figure (I.9) : la Géométrie d'une poutre FGM
Figure (I.10) : Variation du module de Young d'un matériau P-FGM
Figure (I.11) : Variation du module de Young d'un matériau S-FGM
Figure (I.12) : Variation du module de Young d'un matériau E-FGM
Figure II. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.
Figure II. 2. Cinématique de Timoshenko (Dufort 2001)
Figure II. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.
Figure II-4: Répartition à travers l'épaisseur de la fonction de contrainte de cisaillement transverse.
Figure III.1 : Formes classiques d'éléments.
Figure III.2 : Elément de poutre mince.
Figure III.3 : Elément poutre avec des déplacements, des rotations, des forces, et des moments nodaux positifs.
Figure III. 4 : Conventions de signe pour les forces de cisaillement et les moments de flexion.
Figure III.5 : segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation ; (C) Angle de rotation de la section transversale ABCD.
Figure IV. 1:une poutre en FGM.
Figure IV. 2: un élément de poutre.
Figure V. 1: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [31].
Figure V. 2: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S).
Figure V. 3: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)
Figure V. 4 : Poutre FGM du avec différentes conditions aux limites [34].
Figure V. 5: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S).
Figure V. 6: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)
Figure V. 7: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F).
Figure V.8 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)
FigureV.9: Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)
FigureV.10 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)
FigureV.11 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [31] .
FigureV.12 : Déplacement transversal le long de la poutre (S-S).
FigureV.13 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)
FigureV.14 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [34].

Figure V.15. Effet de l'indice de la loi de puissance (n) et du rapport d'élancement L/h sur la fréquence propre $\bar{\omega}$ d'une poutre en FGM
Figure V.16. Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la poutre FGM en fonction de l'indice de loi de puissance (n) et du rapport d'élancement L/h.
Figure V.17 La variation de la fréquence non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport d'élancement (L/h) et pour différentes valeurs de l'indice de puissance.
Figure V.18. Effet de L/h sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle (S-S).
Figure V.19. Effet de L/h sur la fréquence Fondamentale non-dimensionnelle (C-C).
Figure V.20. Effet de l'exposant de fraction volumique sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (S-S).
Figure V.21.Premier mode normalisé pour le faisceau S-S FGM (n = 1,0)
Figure V.22. Premier mode normalisé pour une poutre C-C FGM (n = 1, L/h = 5).
Figure V.23. Deuxième mode normalisé pour poutre C-C FGM (n =1, L/h = 5).
FigureV.24. Variation des fréquences Non-dimensionnelles pour différentes théories.

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (I.1) : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [12] ……17

Tableau II-1 : Principales conditions aux limites pour les poutres……24

Tableau V.1 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli……66

Tableau V.2: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko……..……66

Tableau V.3: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli. ……..……..…….69

Tableau V.4 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko……..……69

Tableau V.5 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko…….…….73

Tableau V.6: Comparaison des premières fréquences fondamentales sans dimension des faisceaux FGM par rapport à diverses valeurs d'exposant de loi de puissance……75

Tableau V.7**.** Étude de convergence en fonction du nombre d'éléments (NE) Conditions : S-S, n = 0, L/h = 50, Théorie de Timoshenko……..78

Tableau V.8. Comparaison des fréquences adimensionnelles obtenues par la formulation Timoshenko et REF [35] (n = 0)……..…….78

Tableau V.9. Effet des paramètres géométriques et de la distribution de matériau sur $\bar{\omega}$ au Condition S-S (Simplement Appuyé aux deux extrémités)…….79

Tableau V.10. Effet des paramètres géométriques et de la distribution de matériau sur $\bar{\omega}$ au Condition C-C (Encastré aux deux extrémités)…….79

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM – Functionally Graded Materials) représentent une avancée importante dans le domaine des sciences et de l'ingénierie des matériaux. Ils sont conçus à partir de deux ou plusieurs constituants, généralement une céramique et un métal, dont les propriétés varient progressivement selon une direction donnée. Cette variation continue permet de combiner les avantages des différents matériaux tout en réduisant les problèmes rencontrés dans les matériaux composites stratifiés traditionnels, notamment les concentrations de contraintes, les phénomènes de délaminage et les incompatibilités thermomécaniques entre les couches.

Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermiques graduellement variables, les structures en matériaux à gradient fonctionnel trouvent aujourd'hui de nombreuses applications dans les domaines de l'aérospatial, de l'aéronautique, du génie civil, de l'industrie nucléaire, de l'automobile et des systèmes mécaniques avancés. Parmi ces structures, les poutres FGM constituent des éléments fondamentaux largement utilisés dans les composants structurels soumis à différents types de chargements. L'étude de leur comportement est devenue un sujet de recherche important en raison de leur capacité à offrir de meilleures performances mécaniques et une plus grande durabilité que les structures homogènes conventionnelles.

L'analyse du comportement des poutres FGM comprend principalement l'étude de leur réponse statique sous l'action des charges appliquées ainsi que l'étude de leur comportement vibratoire. L'analyse statique permet de déterminer les déplacements, les contraintes et les déformations induits par les sollicitations mécaniques, tandis que l'analyse vibratoire vise à évaluer les fréquences propres et les modes de vibration de la structure. Ces analyses sont essentielles pour garantir la sécurité, la stabilité et les performances des structures dans leurs conditions réelles d'utilisation.

La méthode des éléments finis (MEF) s'impose comme l'un des outils numériques les plus puissants pour l'analyse de ces structures. Elle permet de modéliser avec précision l'hétérogénéité des matériaux FGM ainsi que les effets liés à la variation continue des propriétés mécaniques. Cependant, les modèles classiques de poutres, notamment ceux d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, présentent certaines limites lorsqu'ils sont appliqués aux poutres FGM. La théorie d'Euler-Bernoulli est adaptée aux poutres minces pour lesquelles les effets de cisaillement transversal sont négligeables, tandis que la théorie de Timoshenko permet de prendre en compte les effets du cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle, particulièrement importants dans les poutres épaisses.

Dans ce contexte, ce mémoire est consacré à l'analyse du comportement statique et vibratoire des poutres à gradient fonctionnel en utilisant la méthode des éléments finis. L'objectif principal est de développer et d'implémenter des modèles numériques capables de représenter efficacement l'influence de la variation des propriétés matérielles sur la réponse mécanique et dynamique des poutres FGM.

Les objectifs spécifiques de cette étude sont les suivants :

a- Adapter les formulations classiques des poutres aux matériaux à gradient fonctionnel en intégrant différentes lois de variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur, notamment les lois de puissance, exponentielle et sigmoïde.

b- Développer les matrices de rigidité et de masse nécessaires à l'analyse statique et vibratoire des poutres FGM selon les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

c- Implémenter les modèles développés sous l'environnement MATLAB afin de simuler différents cas de chargement et d'étudier les caractéristiques vibratoires des poutres FGM.

d- Valider les résultats numériques obtenus par comparaison avec des solutions analytiques et des

travaux de référence disponibles dans la littérature scientifique.
Le mémoire est organisé comme suit :
Le Chapitre 1 présente une revue bibliographique consacrée aux matériaux à gradient fonctionnel. Il aborde l'historique des FGM, leurs méthodes de fabrication, leurs propriétés, leurs domaines d'application ainsi qu'un état de l'art des travaux de recherche portant sur les poutres FGM.
Le Chapitre 2 est consacré aux formulations théoriques des poutres FGM. Les différentes lois de distribution des propriétés matérielles sont présentées ainsi que les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko utilisées dans cette étude.
Le Chapitre 3 traite de la méthodologie des éléments finis appliquée aux poutres FGM. Les fonctions de forme, les matrices élémentaires de rigidité et de masse ainsi que la procédure d'assemblage sont développées.
Le Chapitre 4 est consacré à la formulation des éléments finis de poutres FGM minces et épaisses. Les développements mathématiques nécessaires à l'établissement des éléments de poutres basés sur les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko y sont présentés. Les fonctions de forme, les matrices de rigidité et de masse ainsi que la prise en compte de la variation des propriétés matérielles des FGM sont détaillées.
Le Chapitre 5 présente les résultats numériques obtenus ainsi que leur analyse et leur interprétation. Une étude paramétrique est réalisée afin d'évaluer l'influence de l'indice de gradient, des conditions aux limites et des caractéristiques géométriques sur le comportement statique et vibratoire des poutres FGM. Les résultats sont ensuite comparés aux données disponibles dans la littérature pour valider les modèles développés.
Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus et présente les perspectives de recherche futures dans le domaine de la modélisation et de l'analyse des structures à gradient fonctionnel.

Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM.

I.1 Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations des contraintes.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradués, microscopique ment non-homogènes.

Ainsi, les propriétés mécaniques varient graduellement et continuellement d'une surface à l'autre à travers toute l'épaisseur. Le FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

I.2 Définition des matériaux FGM

Les matériaux FGM sont construits à partir d'un mélange de céramique et de métal ou une combinaison de différents matériaux. La céramique dans une FGM offre une barrière des effets thermiques et protège le métal contre la corrosion et l'oxydation, et le FGM est dure et renforcé par la composition métallique. Actuellement les FGM sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes.

Généralement le FGM permet de combiner plusieurs caractéristiques tell que la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique une maintenance réduite, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort.

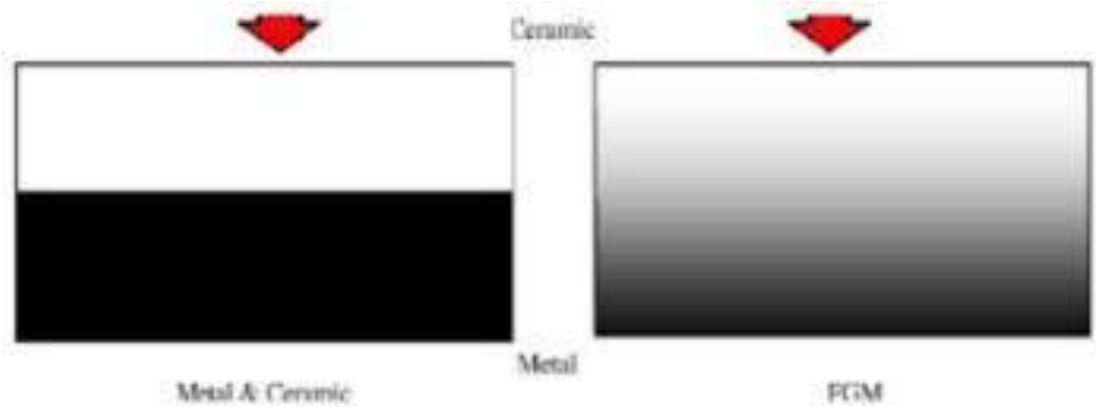


Figure (I.1) : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

I.3 Historique et concept des FGM

La création des FGM est apparue au Japon au début des années 1980, lorsque les chercheurs ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée dans un projet aérospatial [1]. Ils ont d'abord été conçus d'abord comme matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion [2]. Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites, fabriqués d'une manière spéciale, qui garantissait un changement gradué, varier d'un matériau à l'autres soit en continue ou discontinue par étape des constituants à l'intérieur, souvent de la céramique aux métaux dans un seul corps (matériaux macroscopiquement inhomogènes) des FGM les plus connu, à travers la direction de l'épaisseur selon des fonctions mathématiques. Et par conséquent, une modification correspondante des propriétés mécaniques effectives et des caractéristiques du matériau apparaît, en font une solution non seulement au problème thermique (supporter des niveaux de température élevés) bien connus en premier lieu dans les industries aérospatiales, mais aussi à certains problèmes des matériaux composites classiques, tels que la discontinuité des matériaux qui génèrent des niveaux de concentration de contraintes élevés, et donc des problèmes d'interface (la rupture de délaminage) ainsi que des déformations. De plus, les FGM supportent également les charges mécaniques appliquées et offrent de bonnes performances dans des conditions d'utilisation dure et exigeante. En conséquence, les FGM ont attirés plusieurs industries à utiliser leurs composants structurels, et donc beaucoup de domaine de l'ingénierie les étudient de manière approfondie afin de prédire leurs comportements et leurs réponses.

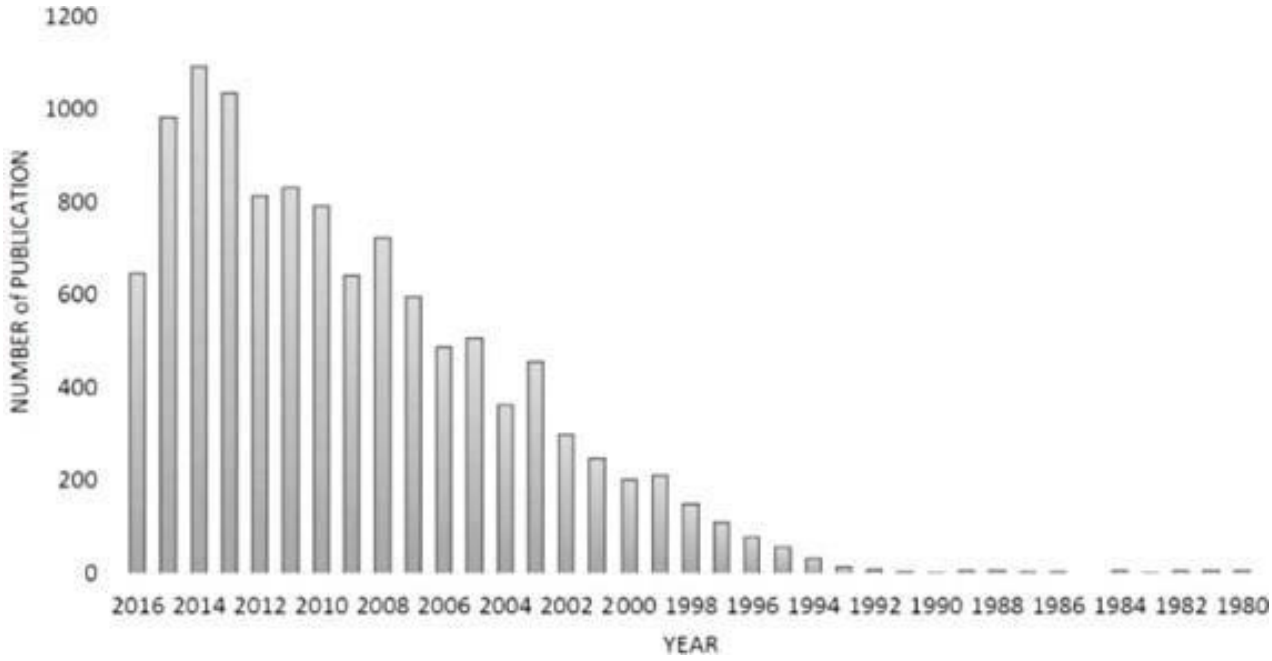


Figure (I.2) : Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus (Naebe et al 2016)

Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue figure (I.3.a) ou discrète figure (I.3.b) à Travers l'épaisseur.

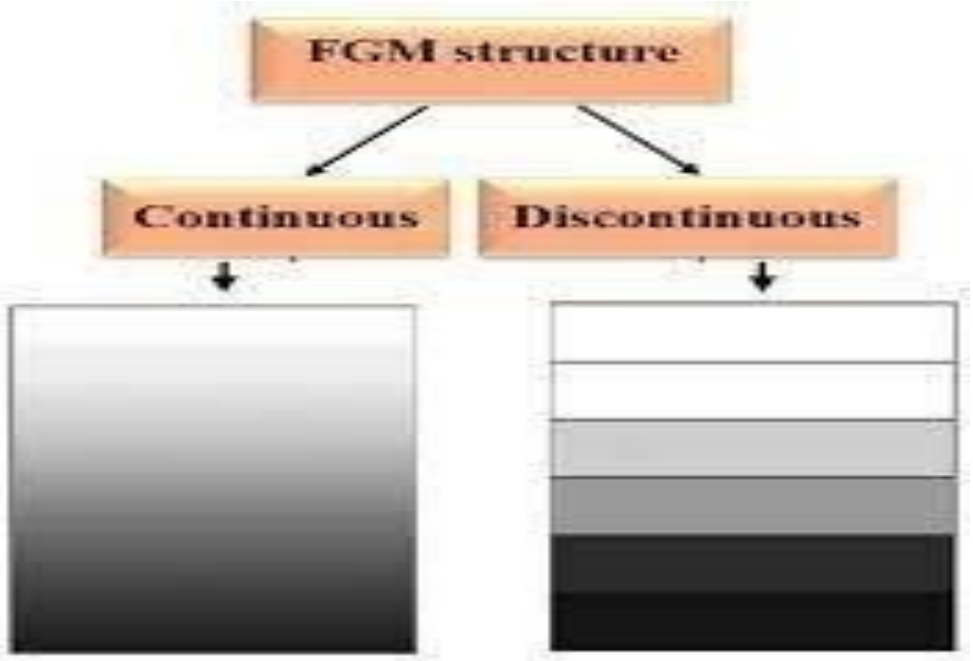


Figure (I.3.a) : Variation continue **Figure (I.3.b) :** Variation discrète

I.4 Processus et technique de fabrication des FGM

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créé, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établis, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : [3].

- Le système par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapord eposition C.V.D)
- Le système par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système par synthèse par auto-propagation à haute température
- Le système par projection plasma à double

I.5 Types de FGM

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés, le concept Consistait à supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. A cet effet deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux fonctionnels à gradient de propriétés. L'un est basé sur la structure du matériau et l'autre sur la taille des matériaux à gradient de propriétés de manière fonctionnelle. Les FGM peuvent être divisés en deux groupes principaux basés sur la structure des matériaux : FGM structurée en continue et structurée de manière discontinue. Dans les FGM continues, il existe un gradient continu d'un matériau à l'autre. Cependant, en cas de FGM discontinue, le gradient de matière est fourni en couches, La variation continue des propriétés figures (I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

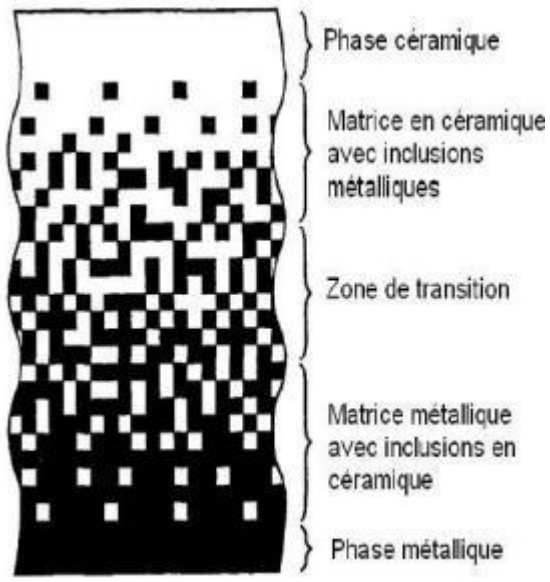


Figure (I.4) : variation continue de la microstructure.

Il existe deux types de structures graduées qui peuvent être préparées dans le cas des FGM, à savoir la structure continue représentée sur la (figure I.3 a) et la structure par étapes (Couches) représentée sur la (figure I.3 b) [4]

Dans le cas d'une structure à gradation continue. Le changement de composition et de Microstructure se produit continuellement avec la position. En revanche, dans le cas de Structure à gradation pas à pas, la caractéristique de la microstructure évolue progressivement donnant naissance à une structure multicouche avec une interface existant entre des couches discrètes.

L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM, le type d'application envisagée détermine généralement le type de FGM à utiliser.

Les matériaux ayant une composition, une microstructure ou une porosité changeante à Travers le volume du matériau sont appelés matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle (FGM) [5]

Les différents types de FGM comprennent les FGM à structure de gradient de porosité et de Taille des pores, les FGM à structure à gradient chimique (composition) et les FGM à Structure à gradient microstructural.

I.6 Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants. Les FGM sont des

matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non-homogènes figure (I.5).

[6],

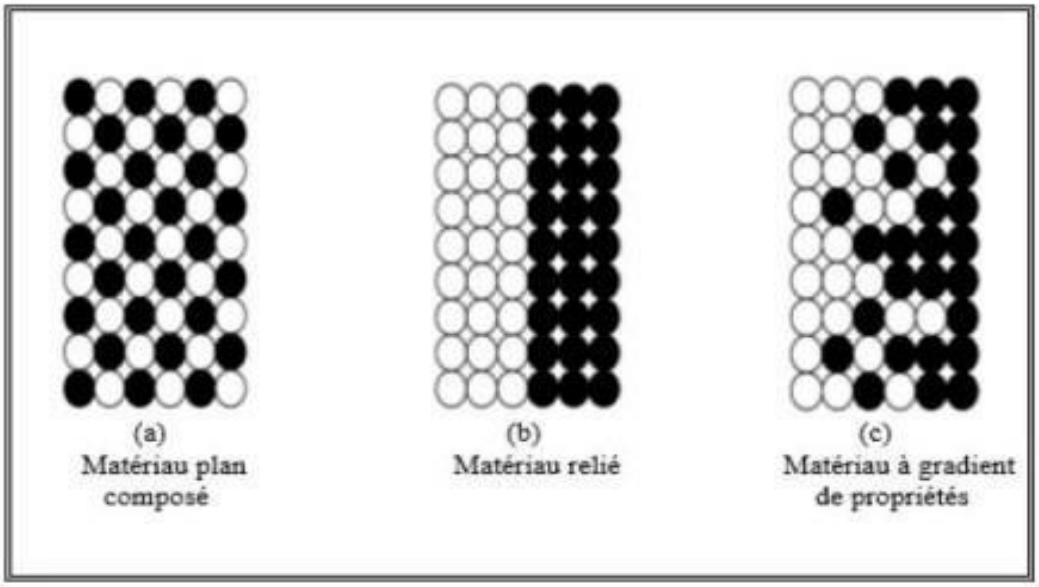


Figure (I.5) : Différentes types des matériaux

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente établi un modèle simple illustrant différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composées et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composante du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique. [7].

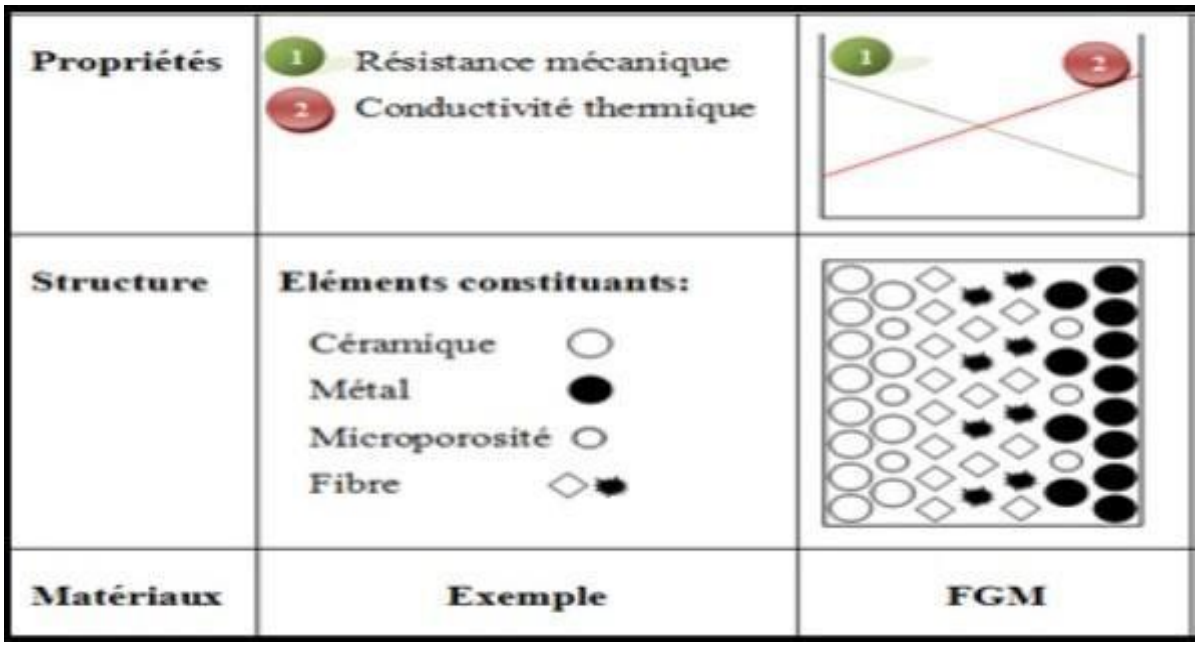


Figure (I.6) : Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites.

I.7 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que [5] :

- **Industrie médecine**

Ces derniers sont les parties du corps humain les plus remplacées suite à l'endommagement de ces parties ou bien à cause du processus de vieillissement naturel. C'est pourquoi la majorité de matériaux FG utilisés dans l'industrie biomédicale sont des implants, tels que : Dans les implants pour remplacement squelettique permanent, la porosité graduée aide à minimiser la protection de stress. Les implants dentaires de titane poreux graduellement aident à améliorer les propriétés d'osseo-intégration de l'implant (Figure 1.5). Hydroxyapatite poreux gradué (HA) imite la structure bimodale de l'os humain, ce qui aide à promouvoir la nouvelle croissance tissulaire et leurs propriétés mécaniques.

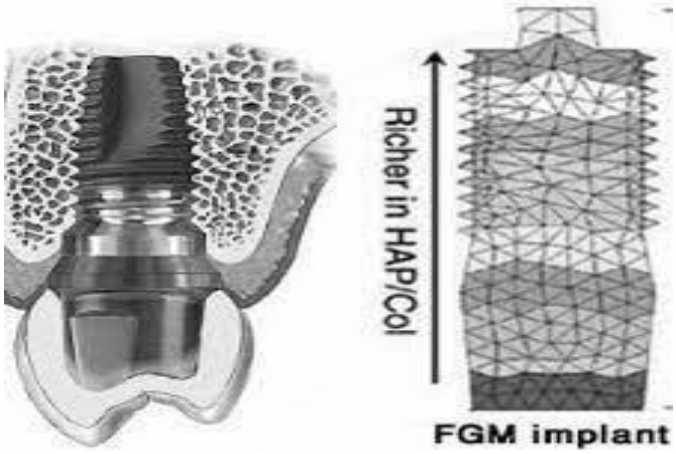


Figure (I.7) : Utilisation des FGM dans les implants dentaires [8]

- **Défense :**

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

- **Aérospatial**

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales. Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

- **Industrie marine**

Les matériaux FG ont aussi des applications dans l'industrie marine notamment : Dans le puits de propulseur, les cylindres plongeants, les dômes de sonar, le système de tuyauterie de composé et dans la coque de pression cylindrique.

- **Industrie d'énergie**

Les industries d'énergie ont constamment besoin de différents types de FGM, afin d'améliorer l'efficacité de leurs équipements. Certaines applications des matériaux FG dans l'industrie d'énergie incluent le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les équipements sous pression, les électrodes graduées pour la production de carburant solide d'oxyde, le piézoélectrique FGM pour le capteur ultrasonique, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements des lames de turbine ainsi que les revêtements des barrières thermiques.

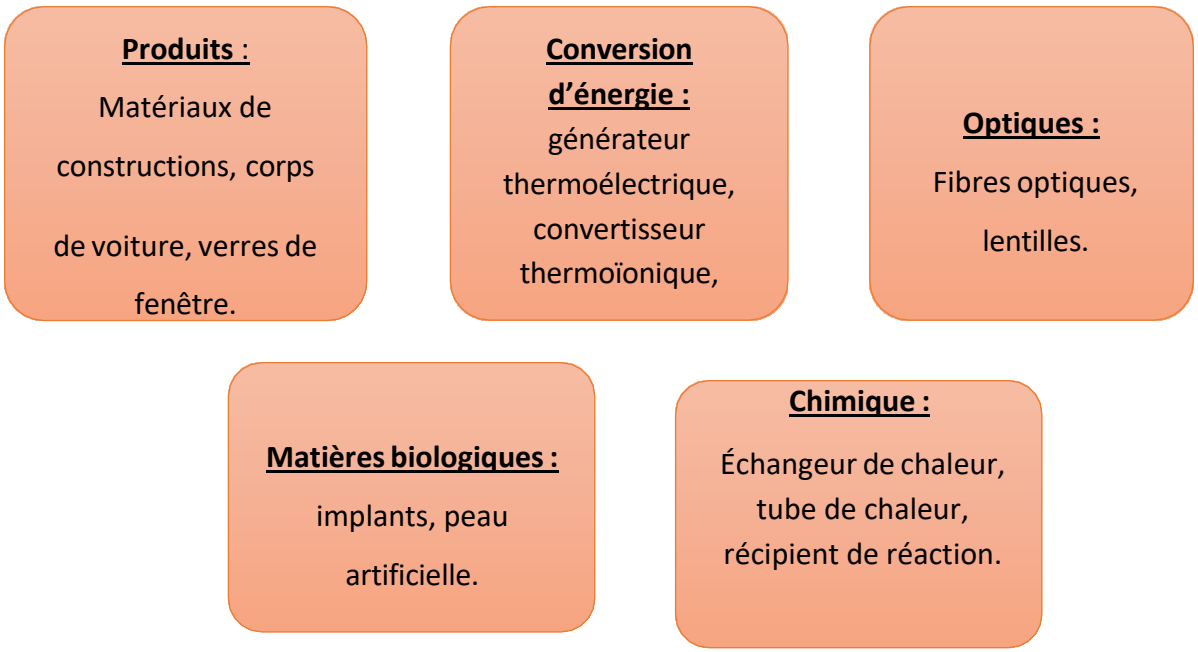
- **Énergie nucléaire**

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

- **Industrie du sport**

Les matériaux FGM sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

- **Autres industries**



I.8 Pour des utilisations structurelles (intégration du caractère réfractaire)

Il existe deux causes principales derrière les défaillances dans les structures, il s'agit d'un changement de fonctionnalité (La sur-augmentation des charges d'exploitation) ou bien la détérioration des matériaux utilisés. Le vieillissement de ces matériaux (Acier, alliages ou autres matériaux traditionnels), est un souci inquiétant pour les ingénieurs, ce qui confirme le besoin d'une avancée technologique dans le domaine du renforcement. Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été utilisées durant les années 1960, parmi lesquelles, la méthode de soudure des plaques d'acier à la structure a été largement utilisée pour le renforcement des structures endommagées, étant donné que cette méthode améliorait la rigidité, la résistance et réduit les fissures ainsi que leurs propagations (Vilnay, 1988 ; Roberts et al 1989 ; Robert, 1989 ; Liu & Zhu, 1994 ; Taljsten, 1997). Cette méthode avait des inconvénients, en effet, la tôle d'acier subissait la corrosion qui dégrade et fragilise la structure, c'est un grand problème susceptible d'annuler toute l'opération de renforcement.
Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la Couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [9]
- Aussi, la mise en œuvre de cette technique s'est avérée difficile en raison du poids et de la taille des tôles d'acier. La technique du renforcement par composite en fibre durant les dernières décennies apparait comme une solution de renforcement des méthodes traditionnelles. Elle consiste à coller des plaques en composite FRP (Les composites en fibres de carbone, ….etc.) en utilisant les nouvelles colles époxy. Cette technique de renforcement, est une excellente alternative par rapport à l'ancienne méthode utilisant les plaques d'acier et ce, en raison de ses avantages dans le domaine du génie civil, dans le domaine aéronautique et dans l'aérospatial. (Baker, 1984) Cette technique a été commercialisée durant les années 1980 aux Etats-Unis, en Europe et au Japon. Des applications ayant pour but la prévention de la détérioration des structures lors des séismes et des catastrophes naturelles. Le séisme Hyogoken-Nanbu, qui a dévasté la ville de Kobe au Japon en 1995, a été un élément accélérateur de la recherche dans le domaine du renforcement des constructions par la nouvelle technique des composites FRP.

I.9 Les avantages et les inconvénients des FGM

I.9.1 Les avantage

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles s peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM [10]

La réduction des contraintes thermiques :

- ✓ Réduction des contraintes thermiques aux endroits critiques ;
- ✓ Diminution des transitions de contrainte brusques à l'interface ;
- ✓ Réduction du facteur d'intensité de contrainte (force motrice pour la propagation de fissure)
- ✓ Augmentation de la force de liaison interraciale.

1.9.2-Les inconvénients

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type m2est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T1) et une céramique avec une température de fusion (T2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement (T1 << T2). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), la céramique est encore non fondue et la

structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour de (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses. [11]

I.10 Propriétés des FGM

Les FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère, souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal [1]

I.10.1 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.10.1.1 Propriétés d'Aluminium (Métal)

Définition

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

- Propriétés physiques :

L'Aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ

660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m3. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

- Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :
Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium à pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.

- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.10.1.2 Propriétés physiques et mécaniques de la céramique

Définition

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

- Propriétés physiques

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m3. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

- Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Tableau (I.1) : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [12]

Couches	**Matériaux**	**Les propriétés Mécaniques**
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
« Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

Les propriétés de tels matériaux peuvent être décrites par la fonction f (x). Dans les matériaux homogènes, cette fonction est constante comme dans Figure (I.8 a).

Dans le cas d'une jonction de deux fonctions matérielles différentes, f (x) a une forme de déformation Figure (I.8 b) dans les FGM, cette fonction matérielle doit être continue ou quasi continue.

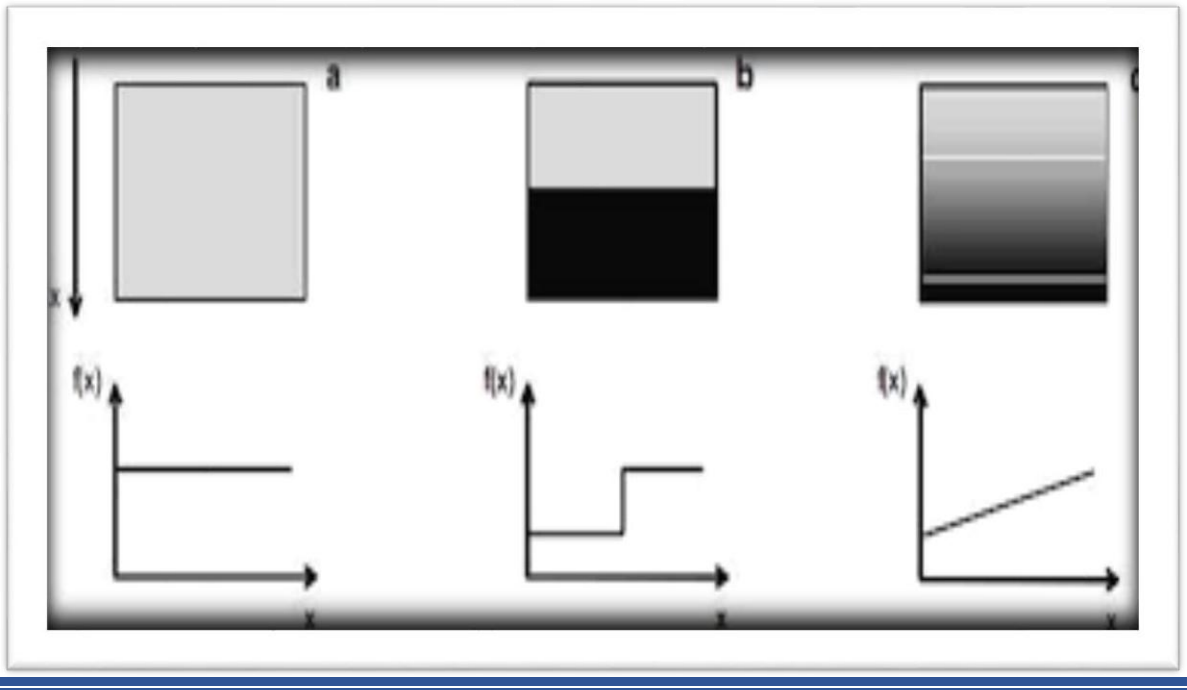


Figure (I.8) : représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures ; (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM.

I.11 Propriétés matérielles des poutres FGM

Les matériaux FGM sont une combinaison de deux ou plusieurs matériaux dont les caractéristiques et les propriétés diffèrent, où la transition entre les deux matériaux est idéalement continue et graduelle. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La majorité des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Selon l'étude de [13]. Le coefficient de Poisson peut être supposé constant étant donné que son effet sur la déformation est négligeable par rapport à celui du module de Young.

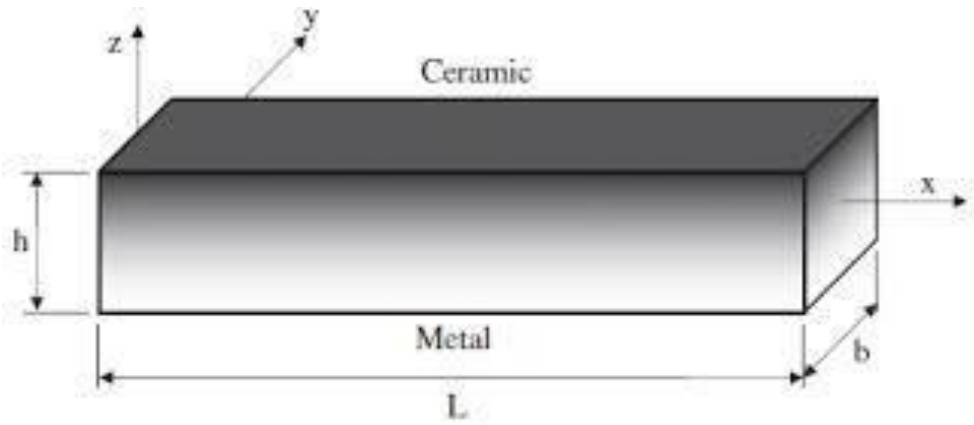


Figure (I.9) : la Géométrie d'une poutre FGM

I.11.1 Fonction de puissance (P-FGM)

La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit [14]:

.

$$g(z)=\left(\frac{z+\frac{h}{2}}{h}\right)^{p} \tag{1.1}$$

p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local g(z) est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z)=E_m+(E_c-E_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{n} \tag{1.2}$$

Où E1 et E2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure (z = -h/2) et de la surface supérieure (z= h/2) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure 1.11, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour p > 1, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour p < 1. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E, et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{i=1} E_j g_j \tag{1.3}$$

Là où l'Ej et le gj sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure. 1.9), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

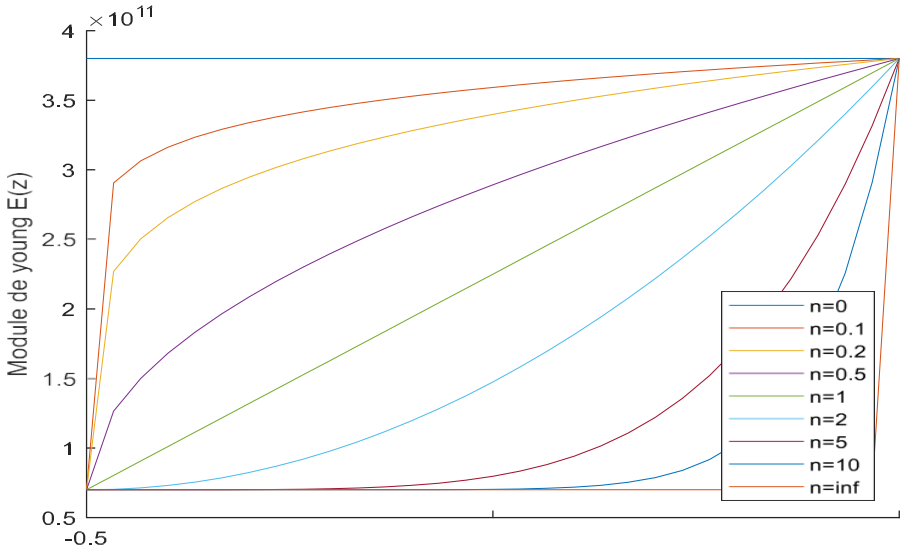


Figure (I.10) : Variation du module de Young d'un matériau P-FGM

I.11.2 Fonction sigmoïde(S-FGM)

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 - z}{h/2}\right)^p \quad \text{pour: } 0 \le z \le h/2 \tag{1.4}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 + z}{h/2}\right)^p \quad \text{pour : } -h/2 \le z \le 0 \tag{1.5}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z)S_1 + [1 - g_1(z)]S_2 \text{ pour: } 0 \le z \le h/2 \tag{1.6}$$

$$S(z) = g_2(z)S_1 + [1 - g_2(z)]S_2 \text{ pour: } -h/2 \le z \le 0 \tag{1.7}$$

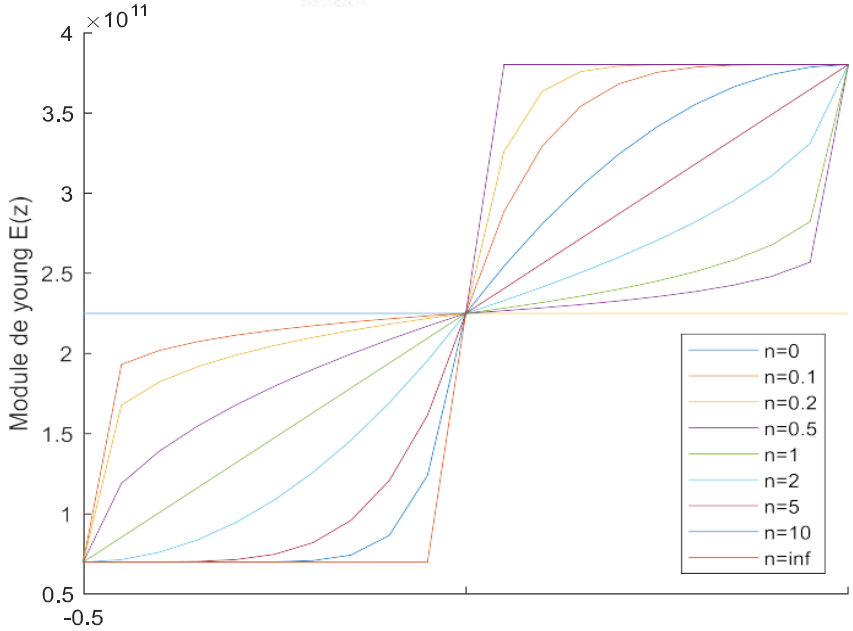


Figure (I.11) : Variation du module de Young d'un matériau S-FGM

I.11.3 Fonction exponentielle E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [15]

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \tag{1.8}$$

Avec ;

$$A = E_2 \text{ et: } \beta = \frac{1}{h}\ln\frac{E_1}{E_2}$$

La variation du moule de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (1.12).

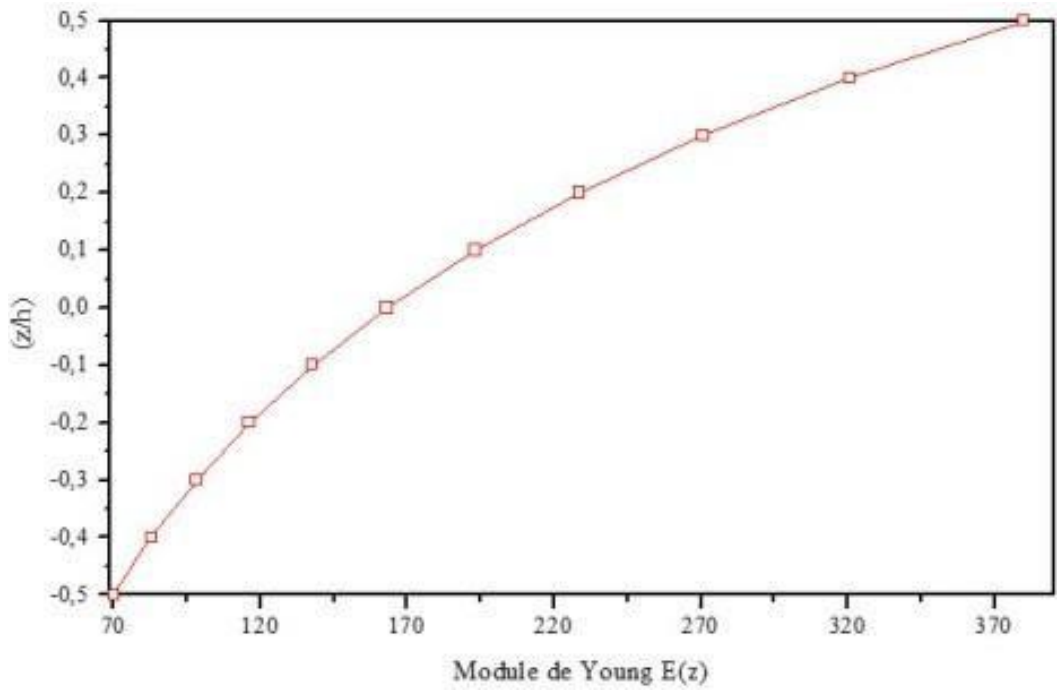


Figure (I.12) : Variation du module de Young d'un matériau E-FGM

I.12 Conclusion :

Ce chapitre nous a permis d'introduire les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en mettant en lumière leurs caractéristiques fondamentales, leurs domaines d'utilisation, et leur histoire et leur développement. Contrairement aux matériaux composites traditionnels, les FGM offrent une transition progressive de leurs propriétés, éliminant les discontinuités responsables de concentrations de contraintes et améliorant ainsi la durabilité des structures sous sollicitations thermomécaniques sévères.

Les différentes lois de mélange et approches micromécaniques discutées fournissent un cadre théorique essentiel pour la modélisation des propriétés effectives de ces matériaux.

Les applications des FGM dans des secteurs critiques comme l'aérospatial, le génie nucléaire et le biomédical soulignent leur importance technologique. Toutefois, leur modélisation efficace nécessite une prise en compte rigoureuse de l'hétérogénéité graduelle, ce qui influencera directement les développements présentés dans les chapitres suivants.

Dans cette optique, le prochain chapitre s'attachera à établir les modèles théoriques des poutres FGM (minces et épaisses), en intégrant les effets du gradient fonctionnel dans les équations gouvernantes.

CHAPITRE 2 Théorie des poutres

II.1 Introduction :

Le terme « Poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication des machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. [16]

II.2 Historique des théories des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3 Comportement des poutres composites :

L’analyse d’une structure composite est plus complexe que celle d’une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple [17] Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L’importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d’une part à l’utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d’autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

II.4. Conditions aux limites d’une poutre :

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous :

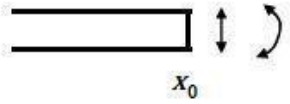
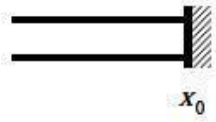
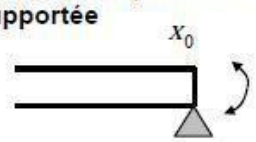
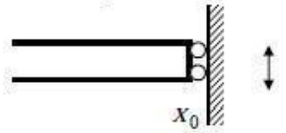
extrémité **libre** 	pas de contraintes sur le déplacement et la rotation $\Rightarrow$ le **moment de flexion** et la **force de cisaillement** s'annulent en x_0	$M(x_0 t) = EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{x=x_0} = 0$ $Q(x_0 t) = -EI \left.\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right\|_{x=x_0} = 0$
extrémité **encastrée** 	les **déplacements** transversal et angulaires sont **nuls** en x_0	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right\|_{x=x_0} = 0$
extrémité **simplement supportée** 	le **déplacement transversal** est bloqué mais la rotation est libre $\Rightarrow$ le **moment de flexion** est donc nul en x_0	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0 t) = EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{x=x_0} = 0$
extrémité **guidée** 	le déplacement transversal est libre et la **rotation** est bloquée $\Rightarrow$ la **force de cisaillement** est donc nulle en x_0	$\theta(x_0 t) = \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right\|_{x=x_0} = 0$ $Q(x_0 t) = -EI \left.\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right\|_{x=x_0} = 0$

Tableau II-1 : Principales conditions aux limites pour les poutres.

II-5. Les différentes théories des poutres [16] :

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

- ✓ L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [18] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- ✓ L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

- ✓ L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- ✓ L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

II-5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

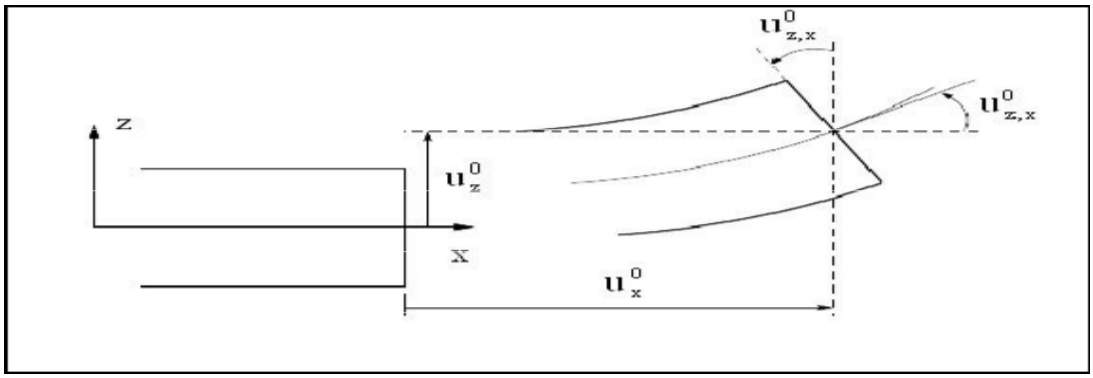


Figure II. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

f(z)=0 *(II.1)*

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z\, w_x^0(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \qquad (II.2)$$

$u\,(x,z)$: C'est le déplacement suivant X et $w\,(x,z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

$$w_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (II.3)$$

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

u^0(x) *et* w^0 (x) *sont* les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.5.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [19]

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction (f) est égale à *Z.* Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

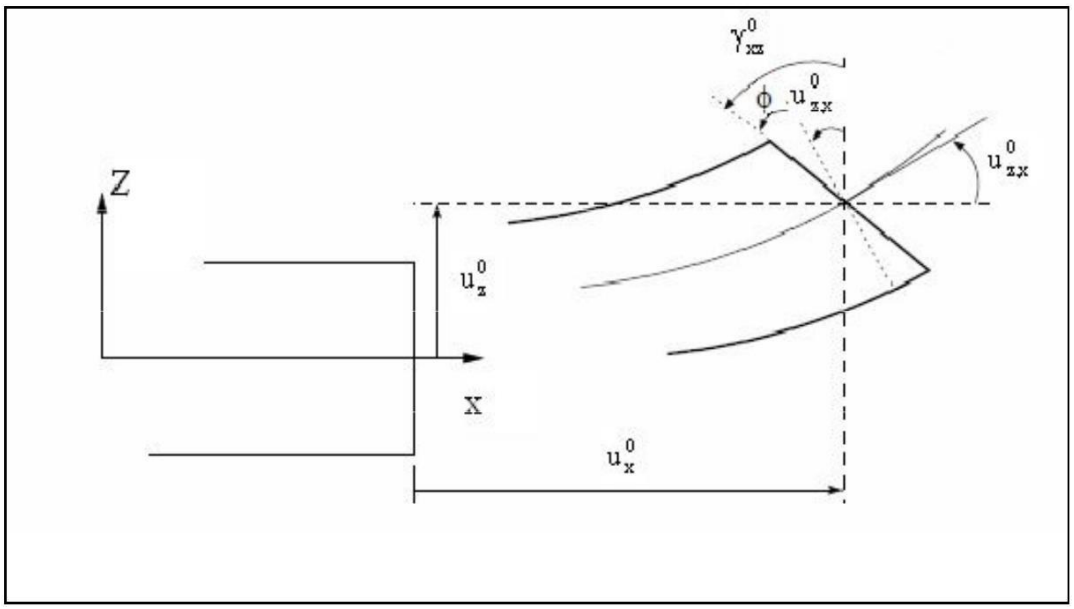


Figure II. 2. Cinématique de Timoshenko (Dufort 2001)

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit :

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z\, w_x^0(x) + z\varphi^0(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) + z\, \gamma_{xz}{}^0(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.5)$$

$\gamma_{xz}{}^0(x)$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que : $\gamma_{xz}{}^0(x) = \varphi^0(x) - w_x^0(x)$ (II.6)

$\varphi^0(x)$: C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^0(x) + \bar{\gamma}_{xz}{}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}{}^0(x) \end{cases} \quad (II.7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_x = G_{xz}\,\varphi^0(x) \quad (II.8)$$

GXZ : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction (k = 5/6) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.5.3. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT) :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité Figure (II.3).

La fonction (z) représente le gauchissement et sa dérivée f'(z) le cisaillement.

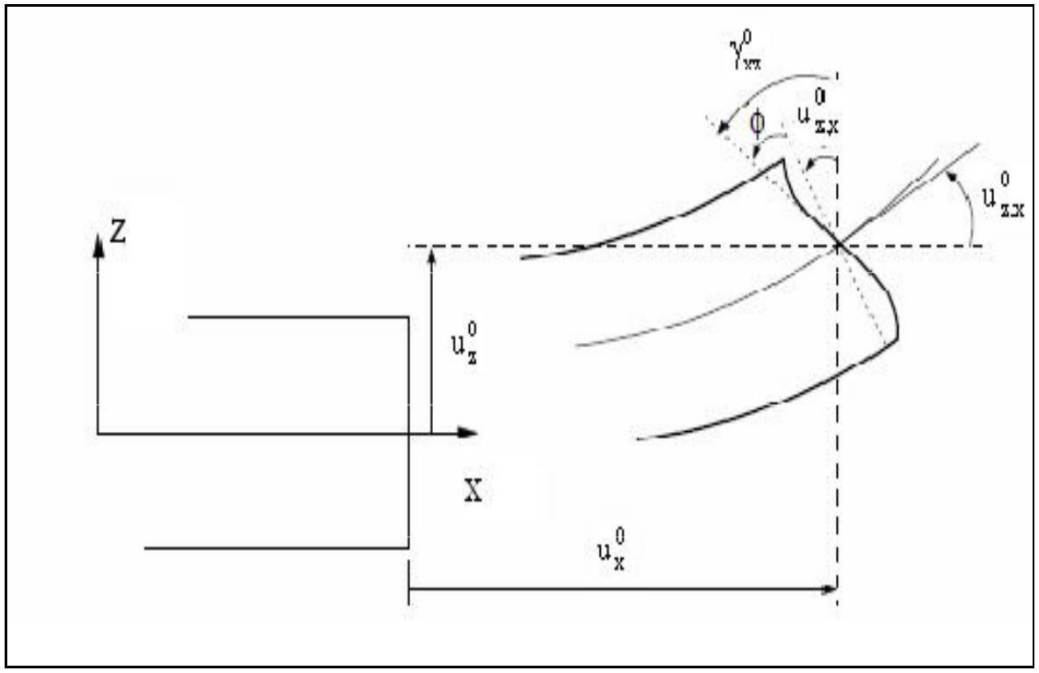


Figure II. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen 2004], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [20]

$u0(x,z) = u0(x) + z\Psi(x) + z^2Ç(x) + z^3\varphi(x)$ *(II.9)*

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (z). Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z\, w_x{}^0(x) + f(z)\varphi^0(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x{}^0(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w_x{}^0(x) \quad (II.11)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\varphi^0(x) \quad (II.12)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'(z)|_{z=\pm h} = 0 \quad (II.13)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement f (z), quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche de [21] :

$$f(z) = \frac{1}{2}\, z \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}\, z^2\right) \qquad (II.14)$$

- L'approche de [Reissner 1945] :

$$f(z) = \frac{5}{4}\, z \left(1 - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \qquad (II.15)$$

- L'approche de [22] :

$$f(z) = z\, \alpha^{-\frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha}} \qquad (II.16)$$

- L'approche de [23]:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \qquad (II.17)$$

Dans le modèle de [Reddy 1984], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de [24] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \qquad (II.18)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \qquad (II.19)$$

$$= z\left(1 - \frac{\pi^2}{3!}\frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!}\frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!}\frac{z^6}{h^6} + \cdots\right)$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme Co sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, [25] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-\frac{2z^2}{h^2}} \qquad (II.20)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z, alors que la fonction (sinus) de 23 1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

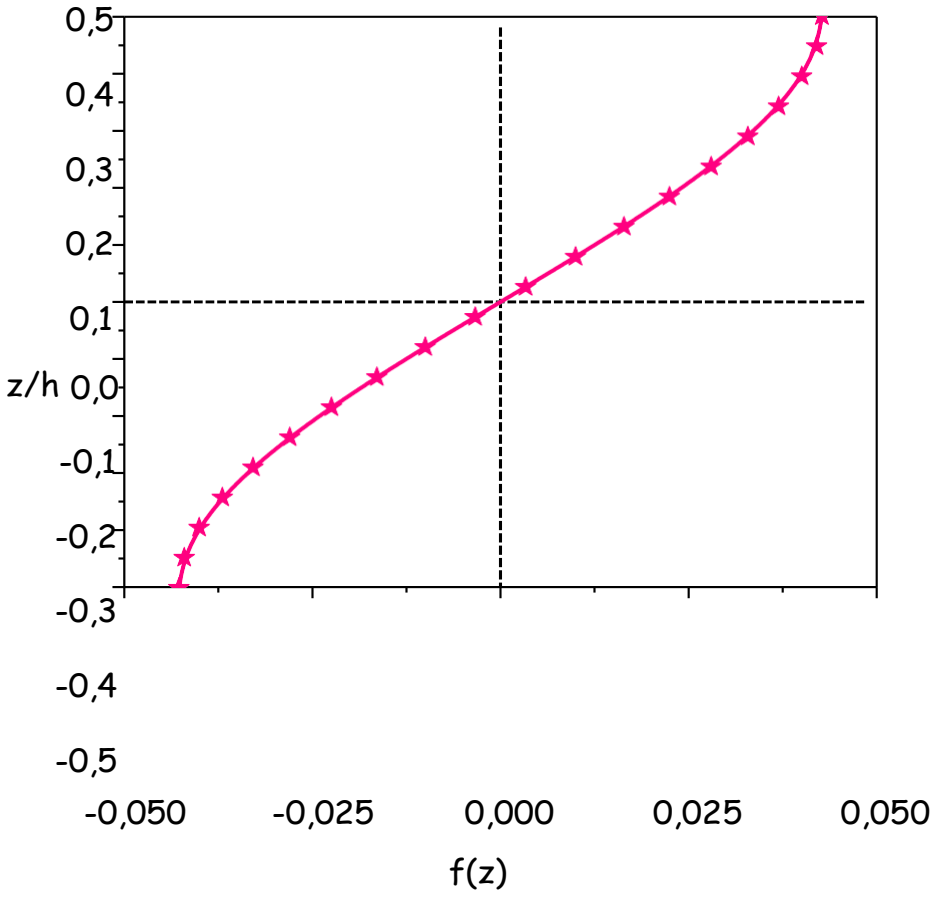


Figure II-4: Répartition à travers l'épaisseur de la fonction de contrainte de cisaillement transverse.

II.6. Conclusion :

Ce chapitre a permis de passer en revue les principales théories des poutres, depuis les modèles les plus simples (Euler-Bernoulli) jusqu'aux formulations plus avancées (Timoshenko et théories d'ordre supérieur), en soulignant leurs hypothèses, leurs avantages et leurs limites.

La théorie d'Euler-Bernoulli, bien que simple et efficace pour les poutres minces, néglige les effets de cisaillement, ce qui la rend inadaptée aux poutres épaisses ou aux structures soumises à des chargements complexes. La théorie de Timoshenko, en revanche, intègre ces effets et offre une meilleure précision pour les poutres épaisses. Les théories d'ordre supérieur, bien que plus complexes, permettent une modélisation plus fine des contraintes et déformations, ce qui peut s'avérer indispensable pour certains cas de chargement ou pour des géométries particulières.

Les enseignements tirés de ce chapitre guideront les développements ultérieurs, notamment la formulation des éléments finis adaptés aux poutres FGM. Le choix de la théorie appropriée dépendra des conditions aux limites, des rapports d'élancement et des propriétés matérielles graduelles. Dans le prochain chapitre, nous aborderons la méthode des éléments finis appliquée aux poutres FGM, en nous appuyant sur les modèles théoriques présentés ici pour établir des formulations robustes

CHAPITRE III : Formulation des éléments poutres par la méthode des éléments finis

III.1 Introduction :

La méthode des éléments finis (MEF) s'est imposée comme un outil numérique incontournable pour l'analyse des structures, offrant une grande flexibilité dans la modélisation de géométries, chargements, et comportements complexes. Dans le contexte des poutres, qu'elles soient minces ou épaisses, isotropes ou à gradient fonctionnel (FGM), la MEF permet de résoudre efficacement les problèmes de mécanique des structures en discrétisant le domaine continu en éléments finis interconnectés.

Ce chapitre présente la formulation des éléments poutres dans le cadre de la MEF, en considérant des matériaux isotropes classiques. Pour les poutres isotropes, les formulations standards basées sur les théories d'Euler-Bernoulli (poutres minces) et de Timoshenko (poutres épaisses) sont bien établies.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. Présenter la formulation générale des éléments poutres dans le cadre de la MEF, en incluant les matrices de rigidité pour les modèles minces et épais.
2. Aborder les aspects pratiques d'implémentation, tels que l'intégration et l'assemblage des matrices globales.

Ce chapitre servira de base pour les développements numériques présentés dans le chapitre suivant, où des études de cas permettront de valider les formulations proposées.

III.2 Méthode des éléments finis :

Les éléments finis apparu aux années 60, quand on avait besoin d'obtenir des méthodes capables de résoudre problèmes de calcul et de mathématiques complexes, et plus précisément dans les domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'astronomie.

Les éléments finis émergèrent au fil des temps avec les progrès des mathématiques et de l'informatique. Il s'évolua ensuite pour s'appliquer à des champs plus larges tels que la conception technique et la recherche scientifique, et est maintenant un élément intégrant plusieurs applications technologiques et techniques tels que la conception de structure, l'analyse de transfert de chaleur, les prévisions météorologiques, etc.
Les logiciels et logiciels informatiques ont mieux évolué pour rendre plus facile l'utilisation d'éléments finis, aboutissant à des applications plus vastes et plus complexes, comme la modélisation et la simulation dans les plusieurs domaines comme le génie civil et mécanique, la thermodynamique, la dynamique des fluides, etc.

III.3 Pourquoi avoir choisi MEF ?

Les Procédés de calcul et le Principe d'analysé sont fondés sur le calcul manuel, l'expérience ou le calcul automatisé et la simulation informatique.

La méthode de simulation informatique la plus répandue parmi les ingénieurs est nommée MEF, Il s'AGIT D'une méthode à prédominance numérique dans laquelle les équations gouvernantes (systèmes d'équations différentielles) sont différentielles Formulés en forme matricielle, ce qui convient très bien aux solveurs informatiques automatiques.

Il est inclus dans toutes les applications logicielles commerciales pour calculer les structures d'interface utilisateur graphique (GUI).

III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une technique analytique utilisée en génie des structures et pour résoudre des problèmes liés à l'analyse globale des structures. La méthode est basée sur la division de la structure en petits éléments de taille limitée, puis sur le calcul des effets et des interactions au sein de chaque élément et sur les limites entre les éléments. Cette approche permet d'estimer le comportement général de la structure et d'analyser les effets qui peuvent lui être appliqués du fait de forces extérieures ou de conditions aux limites**.**

III.5 Domaines d'application du MEF :

Les trois Principes principaux Domaines d'application du MEF sont :

- Problèmes d'équilibre et de statistiques : où le comportement du système ne changement pas avec le temps.
- Problèmes de dynamique et de stabilité : ils sont des Développements de problèmes d'équilibre où sont calculées des valeurs spécifiques ou critiques de paramètres spécifiques.
- Problèmes de propagation : ils sont des problèmes dans des phénomènes dont le comportement dépend d'une facture temporelle.

III.6 Avantages et inconvénients de la MEF :

Dans le génie civil, les éléments finis est une technique d'analyser appliquée à l'étude du Comportement des structures et systèmes d'ingénierie complexes.

-- Les avantages des éléments finis dans ce sont :

● Assurer la précision :

Les éléments finis permettent d'analyser les structures peut être décomposé en petits éléments pour
les Déformations et les Forces sont calculés de manière spécifique.

● Économisez l'efficacité des calculs :

Les éléments finis peuvent être utilisés pour calculer efficacement les Déformations et les effets de charger dans des structures complexes, économisant ainsi du temps et des efforts dans le processus d'analyser.

● Fournir des informations détaillées sur les déformations :

Les éléments finis peuvent fournir des informations détaillées sur les déformations des structures, ce qui permet de comprendre leur comportement et d'améliorer leur conception.

● Permettre l'analyse de structures complexes :

Les éléments finis permettent l'analyse de structures complexes qui sont traditionnellement difficiles à analyser, ce qui aide à concevoir des structures plus efficaces et plus sûres.
● Offre la possibilité d'améliorer la conception :

En analysant les structures à l'aide d'éléments finis, la conception peut être continuellement dusse ment améliorée en donnant des Renseignements sur les performances, les déformations et les contraintes.

-- Les inconvénients des éléments finis en cette occurrence sont :

● Dépendance des résultats en fonction de la Maillage :

Les résultats peuvent être sensibles à la partition du maillage, ce qui obliger une attention Particulière verser l'analyse du maillage et à la sélection de la taille des éléments.
● Coût en temps et en effort :

La préparation et Analyse d'un modèle peuvent consommer beaucoup de temps et d'Efforts particulièrement verser des Systèmes compliqués.
● Estimation des erreurs :

Il SE peut que l'estimation de l'exactitude du résultat soit difficile, en particulier dans

des Situations où le modèle est extrêmement compliqué.

● **Sensibilité aux conditions aux limites :**

Les conditions Données aux limites peuvent exercer ONU rôle signification sur les résultats.
● Nécessité de vérificatif des résultats :

Les résultats résultant de l'analysé par éléments finis peuvent nécessiter une vérification par des tests expérimentaux.

En résumé, les éléments finis du génie civil fournissent des outils puissants pour analyser et concevoir des structures de manière précise et efficace, aidant ainsi à développer des projets d'ingénierie sûrs et durables.

III.7 Application de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est basée sur le décomposé du domaine physique à prendre en considération en plusieurs sous domaines appelés éléments finis, Ne pas les tailles sont non infinitésimales.

La solution voulue est approximée par des polynômes simples, puis le domaine est reconstitué assemblant tous les éléments.

- Étape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.
- Étape 2 : Division du domaine en éléments finis.
- Étape 3 : Approximation de la solution dans chaque élément.
- Étape 4 : Assemblage des éléments et application des conditions aux limites.
- Étape 5 : Résolution du système global.

III.8 Formes classiques d'éléments :

Il existe de nombreuses formes d'éléments finis à une, deux ou trois dimensions, Chaque type d'élément un été identifié par un nom qui indique sa forme et le nombre de nœuds constituant l'élément [26, 27, 28, 29].

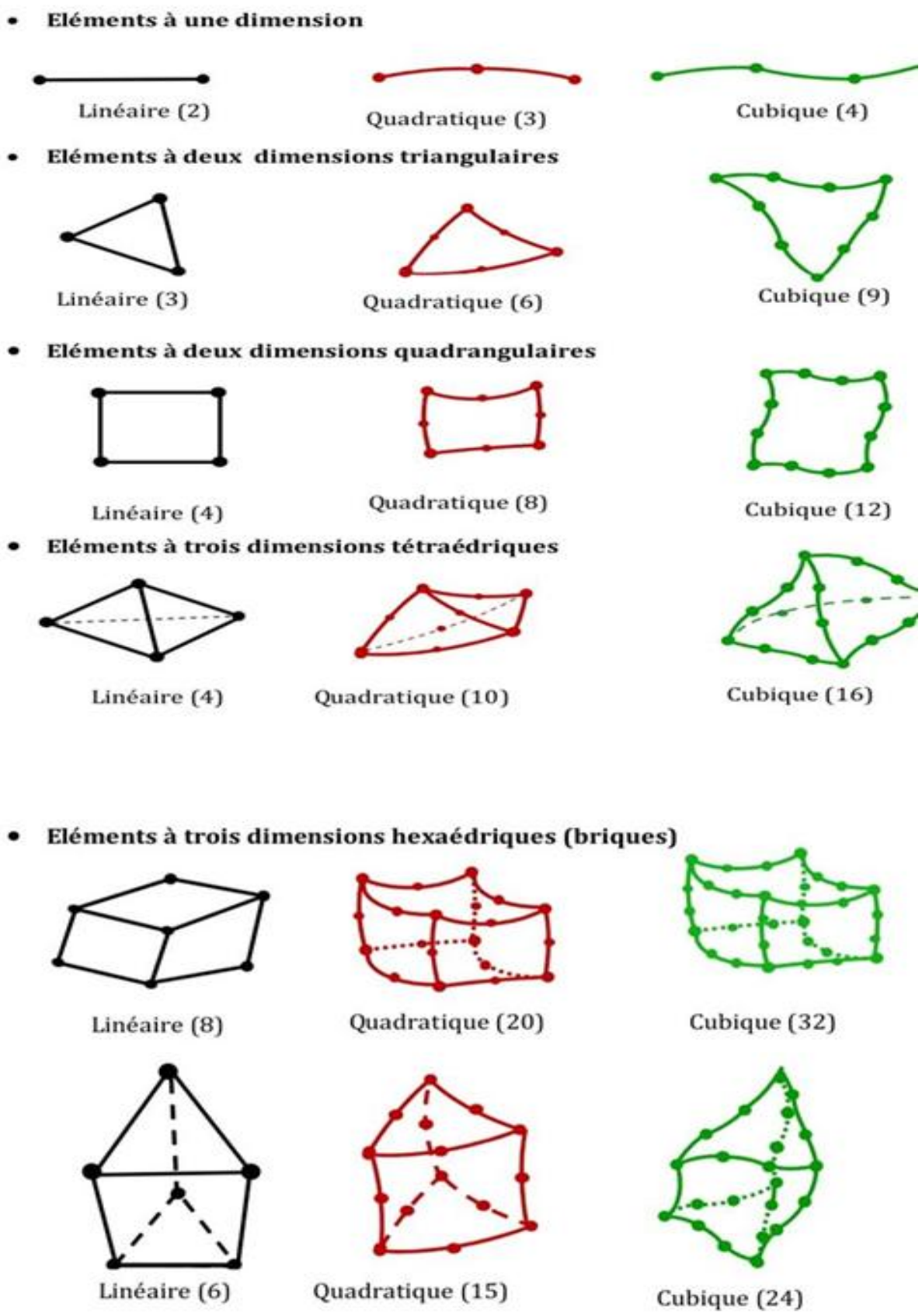


Figure III.1 : Formes classiques d'éléments.

III.9 Formulation de l'élément fini poutre de Bernoulli (poutre mince) :

Dans ce chapitre on développe la matrice de rigidité pour un élément de poutre travaillent en flexion. Nous allons maintenant suivre les étapes nécessaires pour développer la matrice de rigidité d'un élément de poutre, puis illustrer des solutions complètes pour les poutres.

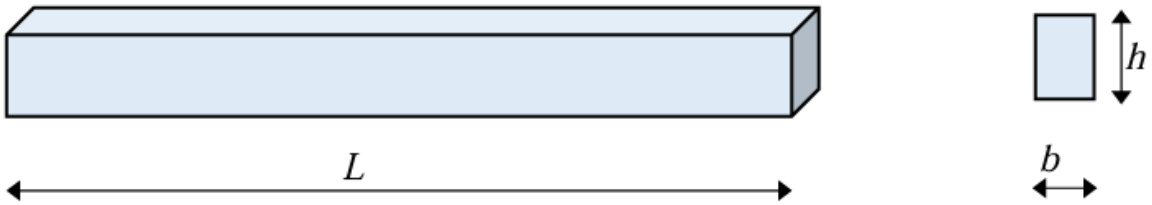


Figure III.2 : Elément de poutre mince.

Une poutre est un élément structurel généralement long et mince soumis à une charge transversale qui produit des effets de flexion importants par rapport à des effets de torsion ou axiaux. Cette déformation de flexion est mesurée comme un déplacement transversal et une rotation. Dans ce sens, les degrés de liberté nodaux considérés sont un déplacement transversal et une rotation.

Soit le nœud de poutre décrit dans la (figure III.1). La poutre a une longueur L avec des coordonnées locales axiales x et des coordonnées locales transversales y. Les déplacements nodaux transversaux dans le repère local sont les vi et les rotations les θ_i. Les forces nodales locales sont les f_{iy} et les moments de flexion par mi comme montré dans la (figure III.2) et (III.4) Nous négligeons tout d'abord tous les effets des forces axiales**.**

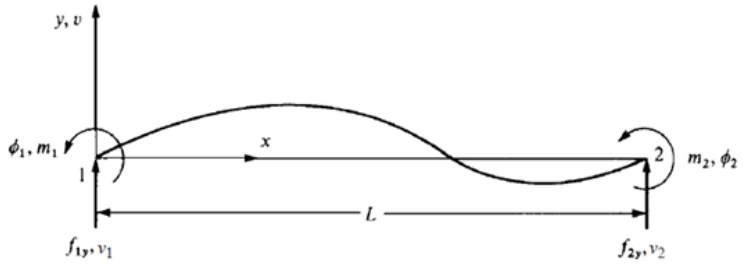


Figure III.3 : Elément poutre avec des déplacements, des rotations, des forces, et des moments nodaux positifs.

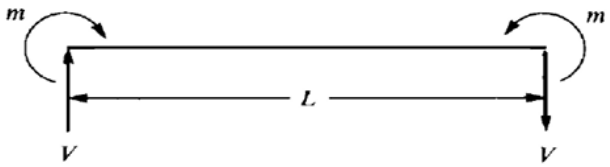


Figure III. 4 : Conventions de signe pour les forces de cisaillement et les moments de flexion.

Dans tous les nœuds, les conventions de signes suivantes sont utilisées :

1. Les moments sont positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Les rotations sont positives dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
3. Les forces sont positives dans la direction positive.
4. Les déplacements sont positifs dans la direction positive de y.

La figure III.4_ indique les conventions de signes utilisées dans la théorie de la poutre pour les forces de cisaillement positives V et les moments de flexion m.

III.9.1 Approximation du champ de déplacement

Supposons que la variation de déplacement transversal à travers la longueur de l'élément est égale à :

$v(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ (III.1.1)

La fonction de déplacement cubique Eq. (III.1.1) est appropriée car il existe quatre degrés de liberté (un déplacement transversal vi et une petite rotation θi à chaque nœud). En utilisant la même procédure que celle décrite à la section 2.2, nous exprimons v en fonction des degrés nodaux de liberté v1, v2, θ1 et θ2 comme suit :

$v(0)=v_1=a_4$ (III.1.2)

$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_1=a_4$

$v(L)=v_2=a_1L^3+a_2L^2+a_3L+a_4$

$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_1=3a_1L^2+2a_2L+a_3$

$\theta= dv/dx$ pour une petite rotation θ supposée. La résolution des équations (III.1.2) pour a1 à a4 en termes de degrés de liberté nodaux et en remplaçant dans l'équation (III.1.1), nous avons

$v=\frac{2}{L^3}(v_1-v_2)+\frac{1}{L^2}(\theta^1+\theta^2)+\frac{-3}{L^2}(v_1-v_2)-\frac{1}{L}(2\theta_1+\theta_2)x^2+\theta_1x+v_1$ (III.1.3)

Sous forme matricielle, nous exprimons l'équation (III.1.3) comme

$v=[N]\{d\}$ (III .1.4)

Avec

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III .1.5a)}$$

$[N]=[N_1\ N_2\ N_3\ N_4]$ (III .1.5b)

$N_1=\frac{1}{L^3}(2x^3-3x^2L+L^3)$ $N_2=\frac{1}{L^3}(x^3L-2x^2L^2+xL^3)$ (III .1.6)

$N_3=\frac{1}{L^3}(-2x^3-3x^2L)$ $N_4=\frac{1}{L^3}(x^3L-x^2L^2)$

Les N_1, N_2, N_3 et N_4 sont appelés les « fonctions de forme » pour un élément de poutre. Ces fonctions de forme cubique sont connues sous le nom de fonctions d'interpolation. Pour l'élément de poutre, N_1 vaut 1 lorsqu'il est évalué au nœud 1 et vaut 0 lorsqu'il est évalué au nœud 2. Parce que N_2 est associé à $\theta 1$, nous avons, à partir des deux équations (III.1.6),

$(dN2/dx) = 1$ lorsqu'il est évalué au nœud 1. Les fonctions de forme N_3 et N_4 ont des résultats analogues pour le nœud 2.

III.9.2 Définir les relations déformation-déplacement et déformation-contrainte

Soit la relation de déformation axiale/déplacement suivante est valide :

$\varepsilon_x(x,y)=\frac{du}{dx}$ (III .1.7)

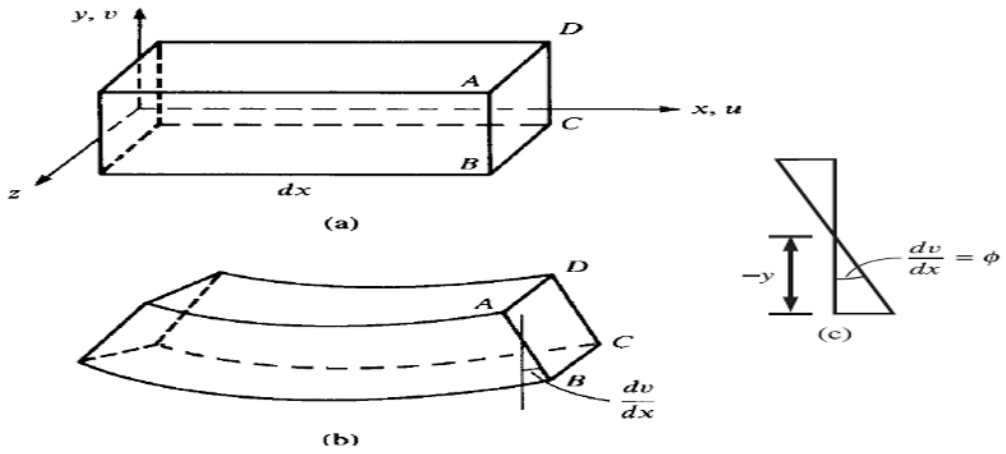


Figure III.5 : segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation ; (C) Angle de rotation de la section transversale ABCD.

u est la fonction de déplacement axial. À partir de la configuration déformée de la poutre représentée sur la (figure III-7), on établit le lien entre le déplacement axial et le déplacement transversal.

$u=-y\frac{dv}{dx}$ (III .1.8)

Nous rappelons l'hypothèse fondamentale de poutre, selon laquelle les sections transversales de la poutre (la section transversale ABCD) soient planes avant la déformation par flexion, restent planes après la déformation et, en général, présentent une petite rotation (dv/dx). En utilisant l'équation (III.1.8) dans l'équation (III.1.7), nous obtenons :

$$\varepsilon_x(x,y)=-y\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{(III .1.9a)}$$

En utilisant la loi de Hooke ($\sigma x = E\ \varepsilon x$) on obtient la formule de flexion de la poutre ou la contrainte de flexion :

$$\sigma x=\frac{-My}{I} \qquad \text{(III .1.9b)}$$

À partir de la théorie de la poutre, le moment de flexion et la force de cisaillement sont liés à la fonction de déplacement transversal selon la relation suivante :

$$m(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2} \qquad V=EI\frac{d^3v}{dx^3} \qquad \text{(III .1.10)}$$

III.9.3 Expression de la déformation

En raison de l'hypothèse des section planes du modèle d'Euler-Bernoulli, nous avons :

$$u(x,y)=-y.\theta(x) \qquad \text{(III.2.1)}$$

$$u(x,y)=-y.\frac{dv}{dx} \qquad \text{(III.2.2)}$$

Le déplacement s'écrit sous la forme :

$$v(x)=[N_1(x)\ \ N_2(x)\ \ N_3(x)\ \ N_4(x)]\begin{Bmatrix}v_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix} \qquad \text{(III.2.3)}$$

D'où, la courbure de la poutre est :

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}(Nu)=Bu \qquad \text{(III.2.4)}$$

Dont la matrice de déformation B est :

$$B=\frac{d^2}{dx^2}N=\left[\frac{d^2N_1(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_2(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_3(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_4(x)}{dx^2}\right]=$$
$$\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\ \ \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{2}{L}+\frac{6X}{L^2}\right]$$

$$B=\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\ \ \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{2}{L}+\frac{6X}{L^2}\right] \qquad \text{(III.2.5)}$$

III.9.4 L'énergie de déformation de l'élément poutre :

D'après la théorie des poutres :

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

N_1,N_2,N_3et N_4 : sont les fonctions d'interpolation.

$V(x)=\sum_{i=1}^{4} N_i(x).u_i$ (III.3.1)

Avec :

$u_i=[w_1\ \theta_1\ w_2\ \theta_2]^T$ (III.3.2)

Donc le champ de déplacement devient :

$U=\frac{1}{2}\int_V \sigma^T.\varepsilon.dV$ (III.3.3)

$=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_x^T.E.\varepsilon_x dV$ $/\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ (III.3.4)

$\varepsilon_x=-y[\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}]\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$ (III.3.5)

$\varepsilon_x=-y[B]\{\hat{u}\}$ (III.3.6)

$U=\frac{1}{2}\int_V \{\hat{u}\}^T[B]^T.(y)^2.E.[B]\{\hat{u}\}dv$ (III.3.7)

$U=\frac{1}{2}\{\hat{u}\}^T(E\int_V [B]^T.y^2.[B]\,dv)\{\hat{u}\}$ (III.3.8)

$\int dz=b$ (III.3.9)

$\int_y^z y^2=\frac{h^3}{12}$ (III.3.10)

Le travail des forces nodales est:

$W=f_1v_1+m_1\theta_1+f_2v_2+m_2\theta_2=\{d\}^T\{f\}$ (III.3.11)

Sachant que $\pi=U+W$

En invoquant la stationnarité de l'énergie potentielle totale π, *nous avons :*

$\frac{1}{2}u^T\left[\int_V (B^TE.y^2.B)dV\right]u=u^Tf$ (III .3.12)

Alors :

$\frac{1}{2}u^T\left[\int_V (B^TE.y^2.B)dV\right]\{d\}=\{f\}$ (III.3.13)

Ecrivons cette équation sous la forme :

$[K]\{d\}=\{f\}$ (III.3.14)

Ou $k=\int_V (B^TE.y^2.B)dV$ est la matrice de rigidité.

On déduire que la matrice de rigidité de l'élément poutre est :

$K=EI\int_0^L [B]^T . E . [B] dx$ (III.3.15)

Après intégration nous avons :

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.16)}$$

L'équation (III.3.16) indique que [k] relie les forces transversales et les moments de flexion aux déplacements transversaux et aux rotations, alors que les effets axiaux ont été négligés.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.3.17)}$$

III.10 Formulation de la Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Timoshenko (y compris la déformation transversale du cisaillement) :

La théorie de la poutre avec déformation due au cisaillement est dérivée comme suit :

La déformation due au cisaillement (V) est maintenant incluse. En se référant à la (figure III-2),on observe une section d'une poutre de longueur différentielle *dx* avec une section transversale.

En raison de l'inclusion de la (figure III-2), on observe une section d'une poutre de longueur différentielle *dx* avec la section transversale. Supposée rester plane mais non plus perpendiculaire à l'axe neutre (axe *x*) en raison de l'inclusion de La courbure totale de la poutre dans la force de cisaillement entraînant une rotation indiquée par le terme *b*. La courbure totale de la poutre dans Un point *x* se compose de deux parties, l'une provoquée par la flexion et l'autre par la force de cisaillement. La rotation de la courbure au point *x* est donc donnée par :

$\frac{dv}{dx}=\theta(x)+\beta(x)$ (III .4.1a)

La rotation due au moment de flexion et à la force transversale de cisaillement est donnée par la fonction $\theta(x)$ et $\beta(x)$.

Nous supposons que la courbure est linéaire et que la pente (courbure angulaire) est très faible.

La relation entre le moment de flexion et la déformation de flexion (courbure) est la suivante :

$M(x)=EI\frac{d\theta(x)}{dx}$ (III .4.1b)

La relation entre la force de cisaillement et la déformation due à cisaillement est donnée par :

$V(x)=K_sAG\beta(x)$ (III .4.1c)

La différence entre dv /dx et θ représenté la déformation du cisaillement $\gamma_{zy}(=\beta)$ de la poutre

$$\gamma_{zy} = \frac{dv}{dx} = -\theta \qquad \text{(III .4.1d)}$$

Pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre, y compris la déformation transversale du cisaillement, nous supposons que le déplacement transversal doit être donné par la fonction cubique dans l'équation. (III.1.1). Nous choisissons la déformation de cisaillement transversale γ, qui est consistante avec le polynôme cubique pour *v(x)*, de sorte que γ est une constante donnée par

$$\gamma=c \qquad \text{(III .4.1c)}$$

En utilisant la fonction de déplacement cubique pour *v*, la relation de rotation donnée par l'équation (III.4.1a), la déformation de cisaillement donnée par l'équation (III.4.1), ainsi que la relation de moment de flexion - courbure, Eq. (III.4.1b) et la relation de déformation de cisaillement-force de cisaillement Eq. (III.4.1c), nous obtenons :

$$C=6a_1 g \qquad \text{(III .4.1d)}$$

$g = EI / k_s AG$ et k_s A désigné la surface de cisaillement. Les surfaces de cisaillement, *As*, varient en fonction de la forme des sections. Par exemple, pour une forme rectangulaire, As est égale à 0,83 fois la section transversale *A* ; pour une section transversale circulaire, on prend 0,9 fois la section transversale.

Utiliser les équations (III.1.1), (III.4.1a), (III.4.1c) et (4.1.15d) permettent d'exprimer ΘComme un polynôme en x comme suit :

$$\Theta=a_3 + 2a_2 x+(3x^2+6g)a_3 \qquad \text{(III.4.1e),}$$

Utiliser les équations. (III.1.1) et (III.4.1e), permettent d'exprimer les coefficients a1 à a4 en termes de déplacements nodaux *v1* et *v2*, ainsi que des rotations *θ1* et *θ2* de la poutre aux extrémités *x = 0* et

x = L, comme précédemment. Les expressions pour a1 à a4 sont ensuite données comme

suit :

$$a_1=\frac{2v_1+L\theta_1-2v_2+L\theta_2}{L(L^2+12g)}$$

$$a_2=\frac{-3Lv_1-(2L^2+6g)\theta_1+3Lv_2+(-L^2+6g)\theta_2}{L(L^2+12g)} \qquad \text{(III.4.1f),}$$

$$a_3=\frac{-12gv_1+(L^3+6gL)\theta_1+12gv_2-6gL\theta_2}{L(L^2+12g)}$$

$a_4=v_1$

En substituant dans l'équation (III.1.1),, nous obtenons

$$v=\frac{2v^1+L\theta^1-2v^2+L\theta_2}{L(L^2+12g)}\ x^3-\ \frac{-3Lv^1-(2L^2+6g)\theta^1+3Lv_2+(-L^2+6g)\theta_2}{L(L^2+12g)}\ x^2-\ \frac{12gv^1-(L^3+6gL)\theta^1-12gv^2-6gL\theta_2}{L(L^2+12g)}$$
$$x+v_1 \qquad \text{(III.4.1g)}$$

$$N_1=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}\ [6\varepsilon(\varepsilon-1)]$$

$$N_2=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L(\varepsilon-\ 1)(3\varepsilon-1-\emptyset_y) \qquad \text{(III.4.1h)}$$

$$N_3=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[-6\varepsilon(\varepsilon-1)]$$

$$N_4=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L\varepsilon(-2+\emptyset_y+3\varepsilon) \qquad Ou \quad \varepsilon=\frac{x}{L} \qquad [30]$$

De manière similaire à l'étape 4, pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre en tenant compte de la déformation du cisaillement), nous avons :

$$f_{1y}=(0)=6EIa_1=\frac{EI(12v_1+6L\theta_1-12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$$

$$m_1=-m(0)=-EIa_2=\frac{EI(-6Lv_1-(4L^2+12g)\theta_1+6Lv_2+(-2L^2+12g)\theta_2)}{L(L^2+12g)} \qquad \text{(III.4.1i)}$$

$$f_{2y}=-(L)=\frac{EI(-12v_1-6L\theta_1+12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$$

$$m_2=m(L)=\frac{EI(6Lv_1+(4L^2-12g)\theta_1-6Lv_2+(4L^2+12g)\theta_2)}{L(L^2+12g)}$$

Sous forme matricielle l'Eq. (III.4.1i) devient

$$\begin{bmatrix}f_{1y}\\m_1\\f_{2y}\\m_2\end{bmatrix}=\frac{EI}{L(L^2+12g)}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g)\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\\theta_1\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix} \qquad \text{(III.4.1j)}$$

La matrice de rigidité, y compris la déformation de flexion et cisaillement, est alors donnée par :

$$[k]=\frac{EI}{L(L^2+12g)}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g)\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g)\end{bmatrix} \qquad \text{(III.4.1k)}$$

Dans l'équation (III.4.1k), rappelez-vous que g représente le terme de cisaillement transversal. Si l'on fixe $g = 0$, on obtient l'équation (III.3.16) pour la matrice de rigidité de la poutre en négligeant la déformation du cisaillement transversal. Pour mieux visualiser l'effet du facteur de correction de cisaillement, nous définissons le terme de correction de cisaillement non dimensionnel

$\varphi = 12EI/(ksAGL^2) = 12g=L^2$.

III.11 Formulation de la Matrice de masse des poutres :

III.11.1. Poutre d'Euler-Bernoulli (CBT)

Champ de déplacement

La théorie d'Euler-Bernoulli suppose que les sections restent planes et perpendiculaires à la fibre neutre :

$$u(x,z,t) = u0(x,t) - z\frac{\partial x}{\partial w}$$

$$w(x,t) = w(x,t)$$

Les degrés de liberté de l'élément à 2 nœuds sont :

$$\{q_e\} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T$$

Avec: $\theta = \frac{dx}{dw}$

Fonctions de forme d'Hermite

$$w(x) = [N]\{q_e\}$$

Où :

$$[N] = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4]$$
$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$
$$N_2 = L(\xi \quad - 2\xi^2 + \xi^3)$$
$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$
$$N_4 = L(-\xi^2 + \xi^3)$$

Matrice de masse cohérente

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\,(\dot{w})^2\,dx$$

En remplaçant : $\dot{w} = [N]\dot{q}_e$

On obtient :

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T\left(\int_0^L \rho A N^T N dx\right)\dot{q}_e$$

La matrice de masse est donc

$$M_e = \int_0^L \rho A N^T N dx$$

Après intégration :

$$M_e = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

III.11.2. Poutre de Timoshenko (FSDT)

La théorie de Timoshenko tient compte du cisaillement transverse.

Champ de déplacement

$$u(x,z,t) = u_0(x,t) + z\phi(x,t)$$

$$w(x,t) = w(x,t)$$

Est la rotation indépendante.

Les ddl :

$$\{q_e\} = \{w_1 \quad \phi_1 \quad w_2 \quad \phi_2\}^T$$

Interpolation :

$$w = [N_w]\{q_e\}$$

$$\phi = [N_\phi]\{q_e\}$$

Dans un élément Timoshenko à 2 nœuds :

$N_1 = \frac{1}{L(1+\varphi_y)}\,[6\varepsilon(\varepsilon - 1)]$

$N_2 = \frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L(\varepsilon - 1)(3\varepsilon - 1 - \emptyset_y)$

$N_3 = \frac{1}{L(1+\varphi_y)}[-6\varepsilon(\varepsilon - 1)]$

$N_4 = \frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L\varepsilon(-2 + \emptyset_y + 3\varepsilon)$ $\qquad Ou \quad \varepsilon = \frac{x}{L}$ [30]

Matrice de masse Timoshenko :

La matrice cohérente est :

Sous forme matricielle :

$$M_e = \int_0^L \left[I_0 N_w^T N_w + I_2 N_\phi^T N_\phi\right] dx$$

$$I_0 = b\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)\, dz$$

$$I_1 = b\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z\, dz$$

$$I_2 = b\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2\, dz$$

Pour un FGM non symétrique, I1≠0, et la matrice de masse complète devient :

$$M_e = \int_0^L \begin{bmatrix} N_w^T I_0 N_w & N_w^T I_1 N_\phi \\ N_\phi^T I_1 N_w & N_\phi^T I_2 N_\phi \end{bmatrix} dx$$

III.12 Vibrations libres :

Analyse vibratoire libre :

On résout **:**

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

$$q = \Phi e^{i\omega t}$$

On obtient :

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0$$

Et la condition :

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

Les fréquences naturelles sont :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

III.12 Conclusion :

Ce chapitre a permis de présenter la formulation des éléments poutres dans le cadre de la méthode des éléments finis, en considérant des matériaux isotropes. Les formulations classiques basées sur les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ont été rappelées, et leurs adaptations aux FGM ont été détaillées, en mettant l'accent sur la prise en compte de la variation graduelle des propriétés matérielles.

Les développements présentés dans ce chapitre fournissent les outils théoriques nécessaires pour implémenter des éléments poutres adaptés aux FGM dans un code de calcul par éléments finis.

CHAPITRE IV : Formulation des éléments poutres FGM minces et épaisse par la MEF

IV.1 Introduction :

Ce chapitre présente la formulation des éléments poutres FGM dans le cadre de la MEF, en considérant les matériaux FGM. Cependant, l'introduction des FGM, caractérisés par une variation continue des propriétés matérielles, nécessite une adaptation de ces formulations pour prendre en compte l'hétérogénéité du matériau.

Dans le contexte des matériaux FGM, où les propriétés mécaniques varient continûment, l'application de ces théories nécessite des adaptations pour tenir compte de la distribution graduelle des modules élastiques et des coefficients de cisaillement.

IV.2 Description du problème :

On considère une poutre en FGM de longueur L, d'épaisseur b et de hauteur h. Les coordonnées (x, y) définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z est origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur.

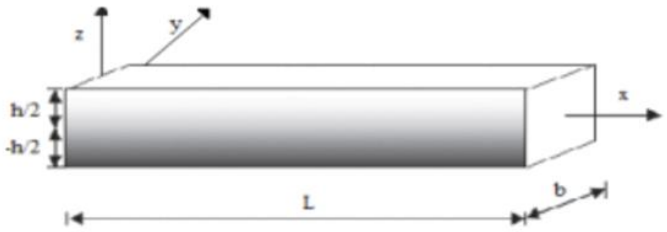


Figure IV. 1:une poutre en FGM.

IV.3 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces (poutre de Bernoulli) :

Dans le contexte des matériaux FGM, où les propriétés mécaniques varient continûment, l'application de ces théories nécessite des adaptations pour tenir compte de la distribution graduelle des modules élastiques et des coefficients de cisaillement.

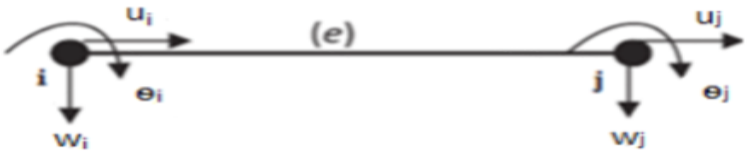


Figure IV. 2: un élément de poutre.

L'élément fini poutre FGM nécessite 3 *ddl* par nœud (u, w, θ)

IV.3.1 Champs de déplacement

Dans le cadre du théorème de Bernoulli l'effet de cisaillement est négligé. Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à *(x, z)* de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{IV-1}$$

$$w = w_0(x) \qquad \text{IV-2}$$

Où *u* et *w* sont respectivement les déplacements axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian de la poutre.

IV.3.2 Le champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{IV-3}$$

ε_x:la déformation normale suivant la direction x.

Ou encore :

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})$$

$$\varepsilon_{xo} = \frac{du_0}{dx}$$

$$\varepsilon_{xf} = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

IV.3.3 Les contraintes

Étant donné que la poutre FGM obéit à la loi de Hooke, l'expression des contraintes peut être déterminée comme suit :

$$\sigma_x = E(z).\varepsilon_x \qquad \text{IV-4}$$

E(z) : le module de Young du matériau FGM.

IV.3.4 Application du Principe de EPTM

L'expression de l'énergie potentielle totale s'écrit comme suit:

$$\frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T.\{\varepsilon\}dV - \int_s \{w\}^T.\{f\}ds = 0 \qquad \text{IV-6}$$

$$\frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T.E.\{\varepsilon\}dV - \int_s \{w\}^T.\{f\}ds = 0$$

Alors, l'expression de l'énergie potentielle totale devient:

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})^T.E.(\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})dv$$

IV.3.5 Interpolation des déplacements

Déplacement transversal

Le déplacement transversal d'un point de cordonnées *x* de la poutre est exprimé par :

$W(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$ IV-7

Ou : a_1,a_2,a_3,a_4 sont des constantes.

Il peut être écrit comme suit :

$W(x)=N_1(x).v_1+N_2(x).\theta_1+N_3(x).v_2+N_4(x).\theta_2$ IV-8

L'équation sous forme matricielle est la suivante :

$$W(x)=[0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{IV-9}$$

u_i: déplacement axial de chacun des nœuds .

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

N_1,N_2,N_3et N_4 : sont les fonctions d'interpolation.

$W(x)=\sum_{i=1}^{4} N_i\,(x)\,.u_i$ IV-10

Donc le champ de déformation de flexion devient :

$\varepsilon_{xf}=-y[0 \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} \quad 0 \quad \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}]\{\hat{u}\}=-y[B_f]\{\hat{u}\}$

$\varepsilon_{xf}=-y[B_f]\{\hat{u}\}$

Déplacement axial

Le déplacement axial d'un point de cordonnées *x* de la poutre est exprimé par :

$u(x)=a_1+a_2x$ IV-7

Ou : a_1,a_2 sont des constantes.

Il peut être écrit comme suit :

$u_{xo}(x)=\overline{N_1}(x)u_1+\overline{N_2}(x)u_2$ IV-8

L'équation sous forme matricielle est la suivante :

$$u_{xo}=\begin{bmatrix}\overline{N_1} & 0 & 0 & \overline{N_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}$$

u_i: déplacement axial de chacun des nœuds .

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

$\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$: sont les fonctions d'interpolation du déplacement axial, tel que :

$$\overline{N_1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right),\qquad \overline{N_2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

Donc le champ de déformation d'extension devient :

$$\varepsilon_{x0}=\left[\frac{\partial\overline{N_1}}{\partial x}\quad 0\quad 0\quad \frac{\partial\overline{N_2}}{\partial x}\quad 0\quad 0\right]\{\hat{u}\}=[B_m]\{\hat{u}\}$$

$$\varepsilon_{x0}=[B_m]\{\hat{u}\}$$

À partir de l'expression de l'énergie potentielle totale :

$$U=\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})^T.E.(\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})dv$$

Nous avons ;

$$U=\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{xo})^T.E.(\varepsilon_{xo})dv+\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{xf})^T.E.(\varepsilon_{xf})dv+\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{xo})^T.E.(\varepsilon_{xf})dv+$$

$$+\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_{xf})^T.E.(\varepsilon_{xo})dv$$

Qui peut être écrite comme suit :

$$[K]=[K_m]+[K_f]+[K_{mf}]+[K_{mf}]^T$$

Ou :

$$[K_m]=\int_V(\varepsilon_{xo})^T.E(z).(\varepsilon_{xo})dv$$

$$[K_f]=\int_V(\varepsilon_{xf})^T.E(z).(\varepsilon_{xf})dv$$

$$[K_{mf}]=\int_V(\varepsilon_{xo})^T.E(z).(\varepsilon_{xf})dv$$

Qui peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$[K_m]=EA(z).\int_0^L B_m^T.B_m^T\,dx$$

$$[K_f]=EI(z).\int_0^L B_f^T.B_f^T\,dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L B_m^T . B_f^T \, dx$$

A : section transversale

I : moment d'inertie

S : moment statique

$$EA(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).dz$$

$$EI(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2.E(z).dz$$

$$ES(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z.E(z).dz$$

Les matrices de déformation sont les suivants :

$$[B_m]=\left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0\right]$$

$$[B_f]=\left[0 \quad -\frac{12x+6L}{L^3} \quad \frac{6xL-4L^2}{L^3} \quad 0 \quad -\frac{12x-6L}{L^3} \quad \frac{6xL-2L^2}{L^3}\right]$$

IV.3.6 Evaluation des matrices de rigidité :

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0\right] dx$$

$$[K_m] = \frac{EA(z)}{L}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_f]$$

$$= EI(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12x+6L}{L^3} \\ \frac{6xL-4L^2}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{12x-6L}{L^3} \\ \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & 0 & -\frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_f] = \frac{EI(z)}{L^3}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & 0 & -\frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 & \frac{-12x+6L}{L^4} & \frac{-6xL+4L^2}{L^4} & 0 & \frac{12x+6L}{L^4} & \frac{-6xL+2L^2}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12x-6L}{L^4} & \frac{6xL-4L^2}{L^4} & 0 & \frac{-12x-6L}{L^4} & \frac{6xL-2L^2}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\begin{bmatrix} 0 & \frac{-6x^2+6xL}{L^4} & \frac{-3Lx^2+4L^2x}{L^4} & 0 & \frac{6x^2-6xL}{L^4} & \frac{-3Lx^2+4L^2x}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6x^2-6xL}{L^4} & \frac{3Lx^2-4L^2x}{L^4} & 0 & \frac{-6x^2+6xL}{L^4} & \frac{3Lx^2-4L^2x}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_0^L$$

$$[K_{mf}] = = ES(z).\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre FGM de Bernoulli est la suivante :

$$[K] = [K_m] + [K_f] + [K_{mf}] + [K_{mf}]^T$$

IV.4 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces et épaisses (poutre de Timoshenko) :

IV.4.1 Champs de déplacement

Le théorème de Timoshenko tient compte de l'effet de cisaillement transversal. Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\emptyset(x) \qquad \text{IV-1}$$

$$w = w_0(x) \qquad \text{IV-2}$$

Où *u* et *w* sont respectivement les déplacements axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian de la poutre.

IV.4.2 Le champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z.\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \qquad \text{IV-3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dw_0(x)}{dx} - \emptyset(x)$$

ε_x: la déformation normale suivant la direction *x*.

γ_{xy}: la déformation de cisaillement transversal

Ou encore :

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})$$

$$\varepsilon_{xo} = \frac{du_0}{dx}$$

$$\varepsilon_{xf} = -z.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}$$

$\gamma_{xy}=\frac{dw_0(x)}{dx}-\emptyset(x)$

IV.4.3 Matrice de rigidité de l'élément poutre FGM de Timoshenko

Par application du principe de stationnarité de l'énergie potentiel total, nous obtenons les matrices de rigidités suivantes :

$[K_m] = EA(z).\int_0^L B_m^T . B_m^T \, dx$

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[K_f] = EI(z).\int_0^L B_f^T . B_f^T \, dx$$

$$[K_m] = \frac{EA(z)}{L}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[K_f]$

$$= EI(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12x+6L}{L^3} \\ \frac{6xL-4L^2}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{12x-6L}{L^3} \\ \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & 0 & -\frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_f] = \frac{EI(z)}{L(L^2+12g)}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & (4L^2+12g) & 0 & -6L & (2L^2-12g) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & (2L^2-12g) & 0 & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix}$$

Avec

g = EI / (ks.AG(z))

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L B_m^T . B_f^T \, dx$$

$$[K_{mf}] =$$

$$\frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)}\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(-4-\varphi_y+\frac{6X}{L}) & 0 & 6+\frac{12X}{L} & L(-2+\varphi_y+\frac{6X}{L}) \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}] = \frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)}\int_0^L \begin{bmatrix} 0 & 6-\frac{12X}{L} & L(4+\varphi_y-\frac{6X}{L}) & 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(2-\varphi_y-\frac{6X}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(-4-\varphi_y+\frac{6X}{L}) & 0 & 6-\frac{12X}{L} & L(-2+\varphi_y-\frac{6X}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}]$$

$$= \frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)} \begin{bmatrix} 0 & 6x-\frac{6x^2}{L} & L(4x+\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) & 0 & -6x+\frac{6x^2}{L} & L(2x-\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\frac{6x^2}{L} & L(-4x-\varphi_y x+\frac{3x^2}{L}) & 0 & 6x-\frac{6x^2}{L} & L(-2x+\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_0^L$$

$$[K_{mf}] = \frac{1}{L(1+\varphi_y)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+\varphi) & 0 & 0 & -(1+\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\varphi) & 0 & 0 & (1+\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre FGM de Bernoulli est la suivante :

$$[K] = [K_m] + [K_f] + [K_{mf}] + [K_{mf}]^T$$

IV.4.4 Matrice de masse cohérente pour un élément fini de poutre de Timoshenko en matériau FGM

Pour une poutre droite dont la section droite varie selon la direction transversale z, les déplacements en tout point (x,z) sont donnés par la cinématique de Timoshenko :

$$u(x,z,t) = u_0(x,t) - z\,\theta(x,t)$$
$$w(x,z,t) = w_0(x,t)$$

où :

- u_0 : déplacement axial de la ligne moyenne,
- w_0 : flèche transversale,
- θ : rotation de la section droite

Les déformations généralisées s'écrivent :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' - z\,\theta', \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta + w_0'$$

La densité d'énergie cinétique par unité de volume est $\frac{1}{2}\rho(z)(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$. En intégrant sur la section A et sur la longueur L :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho(z)\left[(\dot{u}_0 - z\dot{\theta})^2 + \dot{w}_0^2\right] dA\,dx.$$

Développons le carré :

$$(\dot{u}_0 - z\dot{\theta})^2 = \dot{u}_0^2 - 2z\dot{u}_0\dot{\theta} + z^2\dot{\theta}^2.$$

Introduisons les moments d'inertie massiques de la section :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{d}}\,dx, \quad \text{avec } \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_1 \\ 0 & m_0 & 0 \\ -m_1 & 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

On peut la mettre sous forme matricielle locale :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{d}}\,dx, \quad \text{avec } \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_1 \\ 0 & m_0 & 0 \\ -m_1 & 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice μ est symétrique.

Les intégrales fondamentales sont :

$$m_0 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)dz$$

$$m_1 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)z\,dz$$

$$m_2 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)z^2\,dz$$

L'élément considéré possède deux nœuds, chacun avec trois degrés de liberté (DDL) : u, w, θ. Le vecteur des DDL élémentaires est :

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & \theta_1 & u_2 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T.$$

On interpole les trois champs à l'aide de fonctions de forme :

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{N}(x)\,\mathbf{q}^e,$$

Où $\mathbf{N}(x)$ est une matrice 3×6. La matrice de masse cohérente élémentaire s'écrit alors :

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T(x)\,\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{N}(x)\,dx.$$

Cette matrice 6×6 est symétrique et dépend des propriétés matérielles ($\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$) ainsi que du paramètre de cisaillement via les fonctions de forme pour ww et θ.

Fonctions de forme $\mathbf{u_0}(x)$

Déplacement axial :

On utilise une interpolation linéaire classique :

$$u_0(x) = N_{u1}(x)\,u_1 + N_{u2}(x)\,u_2,$$

$$N_{u1}(x) = 1 - \frac{x}{L}, \qquad N_{u2}(x) = \frac{x}{L}.$$

Flexion avec cisaillement (Timoshenko)

Les fonctions de forme pour $\mathbf{w}_0$ et θ sont obtenues à partir des équations différentielles de l'élément de poutre en flexion avec cisaillement. On définit le paramètre sans dimension :

$$\varphi = \frac{12\,EI}{k_s AGL^2},$$

Où *ks* est le facteur de cisaillement. Pour un matériau FGM, on utilise des valeurs équivalentes (*E*eff, *G*eff). Les fonctions de forme (cubiques modifiées) sont :

$$N_{w1}(x) = \frac{1}{1+\varphi}\left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} + \varphi\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right],$$
$$N_{w2}(x) = \frac{1}{1+\varphi}\left[\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} + \varphi\,\frac{x}{L}\right],$$
$$N_{\theta 1}(x) = \frac{1}{1+\varphi}\left[-x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} + \varphi\left(-\frac{x}{L}\right)\right],$$
$$N_{\theta 2}(x) = \frac{1}{1+\varphi}\left[\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} + \varphi\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right].$$

Vérifications aux nœuds :

- $N_{w1}(0) = 1,\ N_{w2}(0) = 0,\ N'_{w1}(0) = 0$ (mais la pente n'est pas égale à θ à cause du cisaillement)
- $N_{\theta 1}(0) = 0,\ N_{\theta 2}(0) = 0$
- $N_{w1}(L) = 0,\ N_{w2}(L) = 1,\ N_{\theta 1}(L) = 0,\ N_{\theta 2}(L) = 1$

Pour φ=0 (Euler-Bernoulli), ces fonctions se réduisent aux cubiques usuelles.

La matrice des fonctions de forme N(*x*)

La matrice **N**(*x*) (3 lignes, 6 colonnes) est :

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{w1} & N_{\theta 1} & 0 & N_{w2} & N_{\theta 2} \\ 0 & \dfrac{dN_{w1}}{dx} & \dfrac{dN_{\theta 1}}{dx} & 0 & \dfrac{dN_{w2}}{dx} & \dfrac{dN_{\theta 2}}{dx} \end{bmatrix}.$$

La troisième ligne correspond à l'interpolation directe de la rotation θ(x)$\theta(x)$ par les fonctions $N\theta i$.

Calcul de $\mathbf{M}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{N}\, dx$

La matrice μ étant donnée, **N***T**μ***N** se décompose en trois contributions : axiale, transversale, rotationnelle et couplage. Les sous-matrices résultantes sont détaillées ci-dessous.

Contribution axiale (m_0 *sur* u_0)

$$\mathbf{M}_{\text{ax}} = \frac{m_0 L}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contribution flexion-cisaillement (m_0 *sur* w *et* Θ)

$$\mathbf{M}_{\text{fl}} = \frac{m_0 L}{420(1+\varphi)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & 0 & C & -D \\ 0 & B & E\,L^2 & 0 & D & -F\,L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & D & 0 & A & -B \\ 0 & -D & -F\,L^2 & 0 & -B & E\,L^2 \end{bmatrix},$$

Avec :

$$A = 156 + 588\varphi + 504\varphi^e$$
$$B = (22 + 77\varphi + 70\varphi^2)L$$
$$C = 54 + 252\varphi + 252\varphi^2$$
$$D = (13 + 63\varphi + 70\varphi^2)L$$
$$E = 4 + 14\varphi + 14\varphi^2$$
$$F = 3 + 14\varphi + 14\varphi^2$$

Contribution de l'inertie de rotation

$$\mathbf{M}_{\text{rot}} = \frac{m_2}{L(1+\varphi)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L(1-\varphi) & 0 & -36 & 3L(1-\varphi) \\ 0 & 3L(1-\varphi) & L^2(4+2\varphi+2\varphi^2) & 0 & -3L(1-\varphi) & L^2(2-2\varphi-\varphi^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L(1-\varphi) & 0 & 36 & -3L(1-\varphi) \\ 0 & 3L(1-\varphi) & L^2(2-2\varphi-\varphi^2) & 0 & -3L(1-\varphi) & L^2(4+2\varphi+2\varphi^2) \end{bmatrix}$$

Contribution du couplage axial-rotation

$$\mathbf{M}_{\text{cpl}} = \frac{m_1}{1+\varphi}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Expression finale de la matrice de masse cohérente

La matrice de masse élémentaire est la somme des quatre contributions :

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}_{\text{ax}} + \mathbf{M}_{\text{fl}} + \mathbf{M}_{\text{rot}} + \mathbf{M}_{\text{cpl}}.$$

Elle est symétrique et de taille 6×6.

$$m_0 = \int_A \rho(z)\ dA, \quad m_1 = \int_A \rho(z)\ z\, dA, \quad m_2 = \int_A \rho(z)\ z^2\, dA,$$

$$\varphi = \frac{12\,EI}{k_s AGL^2}\mathbf{M_e} = \mathbf{M}_{\text{ax}} + \mathbf{M}_{\text{fl}} + \mathbf{M}\text{rot} + \mathbf{M}\text{cpl}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{a}} = \frac{m_0 L}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{M}_{\mathrm{fl}}$$

$$= \frac{m_0 L}{420(1+\varphi)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156+588\varphi+504\varphi^2 & (22+77\varphi+70\varphi^2)L & 0 & 54+252\varphi+252\varphi^2 & -(13+63\varphi+70\varphi^2)L \\ 0 & (22+77\varphi+70\varphi^2)L & (4+14\varphi+14\varphi^2)L^2 & 0 & (13+63\varphi+70\varphi^2)L & -(3+14\varphi+14\varphi^2)L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54+252\varphi+252\varphi^2 & (13+63\varphi+70\varphi^2)L & 0 & 156+588\varphi+504\varphi^2 & -(22+77\varphi+70\varphi^2)L \\ 0 & -(13+63\varphi+70\varphi^2)L & -(3+14\varphi+14\varphi^2)L^2 & 0 & -(22+77\varphi+70\varphi^2)L & (4+14\varphi+14\varphi^2)L^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m_2}{L(1+\varphi)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L(1-\varphi) & 0 & -36 & 3L(1-\varphi) \\ 0 & 3L(1-\varphi) & L^2(4+2\varphi+2\varphi^2) & 0 & -3L(1-\varphi) & L^2(2-2\varphi-\varphi^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L(1-\varphi) & 0 & 36 & -3L(1-\varphi) \\ 0 & 3L(1-\varphi) & L^2(2-2\varphi-\varphi^2) & 0 & -3L(1-\varphi) & L^2(4+2\varphi+2\varphi^2) \end{bmatrix}\mathbf{M}\mathrm{cpl}$$

$$= \frac{m_1}{1+\varphi}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Expression finale de la matrice de masse cohérente :

En regroupant les trois contributions, on obtient :

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_{m0}^{(u)} + \mathbf{M}_{m0}^{(w)} + \mathbf{M}_{m2}^{(\theta)} + \mathbf{M}_{m1}^{(u\theta)}$$

Les intégrales fondamentales sont :

$$m_0 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)dz$$

$$m_1 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)z\,dz$$

$$m_2 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)z^2\,dz$$

Pour un FGM non symétrique, I1≠0, et la matrice de masse complète devient :

$$M_e = \int_0^L \begin{bmatrix} N_w^T I_0 N_w & N_w^T I_1 N_\phi \\ N_\phi^T I_1 N_w & N_\phi^T I_2 N_\phi \end{bmatrix} dx$$

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons développé la formulation des éléments poutres FGM minces et épaisses selon les modèles de Bernoulli et Timoshenko, en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons également étudié les champs de déplacement, de déformation et de contrainte. L'interpolation des déplacements a permis de construire les matrices de rigidité adaptées, intégrant l'hétérogénéité du matériau, pour modéliser de manière précise le comportement structural des poutres fonctionnellement graduées.

CHAPITRE V : Validation et Analyse du comportement statique et vibratoire des poutres FGM

V.1 Introduction :

Ce chapitre présente une analyse détaillée des résultats numériques obtenus pour les poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sous différentes conditions de chargement et conditions aux limites. Dans ce travail, un programme Matlab des poutres FGM selon les théories de Bernoulli et de Timoshenko est développé.

Les simulations ont été réalisées en utilisant les théories classiques des poutres (Euler-Bernoulli et Timoshenko), avec une attention particulière portée sur l'influence du gradient matériau, de l'élancement géométrique (L/h), et du raffinement du maillage. Les résultats sont comparés à des références issues de la littérature pour valider la robustesse du modèle développé.

Les objectifs spécifiques de ce chapitre sont :

- Évaluer la convergence des solutions en fonction du nombre d'éléments finis.
- Comparer les théories CBT et TBT pour identifier les cas où les effets de cisaillement sont significatifs en analyse statique est dynamique.
- Analyser l'impact de l'indice de puissance (n) sur la rigidité et la flèche des poutres FGM.
- Discuter les implications pour la conception de structures FGM.

V.2 Validation numérique :

V.2.1 Exemple 1

On considère une poutre rectangulaire simplement appuyée, soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (métal) E_m= 70GPa et d'alumine (céramique) E_c= 380 GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law).

Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM simplement supportée avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=20, ce qui permet d'utiliser la théorie d'Euler-Bernoulli, le déplacement non-dimensionnel suivant est utilisé [31]:

$$w=100\left(\frac{E_m h^3}{q_0 L^4}\right) \qquad (V.1)$$

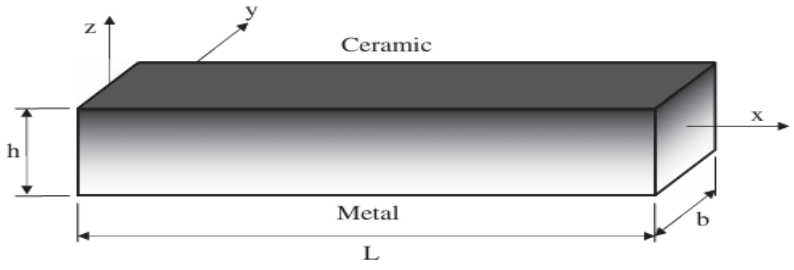


Figure V. 1: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM **[31].**

Tableau V.1 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S (CBT)	2	2.8783	4.3727	5.5919	7.0478	8.3801	9.3595
	6	2.8783	4.4323	5.7543	7.3611	8.7096	9.5779
	8	2.8783	4.4353	5.7632	7.3783	8.7276	9.5917
	10	2.8783	4.4319	5.7673	7.3862	8.7360	9.5973
	REF [32]	2.8783	4.4401	5.7746	7.4003	8.7508	9.6072

Tableau V. 2: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S (TBT)	2	2.8973	4.3988	5.6240	7.0894	8.4394	9.4329
	6	2.8973	4.4584	5.7864	7.4028	8.7689	9.6532
	8	2.8973	4.4614	5.7952	7.4199	8.7869	9.6652
	10	2.8973	4.4580	5.7993	7.4278	8.7953	9.6708
	REF [32]	2.8962	4.4645	5.8049	7.4415	8.8151	9.6879

Les tableaux (V.1) et (V.2) présentent les flèches non-dimensionnelles d'une poutre FGM simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie, calculées respectivement selon les théories des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) et de Timoshenko (TBT), pour différentes valeurs de l'indice de puissance (*n*). Une comparaison est effectuée avec des résultats de référence [32] pour différents indices de puissance (*n*) et nombres d'éléments finis.

1 Convergence des résultats en fonction du maillage

- Pour les deux théories (CBT et TBT), on observe une convergence des résultats lorsque le nombre d'éléments augmente.

- Avec 2 éléments, les résultats s'écartent légèrement des valeurs de référence, en particulier pour les indices de puissance élevés (n = 5, n = 10).

- Avec 10 éléments, les résultats se rapprochent les résultats de références, et 10 éléments sont jugés suffisantes pour une convergence satisfaisante pour tous les indices de puissance.

2 Influence de l'indice de puissance (*n*)

- L'indice de puissance (*n*) contrôle la variation des propriétés matérielles le long de l'épaisseur.

- Pour *n = 0*, la poutre est entièrement céramique, ce qui donne la flèche la plus faible (rigidité maximale).

- Lorsque (n) augmente, la proportion de métal (aluminium) augmente, réduisant la rigidité globale et augmentant la flèche. Par exemple, pour ($n = 10$), la flèche est environ 3,25 fois plus élevée qu'avec $n = 0$.

3 Comparaison entre les théories CBT et TBT

- La théorie de Timoshenko (TBT) prend en compte la déformation due au cisaillement, ce qui conduit à des flèches légèrement plus grandes, en particulier pour les indices (n) élevés (où l'influence du métal, plus souple, est plus marquée).

4 Validation avec les références

- Les résultats obtenus avec 10 éléments sont en excellent accord avec les références [32], tant pour CBT que pour TBT.

- Les écarts résiduels (moins de 1 %) peuvent être attribués :

- Aux différences de modélisation (maillage, intégration numérique).

- À l'approximation du gradient de propriétés matérielles dans les éléments finis.

Pour illustrer l'effet de l'indice de puissance (n) sur la réponse des poutres FGM sous charge uniforme, les déformées pour différents l'indice de puissance sont tracés sur la Fig. 1. Étant donné que la déférence entre les résultats des théories des poutres de Bernoulli et ceux de Timoshenko est négligeable pour les poutres minces. On peut voir qu'augmenter l'indice de loi de puissance (n) réduira la raideur des poutres FGM, et par conséquent, entraînera une augmentation des flèches. Cela est dû au fait que des valeurs plus élevées de l'indice de loi de puissance (n) correspondent à une portion plus élevée de métal par rapport à la partie céramique, rendant ainsi ces poutres FG plus flexibles.

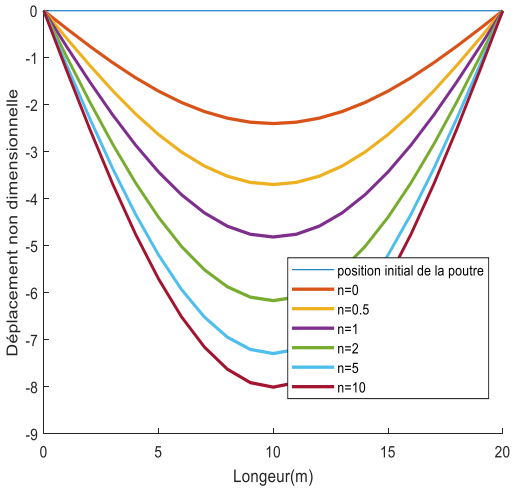


Figure V. 2: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S).

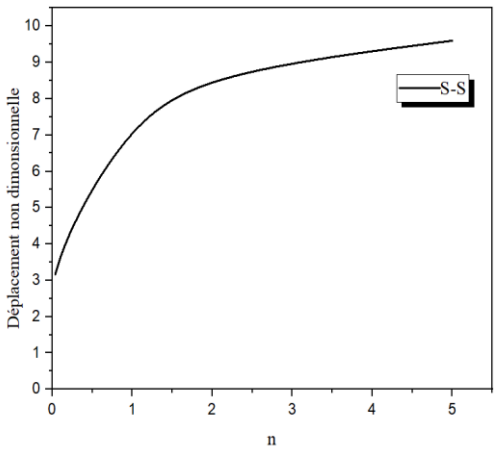


Figure V. 3: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)

V.2.2 Exemple 2

On considère une poutre de section rectangulaire (*b*x*h*), soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (*Al*) avec E_{Al}=70GPa, et Zircone (ZnO2) E_{ZnO2}=200GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law).

Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=16, ce qui permet d'exhiber la divergence de la théorie d'Euler Bernoulli.

Le déplacement sans dimension suivant est utilisé :

$$V=v\frac{E_{Al}}{f_0 L^4}\frac{h^3}{12}\times 10^3 \qquad [33]$$

Nous avons étudié les trois cas de conditions aux limites suivantes :

Simplement supporté (*S*-*S*)

Encastré - Libre (*C*-*F*)

Encastré - Encastré (*C*-*C*)

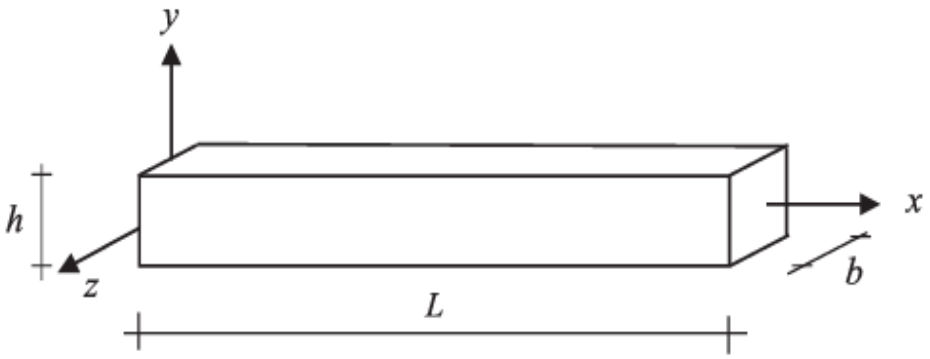


Figure V. 4 : Poutre FGM du avec différentes conditions aux limites **[34].**

Tableau V. 3: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*							
		0	0.2	0.5	1	2	5	10	100
S-S (CBT)	2	4.5573	5.2869	6.1921	7.2039	8.1488	9.0441	9.8442	12.7094
	6	4.5573	5.2954	6.2335	7.3033	8.2977	9.1622	9.9092	12.7099
	8	4.5573	5.2959	6.2361	7.3095	8.3071	9.1696	9.9133	12.7099
	10	4.5573	5.2962	6.2373	7.3124	8.3115	9.1731	9.9152	12.7099
	REF [34]	4.60169	5.35586	_	7.38255	8.39622	9.27500	10.02656	13.14844
C-F (CBT)	2	43.7500	50.8086	59.7078	69.7905	79.1772	87.5758	94.9185	122.0134
	6	43.7500	50.8430	59.8735	70.1884	79.7735	88.0483	95.1785	122.0154
	8	43.7500	50.8451	59.8839	70.2133	79.8108	88.0778	95.1947	122.0155
	10	43.7500	50.8461	59.8887	70.2247	79.8279	88.0915	95.2023	122.0156
	REF [34]	43.92750	51.13750	_	70.50500	80.16750	88.50000	95.64750	125.50750
C-C (CBT)	2	0.9115	1.0496	1.2007	1.3503	1.4942	1.7014	1.9097	2.5414
	6	0.9115	1.0581	1.2422	1.4500	1.6432	1.8194	1.9748	2.5418
	8	0.9115	1.0586	1.2448	1.4561	1.6527	1.8269	1.9788	2.5420
	10	0.9115	1.0589	1.2460	1.4589	1.6569	1.8303	1.9807	2.5420
	REF [34]	0.95589	1.11101	_	1.52893	1.74164	1.93229	2.09206	2.73112

Tableau V. 4 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*							
		0	0.2	0.5	1	2	5	10	100
S-S (TBT)	2	4.6027	5.2987	6.0617	6.8189	7.5511	8.6061	9.6597	12.8358
	6	4.6027	5.3000	6.0677	6.8329	7.5716	8.6228	9.6692	12.8359
	8	4.6027	5.3011	6.0728	6.8446	7.5888	8.6369	9.6773	12.8360
	10	4.6027	5.3016	6.0751	6.8498	7.5964	8.6430	9.6807	12.8360
	REF [34]	4.60169	5.35586	_	7.38255	8.39622	9.27500	10.02656	13.14844
C-F (TBT)	2	43.9317	50.5836	57.8674	65.0841	72.0420	82.0632	92.1109	122.5036
	6	43.9317	50.5951	57.9259	65.2192	72.2394	82.2243	92.2028	122.5043
	8	43.9317	50.6055	57.9752	65.3323	72.4045	82.3592	92.2798	122.5049
	10	43.9317	50.6102	57.9969	65.3830	72.4786	82.4196	92.3142	122.5051
	REF [34]	43.92750	51.13750	_	70.50500	80.16750	88.50000	95.64750	125.50750
C-C (TBT)	2	0.9569	1.1005	1.2587	1.4176	1.5744	1.8005	2.0208	2.6701
	6	0.9569	1.1007	1.2599	1.4203	1.5783	1.8037	2.0226	2.6701
	8	0.9569	1.1009	1.2608	1.4225	1.5815	1.8064	2.0241	2.6701
	10	0.9569	1.1010	1.2613	1.4236	1.5831	1.8077	2.0249	2.6701
	REF [34]	0.95589	1.11101	_	1.52893	1.74164	1.93229	2.09206	2.73112

1 Comparaison entre les théories de Bernoulli et Timoshenko

Dans cet exemple, la poutre est considérée épaisse car $\frac{L}{h} < 20$. On remarque que seule la théorie de Timoshinko converge vers la solution de référence. La poutre de Timoshenko donne une flèche supérieure à celui de Bernoulli, ce qui est attendu car la théorie de Timoshenko prend en compte l'effet du cisaillement transversal, augmentant la déformation.

Pour la poutre (Encastré - Libre), la différence entre CBT et TBT devient significative, surtout pour les valeurs intermédiaires de (n). La théorie de Timoshenko, en intégrant la déformation due au cisaillement, réduit la rigidité apparente de la poutre, ce qui explique cette différence.

2 Influence du gradient de matériau (paramètre n)

Pour n = 0 (100% Zircone), les flèches sont les plus faibles, car la zircone est plus rigide que l'aluminium. La différence entre CBT/TBT et la référence est minimale, validant les modèles pour les matériaux homogènes. Pour n = inf (100% Aluminium), les flèches sont maximales car l'aluminium est le plus faible. Pour les valeurs intermédiaires **(**$0.2 \leq n \leq 100$**),** La flèche augmente avec (n), mais de manière non linéaire, reflétant l'influence de la loi de puissance sur la répartition des propriétés mécaniques comme représenté sur les figures 5. 7 et 9.

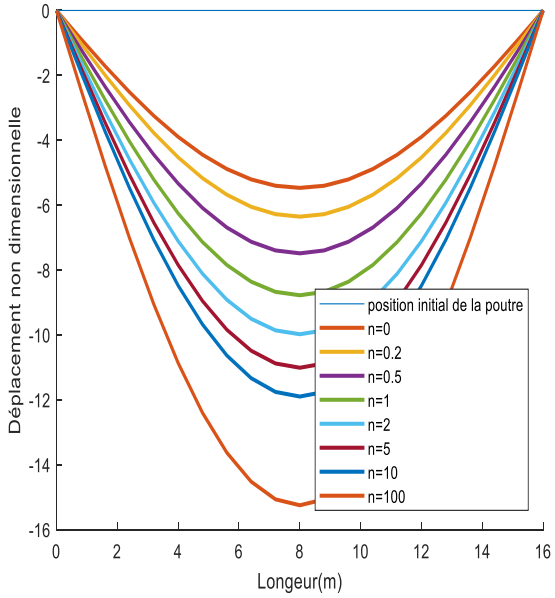


Figure V. 5: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S).

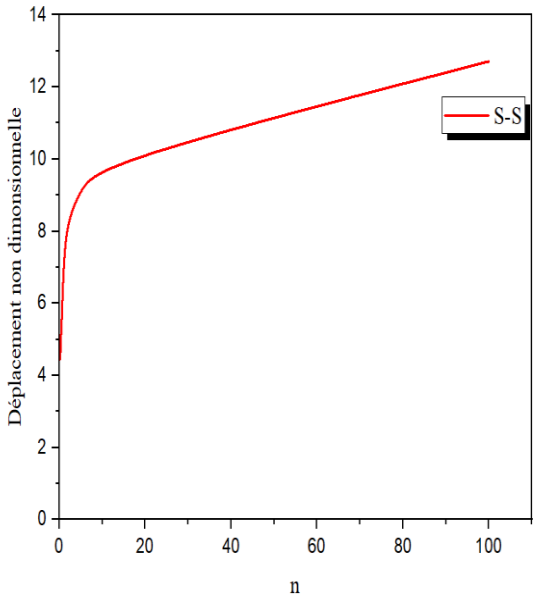


Figure V. 6: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)

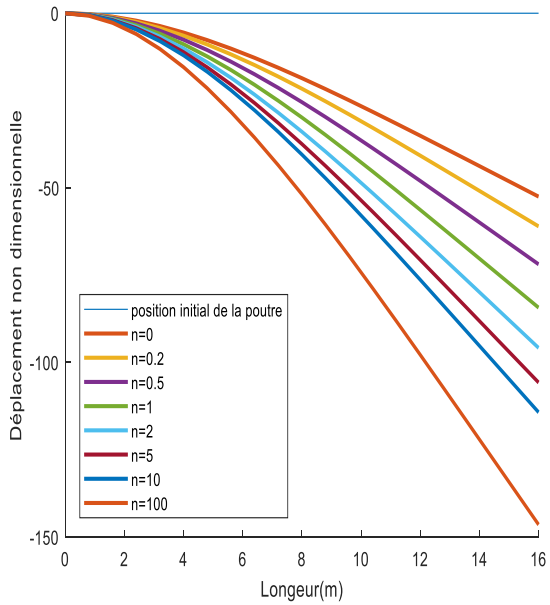


Figure V. 7: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F).

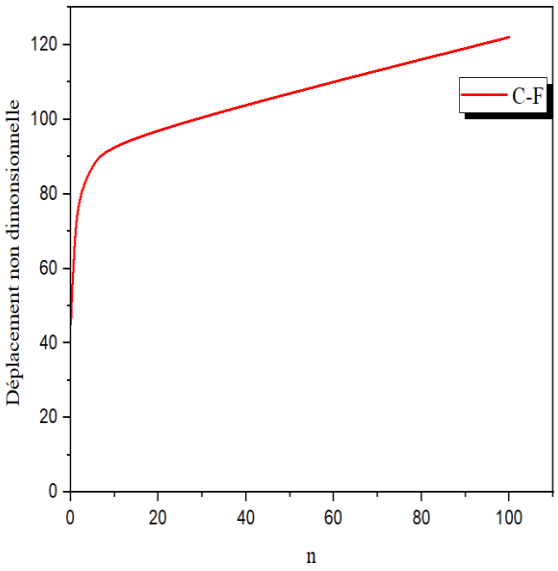
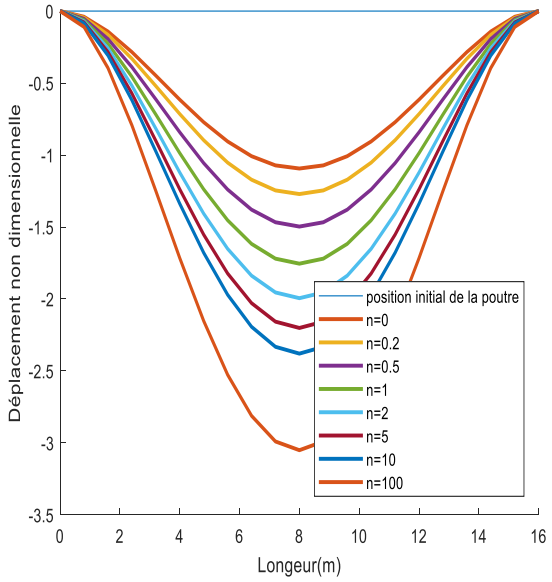
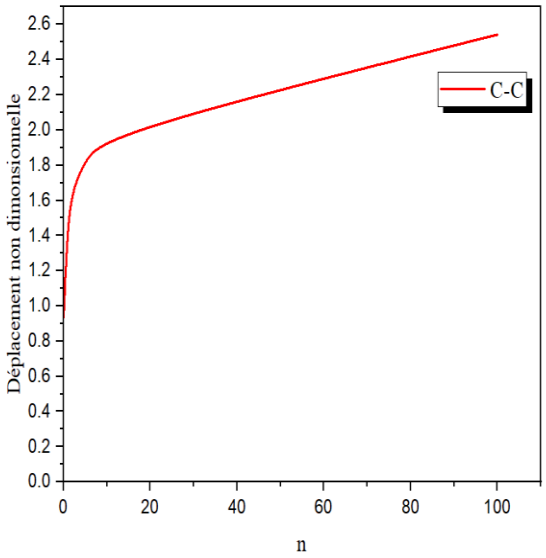


Figure V.8 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)



FigureV.9: Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)



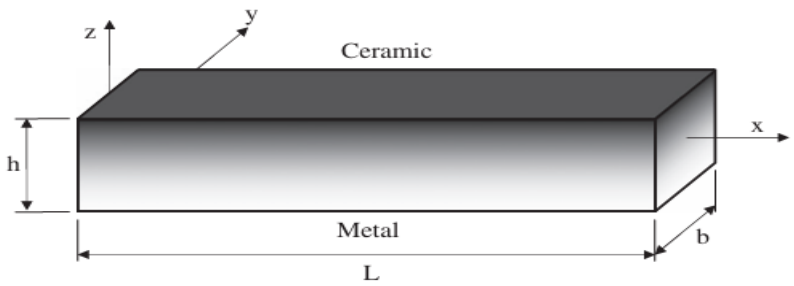
FigureV.10 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

V.2.3 Exemple 3

On considère une poutre rectangulaire simplement appuyée, soumise à une charge uniforme. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (métal) E_m= 70GPa et d'alumine (céramique) E_c= 380 GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law). Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=5, nécessitant l'utilisation de la théorie de Timoshenko (TBT) pour prendre en compte les effets de cisaillement transversal. Les résultats sont présentés sous forme de flèches non dimensionnelles et comparés à une référence [32].

Le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

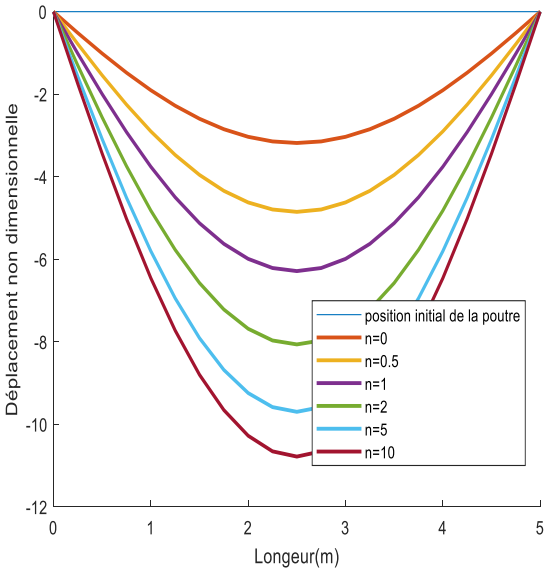
$$w=100\left(\frac{E_m h^3}{q_0 L^4}\right) \qquad [31]$$

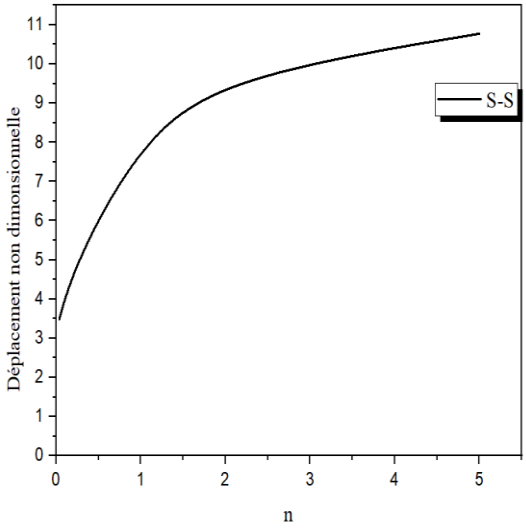


FigureV.11 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM **[31] .**

Tableau V. 5 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
S-S (TBT)		0	0.5	1	2	5	10
	2	3.1821	4.7898	6 .1049	7.7138	9.3289	10.5352
	6	3.1821	4.8447	6.2673	8.0298	9.6588	10.7554
	8	3.1821	4.8477	6.2760	8.0474	9.6761	10.7672
	10	3.1821	4.8491	6.2803	8.0562	9.6847	10.7730
	REF [32]	3.1654	4.8285	6.2594	8.0677	9.8281	10.9381





FigureV.12 : Déplacement transversal le long de la poutre (S-S). **FigureV.13 :** La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

Dans ce cas (Tableau V.5), la surface inférieure de la poutre FGM est en aluminium et la surface supérieure est en céramique (Alumine). La poutre FGM se transforme vers l'état complètement métallique à mesure que l'exposant de la loi de puissance augmente. C'est pourquoi les déplacements augmentent à mesure que l'exposant de la loi de puissance augmente. Sans surprise, les déplacements les plus bas sont obtenus avec $n = 0$ (état entièrement céramique), tandis que $n = inf$ (état entièrement métallique) donne les plus élevés. Nous comprenons d'après la section précédente que la poutre isotrope (n=0 et n=inf) ne traite pas le couplage « effet axial-flexion ». Le (tableau IV-5) montre que pour une poutre isotrope, il suffit deux éléments pour obtenir d'excellents résultats. Augmenter le nombre d'éléments ne donnera pas de résultats supplémentaires.

Le faible rapport L/h=5 (poutre épaisse) accentue l'effet du cisaillement transversal, justifiant l'usage de la théorie de Timoshenko. Si la théorie de Bernoulli (CBT) avait été utilisée, elle aurait sous-estimé la flèche car elle néglige la déformation due au cisaillement. La référence [32] valide que TBT est indispensable pour $L/h < 20$.

V.2.4 Exemple 4 :

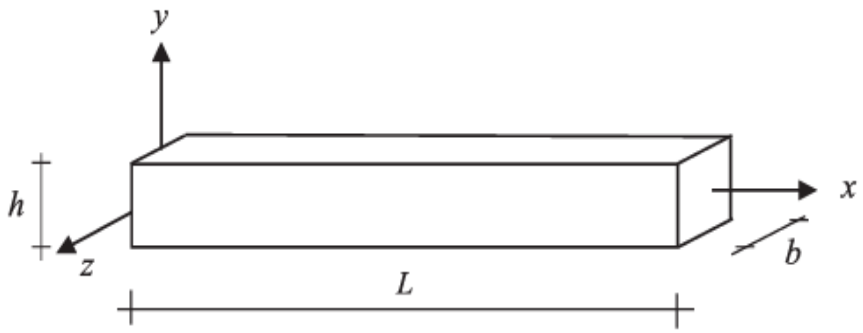
Les vibrations libres des poutres FGM :

Dans cet exemple, nous avons étudier les trois premières fréquences fondamentales d'un matériau à gradient fonctionnels Simplement supporté (*S*-*S*), formé d'aluminium (Al) avec E_{Al}=70GPa, et d'alumine (céramique) E_c= 380 GPa, pour différentes valeurs d'exposant de la loi de puissance n et du rapport (L/h)

Pour l'analyse dynamique la fréquence de vibration non-dimensionnelle est :

$$\bar{\omega} = (\omega\, L^2/h)\sqrt{(\rho_m/E_m)} \qquad [33]$$

Les résultats sont comparés à la référence [34] pour validation.



FigureV.14 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM**.**

Tableau V. 6: Comparaison des premières fréquences fondamentales sans dimension des faisceaux FGM par rapport à diverses valeurs d'exposant de loi de puissance.

L/H	*Mode*	*Théorie*	*Indice de puissance (n)*					
			0	0.5	1	2	5	10
5	1	Présent	5.1527	4.4115	3.9904	3.6364	3.4312	3.3137
		TBT [34]	5.152	4.411	3.990	3.634	3.431	3.313
		Présent	5.4012	4.5946	4.1520	3.7823	3.5953	3.4933
		CBT [34]	5.395	4.593	4.148	3.779	3.594	3.492
	2	Présent	17.8817	15.4616	14.0098	12.6412	11.5451	11.0247
		TBT [34]	17.881	15.461	14.009	12.640	11.544	11.024
		Présent	20.6191	17.5422	15.7993	14.3271	13.5885	13.2381
		CBT [34]	20.618	17.541	15.798	14.326	13.587	13.237
	3	Présent	34.2092	29.8499	27.0978	24.3161	21.7195	20.5575
		TBT [34]	34.208	29.849	27.097	24.315	21.718	20.556
		Présent	43.21002	36.8317	33.0292	29.7494	28.0893	27.4831
		CBT [34]	43.208	36.831	33.027	29.745	28.085	27.475
20	1	Présent	5.4603	4.6515	4.2051	3.8368	3.6510	3.5416
		TBT [34]	5.460	4.651	4.205	3.836	3.650	3.541
		Présent	5.4805	4.6651	4.2178	3.8381	3.6633	3.5549
		CBT [34]	5.477	4.664	4.2163	3.837	3.662	3.554
	2	Présent	21.5745	18.3989	16.6359	15.1627	14.3757	13.9279
		TBT [34]	21.573	18.396	16.634	15.161	14.374	13.926
		Présent	21.8539	18.5995	16.8227	15.3416	14.5987	14.1701
		CBT [34]	21.843	18.598	16.810	15.333	14.595	14.167
	3	Présent	47.6018	40.6576	36.7884	33.4732	31.5794	30.5387
		TBT [34]	47.595	40.653	36.769	33.468	31.570	30.534
		Présent	48.9015	41.6951	37.6264	34.3129	32.6428	31.6887
		CBT [34]	48.899	41.633	37.617	34.295	32.635	31.688

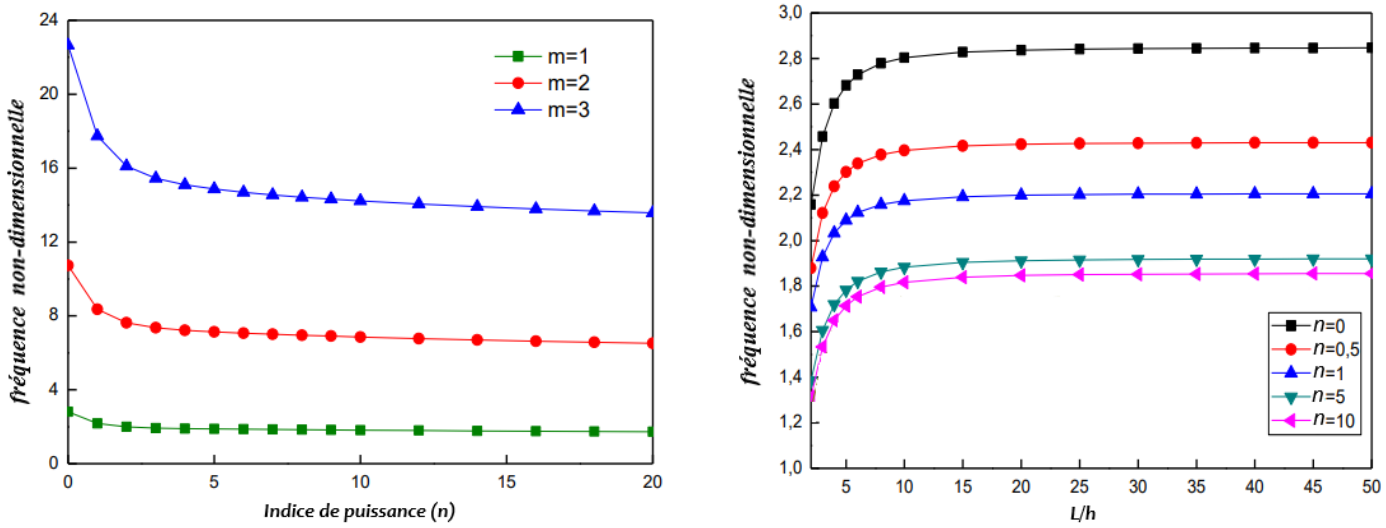
TAB V. 6: présente les trois premières fréquences adimensionnelles des poutres en FGM pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance n et du rapport d'élancement L/h. Les résultats sont en parfait accord avec les résultats publiés par Ould Larbi et al.

La faible différence observée entre les résultats obtenus par la présente théorie et ceux d'Ould Larbi et al. [34] est due à l'effet de l'étirement de l'épaisseur (ou stretching d'épaisseur) qui est omis par ces derniers. On peut également observer qu'il y a un remarquable

La différence entre les fréquences de la CBT (théorie classique des poutres) et celles des théories des poutres prenant en compte la déformation par cisaillement pour une poutre en FGM plus épaisse.

La variation des fréquences propres en fonction de l'indice de la loi de puissance et du rapport longueur/épaisseur est tracée sur la figure V.15. On peut observer sur cette figure que les fréquences propres diminuent lorsque l'indice de la loi de puissance augmente. Cela est dû au

fait qu'une valeur plus élevée de n correspond à une valeur plus faible de la fraction volumique de la phase céramique, ce qui rend ainsi les plaques plus souples Prédites pour le métal pur (n → ∞). Cela est dû au fait qu'une augmentation de la valeur de l'exposant de la fraction volumique entraîne une diminution de la valeur du module d'élasticité. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'exposant de la loi de puissance augmente. Par conséquent, comme on le sait également en vibrations mécaniques, les fréquences propres diminuent lorsque la rigidité d'une structure diminue.



(a) (b)

Figure V.15. Effet de l'indice de la loi de puissance (n) et du rapport d'élancement L/h sur la fréquence propre $\bar{\omega}$ d'une poutre en FGM

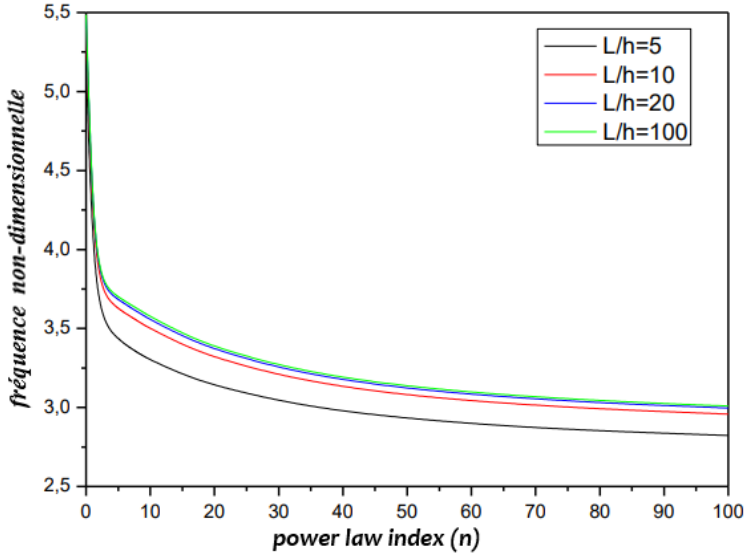


Figure V.16. Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la poutre FGM en fonction de l'indice de loi de puissance (n) et du rapport d'élancement L/h.

La figure V.16 montre la fréquence propre fondamentale adimensionnelle en fonction de l'exposant de la fraction volumique (ρ) pour différentes valeurs du rapport d'élancement L/h. On peut observer sur cette figure que les poutres entièrement en céramique (n) mènent à la fréquence la plus élevée. Cependant, les valeurs de fréquence les plus basses sont prédites pour le métal pur (n ➔ ∞). Cela est dû au fait qu'une augmentation de la valeur de l'exposant de la fraction volumique entraîne une diminution de la valeur du module d'élasticité. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'exposant de la loi de puissance augmente. Par conséquent, comme on le sait également en vibrations mécaniques, les fréquences propres diminuent lorsque la rigidité d'une structure diminue.

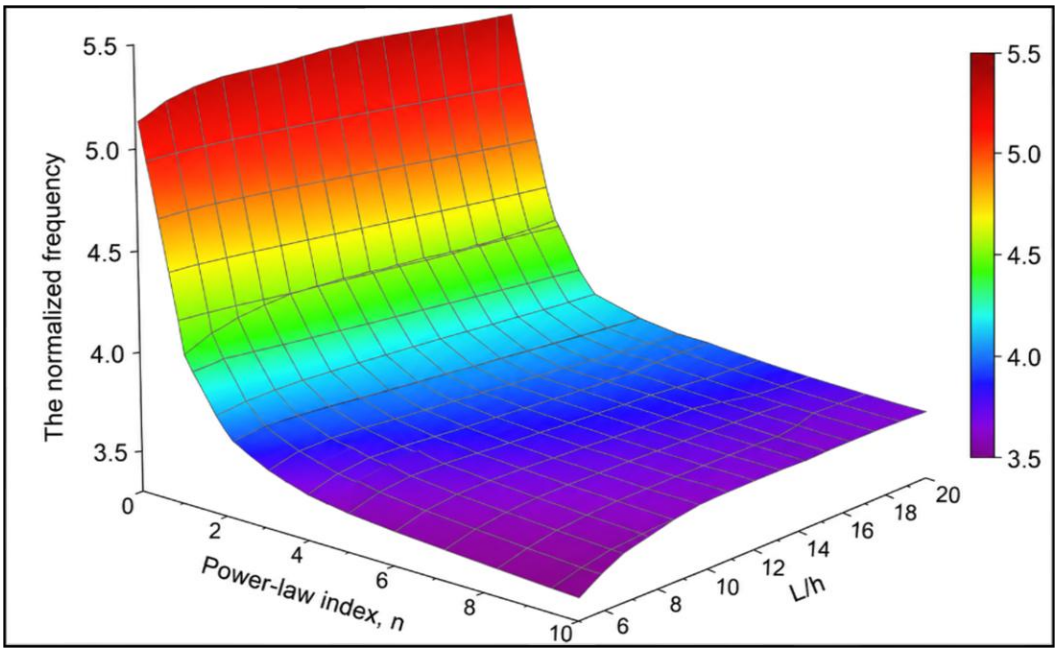


Figure V.17 La variation de la fréquence non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport d'élancement (L/h) et pour différentes valeurs de l'indice de puissance.

A partir de cette figure V.17, on constate que la fréquence non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ décroit avec l'augmentation de la valeur de l'indice de puissance (n). Cette diminution due à l'augmentation du pourcentage de céramique.

V.2.5 Exemple 5 :

Dans cet exemple, nous avons comparer les fréquences propres et modes de vibration obtenus par la théorie d'Euler-Bernoulli (sans cisaillement transversal) et la théorie de Timoshenko (avec cisaillement transversal), Avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law).

On considère une poutre de section rectangulaire (*b*x*h*), soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) formé de :

Propriété	Céramique	Métal
Module d'Young E (GPa)	151	70
Coefficient de Poisson ν	0,3	0,3
Densité ρ (kg/m³)	5000	2780

Pour l'analyse dynamique la fréquence de vibration non-dimensionnelle est :

$$\bar{\omega}=\omega L^2\sqrt{\frac{I_0}{E_m h^3}}\times 10^3 \qquad [35]$$

Nous avons étudié les Deux cas de conditions aux limites suivantes :

Simplement supporté (*S-S*)

Encastré - Encastré (*C-C*)

Les résultats sont comparés à une référence [35]

Tableau V.7. Étude de convergence en fonction du nombre d'éléments (NE) Conditions : S-S, n = 0, L/h = 50, Théorie de Timoshenko

Nombre d'éléments (NE)	Fréquence propre fondamentale (rad/s)
5	1,6458
10	1,5849
20	1,5703
40	1,5667
50	1,5662

Tableau V.8. Comparaison des fréquences adimensionnelles obtenues par la formulation Timoshenko et REF [35] (n = 0)

L/h	S-S (n = 0)		C-C (n = 0)	
	Présent	REF [35]	Présent	REF [35]
5	3,9339	3,9338	7,6364	7,6363
10	4,1181	4,1178	8,9025	8,9017
20	4,1695	4,1690	9,3380	9,3368
50	4,1843	4,1838	9,4736	9,4713

Tableau V.9. Effet des paramètres géométriques et de la distribution de matériau sur $\bar{\omega}$ au Condition S-S (Simplement Appuyé aux deux extrémités)

L/h		n = 0	n = 0,5	n = 1	n = 5	n = 100
5	Euler	4,1849	3,7368	3,5645	3,2755	2,8963
	Timoshinko	3,9346	3,5179	3,3513	3,0608	2,7197
	REF [35]	3,9338	3,5174	3,3509	3,0604	2,7191
10	Euler	4,1849	3,7368	3,5645	3,2755	2,8963
	Timoshinko	4,1185	3,6791	3,5083	3,2186	2,8499
	REF [35]	4,1178	3,6780	3,5072	3,2173	2,8486
20	Euler	4,1850	3,7368	3,5645	3,2755	2,8963
	Timoshinko	4,1696	3,7226	3,5507	3,2614	2,8847
	REF [35]	4,1690	3,7226	3,5507	3,2614	2,8847
50	Euler	4,1850	3,7369	3,5646	3,2755	2,8964
	Timoshinko	4,1847	3,7376	3,5671	3,2779	2,8987
	REF [35]	4,1838	3,7355	3,5632	3,2742	2,8951

Tableau V.10. Effet des paramètres géométriques et de la distribution de matériau sur $\bar{\omega}$ au Condition C-C (Encastré aux deux extrémités)

L/h		n = 0	n = 0,5	n = 1	n = 5	n = 100
5	Euler	9,4858	8,3888	7,9313	7,3154	6,5633
	Timoshinko	7,6369	6,8048	6,4255	5,8076	5,2651
	REF [35]	7,6363	6,8044	6,4250	5,8071	5,2644
10	Euler	9,4859	8,3890	7,9312	7,3155	6,5633
	Timoshinko	8,9022	7,8928	7,4586	6,8315	6,1517
	REF [35]	8,9017	7,8922	7,4579	6,8308	6,1514
20	Euler	9,4859	8,3890	7,9312	7,3155	6,5633
	Timoshinko	9,3371	8,2629	7,8109	7,1909	6,4585
	REF [35]	9,3368	8,2627	7,8106	7,1903	6,4579
50	Euler	9,4859	8,3890	7,9312	7,3155	6,5633
	Timoshinko	9,4717	8,3777	7,9202	7,3033	6,5538
	REF [35]	9,4713	8,3769	7,9194	7,3024	6,5528

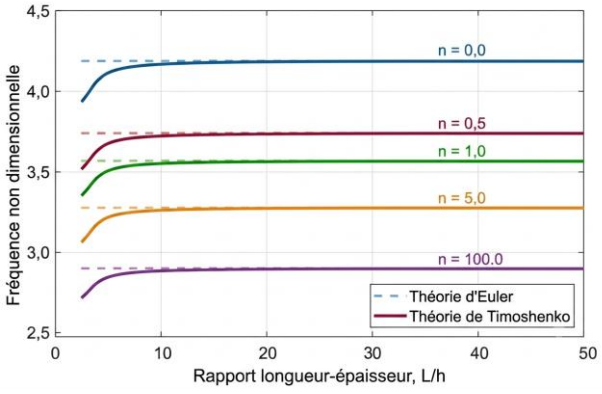


Figure V.18. Effet de L/h sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle (S-S).

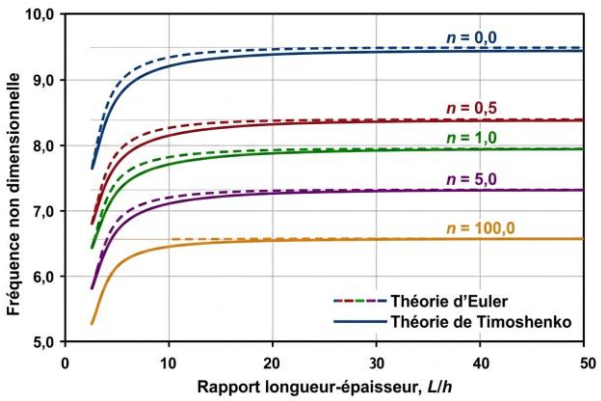


Figure V.19. Effet de L/h sur la fréquence Fondamentale non-dimensionnelle (C-C).

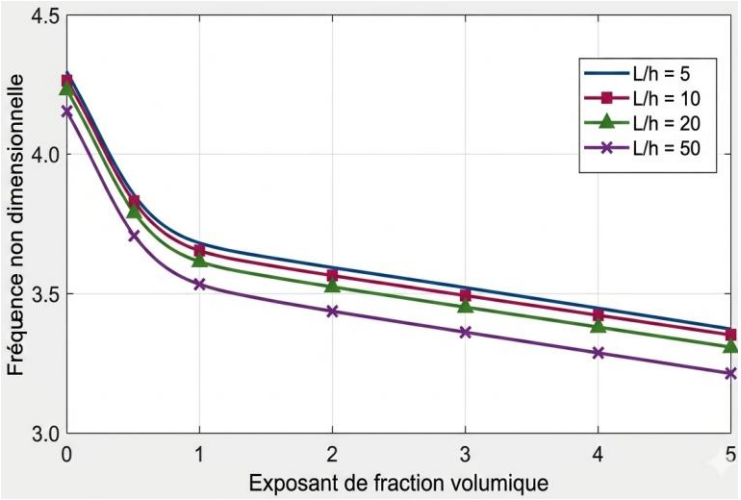


Figure V.20. Effet de l'exposant de fraction volumique sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (S-S).

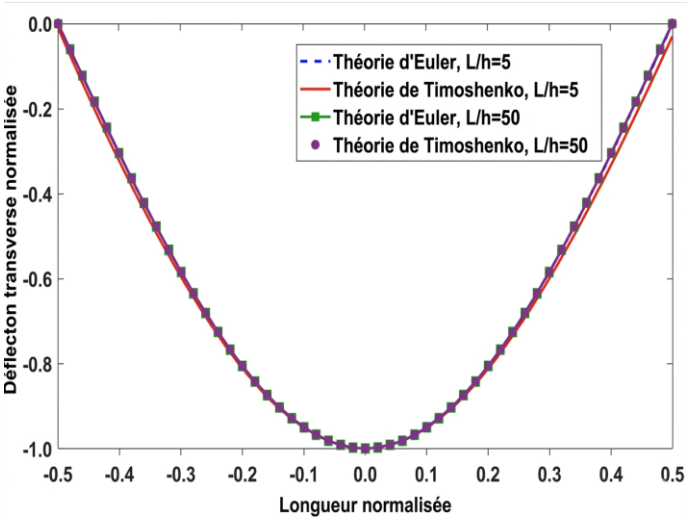


Figure V.21.Premier mode normalisé pour le faisceau S-S FGM (n = 1,0)

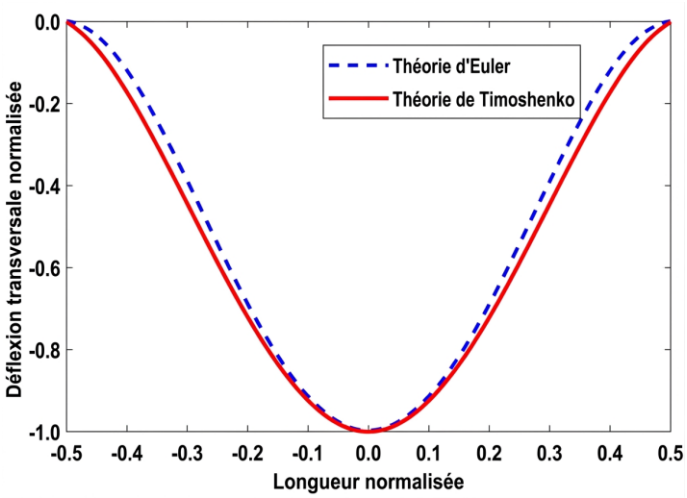


Figure V.22. Premier mode normalisé pour une poutre C-C FGM (n = 1, L/h = 5).

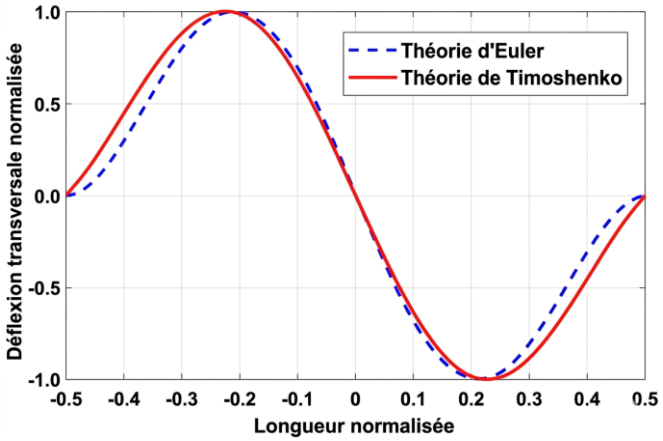
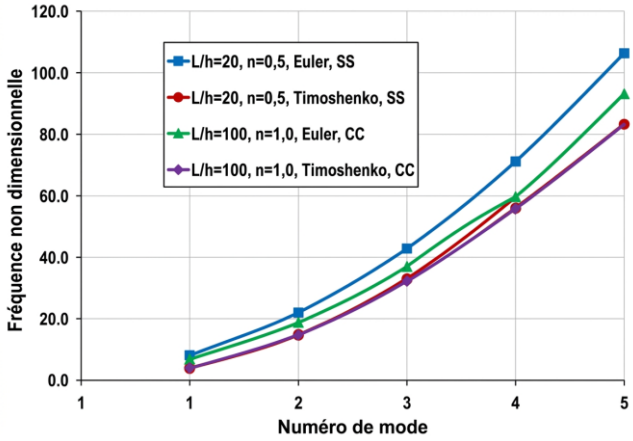


Figure V.23. Deuxième mode normalisé pour poutre C-C FGM (n =1, L/h = 5).



FigureV.24. Variation des fréquences Non-dimensionnelles pour différentes théories.

Dans ce cas, Pour les faibles valeurs de L/ h (poutres épaisses), les fréquences calculées par la théorie de Timoshenko sont nettement inférieures à celles d'Euler-Bernoulli. Cette différence provient de la prise en compte du cisaillement transversal qui augmente la flexibilité de la structure, lorsque L /h augmente, la théorie d'Euler suffit au premier mode, les modes d'ordre élevé deviennent rapidement sensibles au cisaillement. Pour les analyses vibratoires spectrales ou les études de fatigue impliquant plusieurs modes, la théorie de Timoshenko s'impose dès L/h inférieur à 20.
Ces résultats montrent que la théorie d'Euler-Bernoulli est suffisante pour les poutres minces, tandis que la théorie de Timoshenko devient indispensable pour les poutres épaisses.

Pour toute structure en FGM avec L/h inférieur à 25, la théorie de Timoshenko n'est pas une option, c'est une nécessité. Utiliser la théorie d'Euler-Bernoulli dans ces conditions revient à ignorer un mécanisme de déformation physiquement réel, avec un risque d'erreur qui peut dépasser 20 % sur les fréquences et modifier qualitativement les déformées. Pour les structures élancées (L/h > 50), la théorie classique reste pleinement valide et suffit largement, quelle que soit la composition du gradient fonctionnel.

V.3 Conclusion :

Ce chapitre a permis d'explorer le comportement mécanique des poutres FGM à travers des simulations numériques approfondies. Les principaux enseignements sont résumés ci-dessous:

- Les résultats convergent vers les solutions de référence avec l'augmentation du nombre d'éléments, validant la fiabilité du modèle.

- La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT) est convenable seulement pour les poutres minces ($L/h \geq 20$), mais elle sous-estime la flèche pour (L/h < 20).

- La théorie de Timoshenko (TBT) est indispensable pour les poutres épaisses $(L/h < 20)$, capturant correctement les effets de cisaillement.

- Les poutres FGM avec $(n \rightarrow 0)$ « dominance céramique » présentent une rigidité accrue, tandis que $(n \rightarrow \infty)$ « dominance métallique » augmente la flexibilité.

- L'étude de la réponse en vibration libre des poutres en FGM est réalisée sur la base des théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Cette méthode prend en compte à la fois la déformation par cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur à travers une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans le sens de l'épaisseur, et ce, sans introduire de facteur de correction de cisaillement.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale :

Ce mémoire a permis de développer et de valider un programme numérique écrit sous MATLAB, basé sur la méthode des éléments finis, pour l'analyse du comportement statique et vibratoire des poutres à gradient fonctionnel (FGM) minces et épaisses. Les formulations développées reposent sur les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, permettant ainsi de prendre en compte les différents effets mécaniques liés à la géométrie de la poutre et à la variation graduelle des propriétés matérielles.

Les résultats obtenus ont montré une bonne concordance avec les solutions analytiques et les résultats de référence disponibles dans la littérature, ce qui confirme la fiabilité et la robustesse des modèles numériques développés.

Les principaux résultats de cette étude peuvent être résumés comme suit :

- Les solutions numériques obtenues convergent vers les solutions de référence, confirmant la précision et la stabilité des formulations par éléments finis développées pour les poutres FGM.
- La théorie classique d'Euler-Bernoulli (CBT) fournit des résultats satisfaisants pour les poutres minces ($L/h \geq 20$), où les effets du cisaillement transverse sont négligeables. Cependant, son utilisation devient moins précise pour les poutres plus épaisses ($L/h < 20$), conduisant à une sous-estimation des déplacements et à une surestimation de la rigidité.
- La théorie de Timoshenko (TBT) s'avère indispensable pour l'étude des poutres épaisses ($L/h < 20$), puisqu'elle permet de prendre en compte les effets du cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle, assurant ainsi une meilleure représentation du comportement réel de la structure.
- L'indice de puissance (n) influence fortement la réponse statique et dynamique des poutres FGM. L'augmentation de cet indice modifie la répartition des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur, entraînant des variations significatives de la rigidité, des flèches et des fréquences propres de vibration. Les comportements obtenus se situent entre les deux cas extrêmes correspondant à une poutre entièrement céramique (($n = 0$)) et une poutre à dominante métallique (($n \rightarrow \infty$)).
- Les résultats de l'analyse vibratoire montrent que les fréquences naturelles dépendent fortement de la distribution des propriétés du matériau, des conditions aux limites, du rapport d'élancement et de l'indice de gradient. Cette sensibilité confirme l'importance de la prise en compte précise des propriétés FGM dans la conception des structures soumises à des sollicitations dynamiques.

En conclusion, cette étude démontre l'efficacité de la méthode des éléments finis pour la modélisation et l'analyse des poutres FGM, aussi bien dans le domaine statique que vibratoire. Les outils numériques développés constituent une base fiable pour l'étude de structures plus complexes à gradient fonctionnel.

Comme perspectives de recherche, plusieurs extensions peuvent être envisagées, notamment l'étude des vibrations libres et forcées avec amortissement, l'analyse du flambement et du post-flambement, la prise en compte des effets thermomécaniques, le développement de modèles basés sur des théories de déformation d'ordre supérieur, ainsi que l'optimisation des structures FGM en vue d'améliorer leurs performances mécaniques et dynamiques.

Références

[1] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (1999). Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[2] Mahmoudi, A. (2019). Analyse et modélisation du comportement mécanique des structures FGM. Thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie.

[3] Okamura, H. (1991). Fabrication techniques for functionally gradient materials. In Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan.

[4] Udupa, G., Rao, S. S., & Gangadharan, K. V. (2014). Functionally Graded Composite Materials: An Overview. Procedia Materials Science, 5, 1291–1299.

[5] Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). Functionally Graded Materials. Springer International Publishing, Cham.

[6] Jones, R. M. (1999). Mechanics of Composite Materials (2nd ed.). Taylor & Francis, Philadelphia.

[7] Boch, P., Chartier, T., & Huttepain, M. (1986). Tape casting of Al2O3/ZrO2 laminated composites. Journal of the American Ceramic Society, 69(8), C-191–C-192.

[8] Sadollah, A., Bahreininejad, A., Eskandar, H., & Hamdi, M. (2013). Mine blast algorithm: A new population-based algorithm for solving constrained engineering optimization problems. Applied Soft Computing, 13(5), 2592–2612.

[9] Abdizadeh, H., Ashraf Talesh, H. A., & Baharvandi, H. R. (1997). Thermal residual stresses and thermal fatigue in FGM ceramic/metal components. Journal of Materials Science, 32, 6229–6237.

[10] Zhu, H. X., Hobdell, J. R., & Windle, A. H. (2000). Effects of cell irregularity on the elastic properties of 2D Voronoi honeycombs. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49(4), 857–870.

[11] Narottam, P. B., & Mohan, J. R. (2011). Advances in Ceramic Armor, Bioceramics, and Porous Materials. John Wiley & Sons.

[12] Houari, M. S. A. (2011). Analyse statique et vibratoire des poutres composites FGM par une théorie affinée de cisaillement. Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, Algérie.

[13] Jin, Z. H., & Batra, R. C. (1999). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. Journal of Thermal Stresses, 19(4), 317–339.

[14] Kolahchi, R., Hosseini, H., & Esmailpour, M. (2016). Differential cubature and quadrature-Bolotin methods for dynamic stability of embedded piezoelectric nanoplates based on visco-nonlocal-piezoelasticity theories. Composite Structures, 157, 174–186.

[15] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. Journal of Applied Mechanics, 50(3), 609–614.

[16] Sallai, B. O. (2011). Analyse du comportement mécanique des poutres en matériaux composites à gradient de propriétés. Thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie.

[17] Elomari, A. (2011). Analyse numérique du comportement des poutres en béton armé renforcées par collage de plaques composites. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, Algérie.

[18] Coffignal, G., & Trouvat, J. L. (2001). Mécanique des structures — Éléments de cours et exercices résolus. Ellipses, Paris.

[19] Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine (Series 6), 41(245), 744–746.

[20] Lo, K. H., Christensen, R. M., & Wu, E. M. (1977). A high-order theory of plate deformation — Part 1: Homogeneous plates. Journal of Applied Mechanics, 44(4), 663–668.

[21] Ambartsumyan, S. A. (1969). Theory of Anisotropic Plates. Technomic Publishing, Stamford, Connecticut.

[22] Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. Composite Structures, 89(1), 94–101.

[23] Levinson, M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. Mechanics Research Communications, 7(6), 343–350.

[24] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. International Journal of Engineering Science, 29(8), 901–916.

[25] Afaq, K. S. (2003). Modélisation des structures composites par une nouvelle théorie à variables généralisées. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

[26] Boutagouga, D. (2020), "A formulation of membrane finite elements with true drilling rotation: The compatible triangular element", Engineering Computations, Vol. 37 No. 1, pp. 203-236.

[27] Tolba, M., & Boutagouga, D. (2026). Static and free vibration analysis of functionally graded material beams using a solid-like beam finite element formulation. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 54(1). https://doi.org/10.1080/15397734.2026.2677841

[28] Abuteir, B.W., Boutagouga, D. (2022) Free-vibration response of functionally graded porous shell structures in thermal environments with temperature-dependent material properties. Acta Mech 233, 4877–4901.

[29] Boutagouga, Djamel. (2017) A new enhanced assumed strain quadrilateral membrane element with drilling degree of freedom and modified shape functions. Int. J. Numer. Meth. Engng, 110: 573–600.

[30] Y. Debard, *Cours de flexion XY*, Institut Universitaire de Technologie du Mans, Département Génie Mécanique et Productique. [En ligne]. Disponible : http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html. [Consulté le : 2 juin 2025].

[31] Thai, H., & Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, *62*(1), 57–66.

[32] Li XF, Wang BL, Han JC. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. Arch Appl Mech 2010;80(10):1197–212.

[33] Ould L.L., Kaci A., Houari M.S.A., Tounsi A. (2013). An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, Mech. Based Des. Struct. Mach., Vol. 41, No. 4, pp. 421-433. DOI: 10.1080/15397734.2013.763713

[34] Zenkour A.M. (2013). A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates, *Appl. Math. Model.,* Vol. 37, No. 20-21, pp.

[35] ANANDRAO K. Sanjay, GUPTA R.K., RAMACHANDRAN P. et RAO G. Venkateswara, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams, Defence Science Journal, Vol. 62, No. 3, pp. 139-146, 2012.

[36] Book: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals by O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor