République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques

THÈSE
Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT EN SCIENCES
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème

Existence et non-existence de solutions pour des systèmes non-linéaires d'équations différentielles fractionnaires

Présenté Par :
TEBESSI Faouzi

Devant le jury :

HAOUAM Kamel	*Professeur*	*Univérsité de Tébessa*	*Président*
REBIAI Belgacem	*Professeur*	*Univérsité de Tébessa*	*Rapporteur*
BAHI Mohamed Cherif	*MCA*	*Univérsité de Tébessa*	*Co-Rapporteur*
BELLOUFI Mohammed	*Professeur*	*Université de Souk Ahras*	*Examinateur*
SALLAMI Badreddine	*Professeur*	*Université de Souk Ahras*	*Examinateur*
MESBAHI Amer	*MCA*	*Université de Souk Ahras*	*Examinateur*
ZERAOULIA Elhadj	*Professeur*	*Univérsité de Tébessa*	*Invité*

Date de soutenance : ...../...../.....

Table des matières

Introduction **7**

1 Notions préliminaires **12**

1.1 Définitions et concepts de base 12

1.1.1 Espace des fonctions intégrables L^p 12

1.1.2 Espace de Banach 14

1.1.3 Espace des fonctions continues 15

1.1.4 Espace des fonctions absolument continues 17

1.2 Fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire 20

1.2.1 Fonction Gamma 20

1.2.2 Fonction Beta 27

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler 30

1.3 Intégration fractionnaire 34

1.3.1 Equation intégrale d'Abel 38

1.3.2 Intégrales fractionnaires 44

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville 47

1.4.1 Intégration et différenciation fractionnaire comme opérations réciproques . 50

1.5 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo 52

1.5.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo 54

2 Transformée de Laplace et les équations différentièlles d'ordre fractionnaires 57

2.1 Transformée de Laplace 57

2.1.1 Convergence 58

2.1.2 Propriétés 61

2.1.3 Transformée de Laplace et le calcul fractionnaire 64

2.1.4 Transformée inverse de Laplace 67

2.2 Convolution 67

2.2.1 Définition et propriétés 67

2.2.2 Transformée de Laplace d'une convolution 71

3 Etude d'un système d'équations différentielles fractionnaires 74

3.1 Introduction 74

3.1.1 Inégalité de Gronwall 74

3.1.2 Application de la transformée de Laplace 78

3.2 Existence Locale 80

3.3 Explosion de la solution 86

3.3.1 Introduction 86

3.3.2 Explosion de la solution 90

4 Etude d'un Système d'équations différentielles fractionnaires amorties 96

4.1 Introduction 96

4.2 Application de la transformée de Laplace 98

4.3 Existence Locale 100

4.4 Explosion de la solution 107

4.5 Conclusion 110

.

Remerciements

Ce travail de recherche est l'aboutissement de plusieurs années d'efforts, de questionnements et d'apprentissage. Il n'aurait pas été possible sans le soutien et l'encouragement de nombreuses personnes, à qui j'exprime ici ma profonde gratitude.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Rebiai Belgacem**, et à mon co-directeur de thèse, Monsieur le Docteur **Bahi Mohhamed Cherif**, pour leurs accompagnement précieux, leurs patiences et leurs conseils avisés tout au long de cette recherche. Leurs expertises et leurs rigueurs scientifiques ont été une source d'inspiration constante.

Tout d'abord, mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur **Haouam Kamel**, Président du jury, pour l'honneur qu'il me fait en dirigeant cette soutenance. Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur **Zeraoulia El Hadj** pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur **Belloufi Mohammed**, Monsieur le Professeur **Sallami Badreddine et** Monsieur le Docteur **Mesbahi Amer** , tous examinateurs de cette thèse et enseignants à l'Université Mohamed-Chérif Messaadia - Souk Ahras, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour leurs remarques pertinentes qui ont enrichi cette étude.

Un immense merci à l'ensemble de mes collègues et amis. Je n'oublie pas non plus mes proches, et en particulier ma famille, qui m'a toujours soutenu avec amour et patience tout au long de ce parcours. Leur confiance en moi a été une source de motivation inestimable.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse et à mon épanouissement personnel et scientifique.

Tebessi Faouzi

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'étude de l'existence locale et de comportement d'explosion des solutions de deux systèmes d'équations différentielles fractionnaires avec terme source non linéaire. Le terme source non local est une convolution d'une exponentielle avec un noyau. L'analyse des systèmes dynamiques complexes utilisant la mémoire et les propriétés héréditaires fournies par les équations différentielles fractionnaires est essentielle pour divers domaines scientifiques et d'ingénierie, ce qui rend l'étude de son application critique.

Les revendications d'existence locale et d'unicité sont prouvées avec le théorème du point fixe de Banach. La transformée de Laplace est utilisée comme aide, ce qui offre la représentation de solutions douces. De plus, sous des conditions initiales, les solutions globales non triviales explosent. Le système résolu peut être vu comme une généralisation d'un certain nombre de systèmes variés d'équations avec des solutions qui explosent en un temps fini.

Les résultats obtenus étendent les connaissances sur les systèmes dynamiques fractionnaires et fournissent des méthodes d'analyse que ces classes plus générales d'équations fractionnaires non linéaires devraient résoudre. .

Mots clés : Dérivées fractionnaires, Solutions douces, Existence local, Théorème du point fixe de Banach, Explosion de la solution, Transformée de Laplace.

Abstract

This thesis looks into the local existence and blow-up behavior of two systems of fractional differential equations with nonlinear source term . The nonlocal sources term are a convolution of an exponential with a kernel. The analysis of complex dynamical systems using memory and hereditary properties as provided by fractional differential equations is highly essential for various scientific and engineering fields, making the study of its application critical.

Local existence and uniqueness claims are proved with the Banach fixed-point theorem. The Laplace transform is used for aids, which offers the representation of mild solutions. Moreover, under initial conditions, the nontrivial global solutions blow-up . The solved system is able to be seen as a generalization of a number of varied systems of equations with solutions that blows up in a finite time.

The results obtained extend knowledge on fractional dynamical systems and provides methods of analysis that these more general classes of nonlinear fractional equations are expected to be solved.

Keywords : Fractional Derivatives, Mild solutions, Local Existence, Banach fixed-point theorem, Blow-up, Laplace transform.

الملخص

هذه الأطروحة تناقش وجود الحل المحلي وانفجار حلول نظامين من المعادلات التفاضلية الكسرية ذات حد مصدري غير خطي. مصطلح المصدر غير المحلي هو عبارة عن مجموعة من الأسي مع النواة. يعد تحليل الأنظمة الديناميكية المعقدة باستخدام الذاكرة والخصائص الوراثية التي توفرها المعادلات التفاضلية الكسرية أمرًا ضروريًا لمختلف المجالات العلمية والهندسية، مما يجعل دراسة تطبيقه أمرًا بالغ الأهمية.

تم إثبات ادعاءات الوجود المحلي والوحدانية باستخدام نظرية النقطة الثابتة لباناخ . يتم استخدام تحويل لابلاس كمساعد، والذي يقدم تمثيل الحلول الضعيفة. علاوة على ذلك، وفي ظل الظروف الأولية، تنفجر الحلول الكلية غير التافهة. يمكن اعتبار النظام الذي تم حله بمثابة تعميم لعدد من أنظمة المعادلات المتنوعة ذات الحلول التي تنفجر في وقت محدد.

تعمل النتائج التي تم الحصول عليها على توسيع المعرفة بالأنظمة الديناميكية الكسرية وتوفير طرق التحليل التي يجب أن تحلها هذه الفئات العامة من المعادلات الكسرية غير الخطية. .

الكلمات المفتاحية: المشتقات الكسرية، الحلول الضعيفة، الوجود المحلي، نظرية باناخ للنقطة الثابتة، انفجار الحل، تحويل لابلاس.

Introduction

Les systèmes physiques sont généralement modélisés par des équations différentielles avec des conditions initiales et des conditions aux limites. Pour les systèmes présentant une sorte de mémoire, les équations différentielles locales ne sont pas appropriées. En particulier dans la description du comportement d'amortissement des milieux viscoélastiques, des équations différentielles fractionnaires sont suggérées à la place.

Les dérivées fractionnaires sont devenues un outil fréquemment utilisé en physique héréditaire. En particulier, le comportement d'amortissement des milieux viscoélastiques peut être modélisé avec seulement quelques paramètres en remplaçant les ordres différentiels entiers des termes d'amortissement par des ordres fractionnaires. D'un point de vue analytique, cette approche présente plusieurs inconvénients, notamment la disparition de la propriété essentielle de semi-groupe pour les dérivées d'ordre entier, ainsi que la perte de l'invariance par translation dans le temps et enfin, elle ne spécifie pas d'espace de fonctions admissible pour les solutions. Le calcul fractionnaire principalement utilisé via les transformées de Laplace associées aux conditions initiales se heurte en outre à des difficultés concernant l'interprétation physique de telles conditions. Il a été demontré que tout changement dans le passé de la fonction d'entrée d'un système d'ordre fractionnaire modifie le futur de la solution. Le passé de tels systèmes ne peut donc pas être représenté par un ensemble fini de conditions initiales locales.

Les dérivées fractionnaires sont un concept généralisation des dérivées d'ordre entier, et bien qu'elles aient plusieurs propriétés intéressantes, elles n'ont pas toutes les propriétés des dérivées classiques, en particulier celle du semi-groupe. Cette propriété des dérivées d'ordre entier repose

sur le fait que si D^n est l'opérateur de dérivation d'ordre entier, alors, on a :

$$D^n D^m = D^{n+m}.$$

Cela signifie que les opérateurs de dérivées d'ordre entier forment un semi-groupe. Ainsi, en appliquant successivement d'opérateurs de dérivation d'ordres entiers est équivalent à un opérateur de dérivation d'un ordre plus élevé. Les dérivées fractionnaires, en revanche, sont définies pour des ordres non entiers. Une manière courantes pour définir les dérivées fractionnaires est à travers l'intégrale de Riemann-Liouville ou l'opérateur de Caputo. Toutefois, ces opérateurs ne satisfont pas toujours la propriété de semi-groupe. En effet, pour des dérivées fractionnaires, les relations suivantes ne sont généralement pas satisfaites :

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

Si on déplace une fonction $u(t)$ dans le temps de t_0, on trouve que la dérivée de cette fonction par rapport au temps, est celle de $u(t)$, mais décalée dans le temps :

$$\frac{d}{dt}u(t-t_0) = \frac{d}{dt}u(t).$$

De manière similaire, les dérivées d'ordre entier satisfont l'invariance de translation dans le temps pour n'importe quel ordre n :

$$D^n u(t-t_0) = D^n u(t).$$

Ce que cela implique, c'est que l'opérateur de dérivation ne se réside pas dans la position spécifique de t au sein du temps, mais bien uniquement en fonction elle-même.

La perte de l'invariance de translation dans le temp pour les dérivées fractionnaires, peut être expliquée par plusieurs aspects clés de ces dérivées :

Définition par des intégrales de convolution : La dérivée fractionnaire $D^\alpha f(t)$ dépend de toute l'histoire de la fonction et pas uniquement de sa valeur actuelle puisque elle est définie par une convolution, qui implique une opération intégrale sur la fonction $f(t)$ sur un intervalle étendu,

généralement de 0 à t.

Par exemple, l'opérateur ${}^{RL}D^{\alpha}_{0/t}$ est donné par une intégrale de type :

$$D^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds,$$

qui dépend de l'intervalle $[0,t]$, et lorsque on applique une translation temporelle, cette dépendance change. La fonction $u(t-t_0)$ implique un changement dans les bornes de l'intégrale et perturbe ainsi l'invariance de translation.

La nature intrinsèquement non locale des dérivées fractionnaires et l'empreinte de la mémoire de la fonction sur les valeurs passées, entrainent qu'elles ne conservent pas l'invariance de translation dans le temps. L'opération de dérivation fractionnaire implique une dépendance à toute l'histoire de la fonction, ce qui rompt la propriété simple d'invariance de translation observée dans le cas des dérivées d'ordre entier. Ce phénomène est lié à la non-symétrie des opérateurs fractionnaires et à leur structure d'intégrale convolutive, qui est sensible à l'historique de la fonction et aux décalages temporels.

Effet de mémoire : Les dérivées fractionnaires prennent en considération des valeurs passées de la fonction, ce qui signifie qu'une translation dans le temps affecte l'ensemble de l'historique de la fonction. Ainsi, $D^{\alpha}f(t-t_0)$ ne sera pas simplement $D^{\alpha}f(t)$ déplacé dans le temps, car la fonction a une mémoire des valeurs passées qui est modifiée par la translation. Ausssi et contrairement aux dérivées entières, l'opérateur de dérivation fractionnaire n'est pas symétrique par rapport à une translation dans le temps. En effet, appliquant l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville à $f(t-t_0)$, on a :

$$D^{\alpha}f(t-t_0) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^{t-t_0} (t-t_0-s)^{-\alpha}f(s+t_0)\,ds.$$

La dérivée $D^{\alpha}f(t-t_0)$ diffère de celle de $D^{\alpha}f(t)$, car les bornes d'intégration sont affectées par t_0, et la fonction $f(s+t_0)$ introduit une dépendance supplémentaire au décalage temporel.

En résumé, l'opération de dérivation fractionnaire entraine une dépendance à toute l'histoire

de la fonction, ce qui rompt la propriété simple d'invariance de translation observée dans le cas des dérivées d'ordre entier. Ce phénomène est lié à la non-symétrie des opérateurs fractionnaires et à leur structure d'intégrale convolutive, qui est sensible à l'historique de la fonction et aux décalages temporels.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les solutions locales et l'explosion des solutions globales de deux systèmes d'équations différentielles fractionnaires avec terme source non linéaire.

Cette thèse est organisée en quatre chapitres.

Le premier chapitre, introduit les notions fondamentales des espaces L^p, de Banach et des fonctions absolument continues ainsi que les bases du calcul fractionnaire. Nous y définissons également les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires, ainsi que certaines fonctions spéciales qui leur sont associées.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude approfondie d'une notion centrale : la transformée de Laplace, ses propriétés de convergence, ainsi que ses applications en calcul fractionnaire. Nous y rappelons également le concept de convolution et examinons son lien avec la transformée de Laplace.

Le troisième chapitre, étudie le premier problème

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho) = \int_0^{\rho} G_1(\rho - s)\, e^{\vartheta(s)} ds, \rho > 0 \\ \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho) = \int_0^{\rho} G_2(\rho - s)\, e^{w(s)} ds, \ \rho > 0, \end{cases}$$

avec

$$w(0) = w_0 > 0, \vartheta(0) = \vartheta_0 > 0.$$

Notre approche repose sur le théorème du point fixe de Banach, qui nous permet d'établir l'existence locale et l'unicité de la solution. De plus, nous démontrons que cette solution présente un phénomène d'explosion en temps fini.

Le quatrième chapitre, Dans ce chapitre, nous généralisons notre étude au système suivant,

incluant des opérateurs différentiels supplémentaires :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho) + \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_1} w(\rho) = \int_0^{\rho} G_1(\rho - s) e^{\vartheta(s)} ds, \rho > 0 \\ \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho) + \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_2} \vartheta(\rho) = \int_0^{\rho} G_2(\rho - s) e^{w(s)} ds, \ \rho > 0, \end{cases}$$

avec

$$w(0) = w_0 > 0, \vartheta(0) = \vartheta_0 > 0.$$

La méthodologie employée reprend les étapes du chapitre 3, combinant l'analyse par point fixe et l'étude du comportement asymptotique des solutions..

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Définitions et concepts de base

Ce chapitre sera consacré aux définitions de base et aux concepts fondamentaux liés au espaces et au calcul fractionnaire

1.1.1 Espace des fonctions intégrables L^p

Assumons que (X, Σ, μ) est un espace mesuré et $\leq 1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1 *Un ensemble $A \subset X$ est appelé ensemble nul si sa fonction caractéristique est une fonction nulle.*

Remarque 1.1 *Si $B \subset A$ et $\mu(A) = 0$ alors B est aussi un ensemble nul.*

Définition 1.2 (*Egalité presque partout*) *Soient u et w deux fonctions définies sur X. On dit que u est égal à w presque partout, si l'ensemble des $x \in X$ avec $u(x) \neq w(x)$ est de mesure nulle. On a*

$$u \sim w \Leftrightarrow u = w.p.p.$$

Définition 1.3 *L'espace $L^p(X)$ contient les classes d'équivalence de fonction mesurable $u : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\int_X |u|^p \, d\mu < \infty,$$

où deux fonctions mesurables sont equivalente si elles sont égales $\mu - p.p.$ On définit :

$$\|u\|_p = \left(\int_X |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.2 $\left(L^p(X), \|.\|_p \right)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.4 *Soit $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur $(X, \digamma, \mu)$. On définit le supremum essentiel de u sur X comme suit :*

$$ess \sup u = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : u(x) > a\}) = 0\}.$$

Equivalent à

$$ess \sup u = \inf \{\sup v : v = u, \ \mu - p.p\},$$

alors, le supremum essentiel d'une fonction depend uniquement sur son classe d'équivalence $\mu - p.p.$ On dit que u est essentiellement bornée sur X si

$$ess \sup u < \infty.$$

Définition 1.5 *L'espace $L^\infty(X)$ comporte des classe d'équivalence p.p de fonctions mesurables essentiellement bornée $u : X \to \mathbb{R}$ avec une norme*

$$\|u\|_{L^\infty(X)} = ess \sup |u|.$$

Définition 1.6 *On dit que la fonction $u \in L^p_{loc}(X)$ si, pour tout compact $K \subset X$, $u_{\chi_K} \in L^p(X)$.*

Les estimations et les inégalités sont des atouts essentiels dans les espaces L^p. Les plus élémentaires d'entre elles sont

Proposition 1.1 *Soient $p, q \in [0, \infty]$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

$\cdot$ *(Inégality de Hôlder) Si $u \in L^p$ et $v \in L^q$, on a : $uv \in L^1$ et*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

· (*Inégality de Minkowski*) *Pour* $u, v \in L^p$ *, on a :* $u + v \in L^p$ *et*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p .$$

Théorème 1.1 (*Théorème de Fubini*) [9] *Soit* $\Sigma = [a, b] \times [c, d]$*. Si* u *est intégrable sur* Σ*, la fonction*

$$\vartheta(\rho) = \int_c^d u(\rho, s)\, ds,$$

est défini presque partout dans $[a, b]$*, intégrable sur* $[a, b]$*, et on a*

$$\begin{aligned} \int_\Sigma u(\rho, s)\, dtds &= \int_a^b \vartheta(\rho)\, d\rho \\ &= \int_c^d \int_a^b u(\rho, s)\, dsd\rho. \end{aligned}$$

1.1.2 Espace de Banach

Admettons que $(X, \|.\|)$ est espace normé.

Définition 1.7 *Une suite* $(x_n)_n$ *dans* X *est dite convergente vers* $x \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \|x_n - x\| < \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Définition 1.8 *Une suite* $(x_n)_n$ *dans* X *est de Cauchy si*

$$\forall \xi > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \|x_n - x_m\| < \xi, \text{ pour tout } n, m \geq n_0.$$

Définition 1.9 $(X, \|.\|)$ *est complet si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente.*

Remarque 1.3 $(X, \|.\|)$ *est un espace métrique de distence induite* d *définit par*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Définition 1.10 *On dit que l'espace $(X, \|.\|)$ est de Banach, s'il est complet par rapport à la distence d dérivée de sa norme.*

Lemme 1.1 *Soit W un sous-espace fermé de X. X est de Banach, implique W est de Banach.*

Preuve Dans W, construisons une suite $(\vartheta_n)_n$ de Cauchy. $(\vartheta_n)_n$est de Cauchy dans X, donc converge vers $\vartheta \in X$. Par conséquence, $\vartheta \in W$. Ainsi, on conclut que $(W, \|.\|)$ est un espace de Banach. ■

Théorème du point fixe

Assumons que $(X, \|.\|)$ est espace de Banach et $u : X \longrightarrow X$.

Définition 1.11 *u est contractante si*

$$\exists k \in]0,1[: \|u(x) - u(y)\| \leq k \|x - y\|, \qquad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Théorème 1.2 (*Théorème du point fixe*) [6] *Supposons que u est contractante, alors*

$$\exists! x^* \in X \textit{ tel que} : u(x^*) = x^*.$$

1.1.3 Espace des fonctions continues

Définition 1.12 *L'espace $C([\alpha, \beta])$, est constitué de toutes les fonctions réelles ou complexes $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui sont continues sur $[a, b]$.*

Théorème 1.3 *L'espace $(C([\alpha, \beta]), \|.\|_\infty)$, est de Banach, où*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |u(t)|.$$

Preuve Définisson, dans $C([\alpha, \beta])$, une suite $(u_n)_n$ de Cauchy. On a, pour tout $\xi > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\|u_n - u_m\|_\infty = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |u_n(t) - u_m(t)| < \xi, \qquad \text{pour tout } m, n \geq n_0, \tag{1.1}$$

et alors, on a

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty < \xi, \qquad \text{pour tout } t \in [\alpha, \beta].$$

La suite $(u_n(t))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, pour t fixé dans $[\alpha, \beta]$, ce qui entraine que, $u_n(t)$ converge vers une fonction $u(t)$. De (1.4), on a pour $n \geq n_0$ et $t \in [\alpha, \beta]$:

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \xi, \qquad \forall m \geq n_0.$$

Le passage à la limite, quand $m \to \infty$, donne

$$|u_n(t) - u(t)| < \xi, \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Donc

$$\|u_n - u\|_\infty < \xi,$$

ce qui signifie que u_n converge uniformément vers u. En utilisant le théorème le la limite uniforme, on conclut que :

$$u \in C([\alpha, \beta]).$$

■

Théorème 1.4 [33] *Assumons que u est continue sur $[\alpha, \beta]$ et différentiable sur $]\alpha, \beta[$, donc*

$$u(\beta) - u(\alpha) = u'(\eta)(\beta - \alpha), \qquad \eta \in]\alpha, \beta[.$$

Lemme 1.2 *Soient $w, \vartheta \in C([\alpha, \beta])$. Pour $\mu > 0$ et $\lambda = 1 - \mu$, on a*

$$\left|e^{w(s)} - e^{\vartheta(s)}\right| \leq e^{\lambda w(s) + \mu \vartheta(s)} |w(s) - \vartheta(s)|. \tag{1.2}$$

Preuve Le théorème 1.4, entraine qu'il existe $c(s) \in]w(s), \vartheta(s)[$, telle que

$$e^{w(s)} - e^{\vartheta(s)} = e^{c(s)}(w(s) - \vartheta(s)), \qquad s \in [a, b].$$

En prenant les valeurs absolues :

$$\left|e^{w(s)}-e^{\vartheta(s)}\right|=e^{c(s)}\left|w\left(s\right)-\vartheta\left(s\right)\right|.$$

Aussi, il existent $\mu>0$ et $\lambda=1-\mu$, tels que

$$c\left(s\right)=\lambda w\left(s\right)+\mu\vartheta\left(s\right).$$

On conclut que

$$\left|e^{w(s)}-e^{\vartheta(s)}\right|\leq e^{\lambda w(s)+\mu\vartheta(s)}\left|w\left(s\right)-\vartheta\left(s\right)\right|.$$

■

1.1.4 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.13 (*Fonction à variation bornée*) *Soient* $u:I=[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ *et* P *une partition de* I*, définie par*

$$P=\left\{\alpha=x_{0}<x_{1}<\cdots<\beta=x_{n}\right\}.$$

La $P-$*variation de* u *sur* I *est*

$$V_{I,P}\left(u\right)=V_{P}\left(u\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|u\left(x_{i}\right)-u\left(x_{i-1}\right)\right|.$$

Notez que si $P\subset Q$, alors, par l'inégalité triangulaire, $V_{I,P}\left(u\right)\leq V_{I,Q}\left(u\right)$. La variation totale de u sur I est le nombre réel

$$V_{I}\left(u\right)=\sup_{P}V_{I,P}\left(u\right),$$

où le supremum est pris sur tous les partitions P de I. On dit que u a une variation bornée sur I si $V_{I}\left(u\right)<\infty$. On désigne l'ensemble de toutes les fonctions à variation bornée sur I par $BV\left(I\right)$.

Proposition 1.2 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$.

$i-$ *u est monotone et bornée sur* $\mathbb{R}$*, entraine u a une variation bornée.*

ii− $u \in BV(I)$,*entraine* u *est bornée.*

iii− $u, w \in BV(I)$, *et* $c \in \mathbb{R}$, *alors :* $u+w, cu, uw, |u| \in BV(I)$.

iv− *Si* $u \in BV(I)$, *alors* u *a au plus un nombre dénombrable de discontinuités.*

Définition 1.14 *u est dite absolument continue sur I, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

pour toute famille finie d'intervalles $[\alpha_k, \beta_k] \subset I$ deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |u(\beta_k) - u(\alpha_k)| < \delta.$$

On dénote, l'espace de ces fonctions absolument continue par $AC(I)$.

Remarque 1.4 *i*− *La continuité absolue sur un intervalle I dépend du comportement de la fonction sur des sous-intervalles de I .*

ii $- u, w \in AC(I)$, *entraine :* $u+w, cu, |u| \in AC(I)$, *où* $c \in \mathbb{R}$, .

Proposition 1.3 *[16] Soit* $u \in (AC[\alpha, \beta], \mathbb{R})$. *On a*

− *u est uniformément continue sur $[\alpha, \beta]$,*

− *u est à variation bornée sur $[\alpha, \beta]$.*

Théorème 1.5 *Considérons* $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. u' *existe et continue sur* $[\alpha, \beta]$ *équivalent à* $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *existe et continue, telle que*

$$u(\rho) = u(a) + \int_{\alpha}^{\rho} w(\tau)\, d\tau, \qquad \text{pour tout } \rho \in [\alpha, \beta],$$

et de plus : $u' = w$.

Remarque 1.5 *L'existence d'une dérivée continue implique que la fonction est absolument continue.*

L'affaiblissement de cette condition en exigeant que u soit simplement absolument continue donne la version suivante du théorème.

Théorème 1.6 *[34] Soit $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. $u \in AC[\alpha, \beta]$ si et seulement s'il existe $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction sommables et vérifie*

$$u(\rho) = u(a) + \int_{\alpha}^{\rho} w(\tau)\, d\tau, \qquad \text{pour tout } \rho \in [\alpha, \beta],$$

et u' existe et $u' = w.p.p.$

Remarque 1.6 *On a :*

$$u(\rho) \in AC(I) \Leftrightarrow u(\rho) = c + \int_{a}^{\rho} \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{1.3}$$

avec $\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(\tau)|\, d\tau < \infty$.

Donc, les fonctions absolument continues ont une dérivée intégrable $u'(t)$ presque partout. L'inverse de cette affirmation n'est cependant pas vrai, c'est-à-dire que la continuité absolue ne découle pas de l'existence d'une dérivée sommable presque partout ; par exemple, des fonctions dont l'intégrale de la dérivée ne reconstitue pas la fonction elle-même en raison de singularités.

Définition 1.15 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $AC^n(I)$, est l'espace des fonctions $u(t)$ telles que $u^{(k-1)} \in AC(I)$, pour $k = 1, 2, \cdots, n$.*

Lemme 1.3 *L'espace $AC^n(I)$ se compose seulement des fonctions, qui sont représentées sous la forme*

$$u(\rho) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^{\rho} (\rho - \tau)^{n-1} \varphi(\tau)\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\rho - \alpha)^k, \tag{1.4}$$

où $\varphi(\tau) \in L_1(\alpha, \beta)$, c_k des constantes .

Notons que

$$\varphi(t) = u^{(n)}(t), c_k = \frac{u^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

1.2 Fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire

1.2.1 Fonction Gamma

Euler proposa une formule pour la fonction analytique'interpolant la factorielle chaque fois que l'argument est un entier.

Définition 1.16 *La fonction* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(-\log(t)\right)^{x-1} dt,$$

est appelée fonction Gamma, ou intégrale d'Euler du second ordre.

Par des changements élémentaires de variables, cette définition historique prend la forme la plus usuelle, en effet, posant $u = -\log(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= -\int_{\infty}^{0} u^{x-1} e^{-u} du \\ &= \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Par un simple changement de variables, on obtient d'autres formes de la fonction Gamma, comme suit :

– En posons $t = u^2$, on obtient

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du. \tag{1.5}$$

– En posons $e^{-t} = u$, on obtient

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^{x-1} du. \tag{1.6}$$

Définition 1.17 *Pour* $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.7}$$

Proposition 1.4 *La fonction* $\Gamma(z)$ *est convergente pour tout* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Proposition 1.5 *On a*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0. \tag{1.8}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \left[-\rho^x e^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty \rho^{x-1} e^{-\rho} d\rho \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

■

La fonction Gamma est étendu par continuité analytique à tous les nombres réels sauf les entiers non positifs, $x \notin \{\{0\} \cup \mathbb{Z}^-\}$. La question qui peut être posée est de savoir comment la fonction Gamma est calculée sur les non-entiers négatifs étant donné que l'intégrale qui la définisse ne converge pas pour eux, la manière est d'utiliser l'intégrale d'Euler pour les nombres positifs et d'étendre le domaine aux nombres négatifs en se basons sur la relation fonctionnelle de base pour la gamma par inversion,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Par exemple, si x est compris entre $-1 < x < 0$, on réécrit (1.8) comme

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad x > -1, x \neq 0, \tag{1.9}$$

et on utilise le côté droit à des fins de calcul. Également, (1.9), implique

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = -\infty, \\ \lim_{x\to -1^+} \Gamma(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = -\infty. \end{aligned}$$

Si $(x+1)$ est toujours un nombre négatif, nous pouvons remplacer x par $(x+1)$ dans (1.9) pour obtenir

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+2)}{x+1}, \qquad x > -1, x \neq 0. \tag{1.10}$$

Ainsi,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}, \qquad x > -2, x \neq 0, -1.$$

La dernière formule, donne

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} \Gamma(x) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = +\infty, \\ \lim_{x \to -2^+} \Gamma(x) &= \lim_{x \to -2^+} \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = +\infty. \end{aligned}$$

Ce processus, dérive la formule

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)...(x+k-1)}, k = 1, 2, 3, ... \tag{1.11}$$

qui définit la fonction gamma sur l'intervalle $x > -k$ (avec $x \neq 0, 1, 2, ..., -k+1$) en termes de fonction gamma avec argument positif.

Remarque 1.7 *Deux valeurs de l'argument x d'intérêt fondamental pour les fonctions Gamma sont :*

$$x = 1 \ et \ x = \frac{1}{2}.$$

Pour $x = 1$, la fonction Gamma devient simplement l'intégrale d'une exponentielle décroissante :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, en utilisant la substitution $t = u^2$, la fonction Gamma devient l'intégrale d'une

distribution gaussienne sur un domaine infini

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Lorsque l'argument de la fonction Gamma est un demi-entier positif, donné par l'application $x \to n+\frac{1}{2} > 0$, *la fonction gamma se simplifie comme suit*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2n-1)\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^2}(2n-1)(2n-3)\,\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2^n}\left[(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Exemple 1.1 *On a*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^3}\left[(2\times 3-1)(2\times 3-3)(2\times 3-5)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^3}(5\times 3\times 1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{15}{2^3}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Remarque 1.8 *Cependant, si l'argument de la fonction Gamma est un demi-entier négatif ; on utilise la relation* (1.11) .

Exemple 1.2 *On a*

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

aussi

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+4\right)}{-\frac{7}{2}\left(-\frac{7}{2}+1\right)\left(-\frac{7}{2}+2\right)\left(-\frac{7}{2}+3\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{7}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{16}{105}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Remarque 1.9 *On peut aussi donner une valeur approchée de* $\Gamma(x)$, *en appliquant les relations* (1.8) *et* (1.9) *et en se basant sur les valeurs approchée de* $\Gamma(x)$ *pour* $1 \leq x \leq 1.99$ *ci-dessous :*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.0000	0.9943	0.9888	0.9835	0.9784	0.9735	0.9687	0.9642	0.9597	0.9555
1.1	0.9514	0.9474	0.9436	0.9399	0.9364	0.9330	0.9298	0.9267	0.9237	0.9209
1.2	0.9182	0.9156	0.9131	0.9108	0.9085	0.9064	0.9044	0.9025	0.9007	0.8990
1.3	0.8975	0.8960	0.8946	0.8934	0.8922	0.8912	0.8902	0.8893	0.8885	0.8879
1.4	0.8873	0.8868	0.8864	0.8860	0.8858	0.8857	0.8856	0.8856	0.8857	0.8859
1.5	0.8862	0.8866	0.8870	0.8876	0.8882	0.8889	0.8896	0.8905	0.8914	0.8924
1.6	0.8935	0.8947	0.8959	0.8972	0.8986	0.9001	0.9017	0.9033	0.9050	0.9068
1.7	0.9086	0.9106	0.9126	0.9147	0.9168	0.9191	0.9214	0.9238	0.9262	0.9288
1.8	0.9314	0.9341	0.9368	0.9397	0.9426	0.9465	0.9487	0.9518	0.9551	0.9584
1.9	0.9618	0.9652	0.9688	0.9724	0.9761	0.9799	0.9837	0.9877	0.9917	0.9958

Exemple 1.3 *On a par exemple*

$$\begin{aligned}
\Gamma(0.42) &= \frac{\Gamma(1+0.42)}{0.42} = \frac{\Gamma(1.42)}{0.42} \simeq \frac{0.8864}{0.42} \simeq 2.1105, \\
\Gamma(-2.33) &= \frac{\Gamma(-1.33)}{-2.33} = \frac{\Gamma(-0.33)}{(-2.33)(-1.33)} = \frac{\Gamma(0.33)}{(-2.33)(-1.33)(-0.33)} \\
&= \frac{\Gamma(1.33)}{(-2.33)(-1.33)(-0.33)(1.33)} \simeq \frac{0.8934}{-2.3526} \simeq -0.3797, \\
\Gamma(4.6) &= (3.6)\Gamma(3.6) = (3.6)(2.6)\Gamma(2.6) = (3.6)(2.6)(1.6)\Gamma(1.6) \\
&\simeq (14.976)(0.8935) \simeq 13.381,
\end{aligned}$$

Un grand nombre de définitions ont été données pour la fonction Gamma. Bien qu'elles décrivent la même fonction, il n'est pas tout à fait simple de prouver leur équivalence.

Au lieu de devoir trouver une preuve spécialisée pour chaque formule, il serait hautement souhaitable de disposer d'une méthode générale permettant d'identifier la fonction Gamma sous une forme particulière. Une façon de prouver l'équivalence serait de trouver une équation différentielle qui caractérise cette fonction. Plusieurs fonctions spéciales en mathématiques appliquées se présentent comme des solutions d'équations différentielles, dont les solutions sont uniques. Cependant, la fonction Gamma ne semble satisfaire aucune équation différentielle simple. Otto Hölder a prouvé en 1887 que la fonction Gamma ne satisfait au moins aucune équation différentielle algébrique en montrant qu'une solution à une telle équation ne pouvait satisfaire la formule de récurrence de la fonction Gamma. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Hölder.

La constante $\pi = 3,14159...$ représente le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Le nombre π, comme de nombreuses autres constantes mathématiques fondamentales telles que $e = 2,71828...$, est un nombre transcendantal. π et e possèdent tous deux un nombre infini de chiffres qui ne semblent pas avoir de modèle ordonné dans leur disposition. Les nombres transcendants ne peuvent pas être exprimés comme la racine d'une équation algébrique qui ne contient que des nombres rationnels. En général, transcendant signifie non algébrique.

Bien que les nombres $\sqrt{2}$ et π.sont irrationnel car ils ne peuvent pas être exprimés comme une fraction,.$\sqrt{2}$ n'est pas transcendant, alors que π est à la fois transcendant et donc irrationnel.

Une fonction transcendante ne satisfait aucune équation polynomiale dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes, contrairement à une fonction algébrique, qui satisfait une telle équation. Une fonction transcendante $f(x)$ ne peut pas être exprimée comme une combinaison finie d'opérations algébriques ; utilisant uniquement des rationnels ; appliquée à x. Les exemples incluent les fonctions $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, e^x et toutes les fonctions les contenant. De telles fonctions ne peuvent être exprimées en termes algébriques que sous forme de séries infinies.

La fonction Gamma n'est pas la seule façon pour étendre la fonction factorielle aux nombres positifs réels non nuls. Par exemple, les fonctions de la forme $\cos(2m\pi x)\,\Gamma(x)$, où m est un entier non nul donnent

$$\begin{aligned}\cos(2m\pi(x+1))\,\Gamma(x+1) &= x\cos(2m\pi(x+1))\,\Gamma(x)\\ &= x\cos(2m\pi x)\,\Gamma(x),\end{aligned}$$

ainsi, elles remplient l'équation fonctionnelle. Aussi, la fonction proposée par Hadamard

$$H(x)=\frac{1}{\Gamma(1-x)}\frac{d}{dx}\log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}\right),$$

vérifie

$$H(n+1)=n!,\qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

En principe, il existe un nombre infini de possibilités, puisque nous pouvons tracer n'importe quelle courbe passant par les points $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,6)$, $(4,24)$, $(5,120)$, ..., et d'assumer qu'elle représente une fonction qui relie des factorielles à des valeurs entières. On cherche alors une condition qui implique qu'une telle fonction ne peut être que $\Gamma(x)$.

Harald Bohr et Johannes Mollerup ont montré que la fonction Gamma est l'unique fonction positive et logarithmiquement convexe pour x positif, solution à la relation de récurrence factorielle et dont la valeur à 1 est 1 (une fonction est logarithmiquement convexe si son logarithme est convexene). Le théorème de Bohr-Mollerup est utile car il est relativement facile de prouver la convexité logarithmique pour n'importe laquelle des différentes formules utilisées pour définir la fonction Gamma. Pour aller plus loin, au lieu de définir la fonction Gamma par une formule particulière,

nous pouvons choisir les conditions du théorème de Bohr-Mollerup comme définition

Théorème 1.7 (*Bohr-Mollerup*) *[13] Si* $u :]0, \infty[\to]0, \infty[$ *est une fonction qui satisfait :*

(i) $u(1) = 1$,

(ii) $u(x+1) = xu(x)$,

(iii) u *est logarithmiquement convexe,*

alors, $u(x) = \Gamma(x)$, *pour tout* $x \in]0, \infty[$.

1.2.2 Fonction Beta

Une fonction utile de deux variables est la fonction bêta ; c'est ce qu'on appelle l'intégrale Eulérienne du premier type.

Définition 1.18 *La fonction Beta est introduite par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, x > 0, y > 0. \qquad \text{(I)}$$

ce qu'on appelle l'intégrale Eulérienne du premier type.

La fonction Gamma a fréquemment, éclipsé la fonction Bêta, en partie peut-être parce qu'on peut l'évaluer en termes de la fonction gamma.

En faisant le changement de variable $u = 1 - t$ dans (I), la propriété de symétrie est obtenue,

$$B(x,y) = B(y,x).$$

Proposition 1.6 *On a*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0, y > 0.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du\int_0^\infty w^{y-1}e^{-w}dw \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{x-1}w^{y-1}e^{-(u+w)}dudw.\end{aligned}$$

Posons

$$u = r\cos^2\theta, w = r\sin^2\theta,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{x+y-1}\left(\cos^2\theta\right)^{x-1}\left(\sin^2\theta\right)^{y-1}e^{-r}2\sin\theta\cos\theta d\theta dr \\ &= \int_0^\infty r^{x+y-1}e^{-r}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^{x-1}\left(\sin^2\theta\right)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta dr \\ &= \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \Gamma(x+y)B(x,y),\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 1.4 *Pour $x, y > 0$, on a*

$$B(x,y) = 2\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta.$$

Preuve On a

$$\Gamma(x+1)\Gamma(y+1) = \int_0^\infty \tau^x e^{-\tau}d\tau\int_0^\infty \eta^y e^{-\eta}d\eta.$$

Pour $\tau = u^2$ et $\eta = v^2$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)\Gamma(y+1) &= 4\int_0^\infty u^{2x+1}e^{-u^2}du\int_0^\infty v^{2y+1}e^{-v^2}dv \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2\right)}u^{2x+1}v^{2y+1}dudv.\end{aligned}$$

En posant

$$u = r\cos^2\theta, w = r\sin^2\theta,$$

il resulte

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)\Gamma(y+1) &= 4\int_0^\infty r^{2x+2y+3}e^{-r^2}dr\int_0^{2\pi}\left|(\cos\theta)^{2x+1}(\sin\theta)^{2y+1}\right|d\theta \\ &= 4\int_0^\infty r^{2(x+y+1)+1}e^{-r^2}dr\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2x+1}(\sin\theta)^{2y+1}d\theta\end{aligned}$$

En substitutiant $t = r^2$ et $dt = 2rdr$, dans la première intégrale, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)\Gamma(y+1) &= 4\int_0^\infty t^{x+y+1}e^{-t}dt\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2x+1}(\sin\theta)^{2y+1}d\theta \\ &= 2\Gamma(x+y+2)\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2x+1}(\sin\theta)^{2y+1}d\theta,\end{aligned}$$

donc

$$2\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2x+1}(\sin\theta)^{2y+1}d\theta = B(x+1,y+1).$$

■

Lemme 1.5 *On a*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y), \qquad x,y>0.$$

Cette relation est appelée l'équation fonctionnelle de la fonction Bêta.

Preuve On a

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \\ &= \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} \\ &= \frac{x}{x+y}B(x,y). \end{aligned}$$

■

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler

Depuis quelques décennies, la fonction transcendantale spéciale connue sous le nom de fonction de Mittag-Leffler a attiré une attention croissante des chercheurs en raison de son rôle clé dans le traitement des problèmes liés aux équations intégrales et différentielles d'ordre fractionnaire.

La fonction $E_\alpha(z)$ tire son nom du grand mathématicien suédois Gösta Magnus Mittag-Leffler qui l'a définie, en 1903, par une série de puissance. En 1899, Mittag-Leffler commença la publication d'une série d'articles sous le titre commun "Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène"publiés principalement dans Acta Mathematica. Les premiers articles de cette série étaient basés sur trois rapports présentés par lui en 1898 à l'Académie suédoise des sciences de Stockholm. Sa recherche était liée à la question suivante

Soit $k_0; k_1; ...$ une suite de nombres complexes pour lesquels

$$\lim_{\nu\to\infty} |k_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{r} \in \mathbb{R}^+,$$

est finie. $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, est le domaine de convergence de $FC(z) = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + ...$ Il détermine une fonction analytique à valeur unique dans le disque D_r.

Les questions discutées étaient :

· Déterminer le domaine maximal sur lequel la fonction $FC(z)$ possède une continuation analytique à valeur unique.

· Trouver une représentation analytique de la branche à valeur unique correspondante.

Abel avait proposé d'associer une fonction entière à la fonction $FC(z)$,

$$F_1(z) = k_0 + \frac{k_1 z}{1!} + \frac{k_2 z^2}{2!} + ... + \frac{k_\nu z^\nu}{\nu!} + ... = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu z^\nu}{\nu!}.$$

Cette fonction a été utilisée par Borel pour découvrir que la réponse à la question ci-dessus est étroitement liée aux propriétés de l'intégrale suivante

(appelée intégrale de Laplace – Abel.)

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega z)\, d\omega.$$

Mittag-Leffler a introduit à la place de $F_1(z)$ une famille de fonctions (entières) à un paramétre

$$\begin{aligned} F_\alpha(z) &= k_0 + \frac{k_1 z}{\Gamma(1\cdot\alpha+1)} + \frac{k_2 z^2}{\Gamma(2\cdot\alpha+1)} + ... \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu z^\nu}{\Gamma(\nu\cdot\alpha+1)}, \qquad \alpha > 0 \end{aligned}$$

et étudié ses propriétés et les propriétés de l'intégrale de Laplace-Abel généralisée

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega z)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha\left(\omega^\alpha z\right) d\omega.$$

Le résultat principal de son étude était : dans un domaine maximal A, la représentation analytique de la continuation analytique à valeur unique $FA(z)$ de la fonction $FC(z)$ peut être représentée sous la forme suivante

$$FA(z) = \lim_{\alpha\to 1} \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha\left(\omega^\alpha z\right) d\omega.$$

Pour cette raison, les propriétés analytiques des fonctions $F_\alpha(z)$ deviennent très importantes.

En raison de cette construction, Mittag-Leffler a décidé d'étudier la fonction

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(z) &= 1+\frac{z}{\Gamma(1\cdot\alpha+1)}+\frac{z^{2}}{\Gamma(2\cdot\alpha+1)}+... \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\Gamma(\nu\cdot\alpha+1)}, \alpha>0 \end{aligned}$$

maintenant connue sous le nom de fonction Mittag-Leffler ; a été introduite et étudiée par G. Mittag-Leffler dans cinq articles ultérieurs.

Il a consacré son premier article, à sa nouvelle fonction. En particulier, il a posé la question de savoir si les domaines d'analyticité de la fonction

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_{0}^{\infty}e^{-\omega}F_{\alpha}\left(\omega^{\alpha}z\right)d\omega,$$

et la fonction

$$\lim_{\alpha\to 1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

coïncident.

Dans le deuxième article ; la nouvelle fonction,c'est-à-dire la fonction Mittag-Leffler ; est apparue. Ses propriétés asymptotiques ont été formulées. En particulier, Mittag-Leffl er a montré que $E_{\alpha}(z)$ se comporte comme $e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$ dans l'angle $-\frac{\pi\alpha}{2}<\arg z<\frac{\pi\alpha}{2}$ et elle est borné pour les valeurs de z avec $\frac{\pi\alpha}{2}<|\arg z|<\pi$.

Dans le troisième article, les propriétés asymptotiques de $E_{\alpha}(z)$ ont été discutées plus attentivement. Mittag-Leffler a comparé ses résultats à ceux de Malmquist, Phragmén et Lindelöf qu'ils ont obtenus pour des fonctions similaires.

Le quatrième article, était entièrement lié à étendre suivant les valeurs de α, la fonction $E_{\alpha}(z)$; ainsi que la fonction $F_{\alpha}(z)$.

L'article le plus créatif de Mittag-Leffler sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(z)$ est son cinquième article. Là, il :

· Trouve une représentation intégrale pour la fonction $E_{\alpha}(z)$.

· Décrit le comportement asymptotique de $E_{\alpha}(z)$ dans différents domaines angulaires.

· Donne les formules reliant $E_{\alpha}(z)$ avec des fonctions élémentaires connues.

· Fourni les formules asymptotiques pour :

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - z}.$$

· Obtient des asymptotiques détaillées de $E_{\alpha}(z)$ pour les valeurs négatives de la variable; $c - \grave{a} - d$, pour $z = -r$.

· Compare en détail ses résultats asymptotiques pour $E_{\alpha}(z)$ avec les résultats obtenus par Malmquist.

· Trouve des domaines qui sont exempts de zéros de $E_{\alpha}(z)$ pour $0 < \alpha < 2$; $\alpha \neq 1$.

· Applique ses résultats sur $E_{\alpha}(z)$ pour determiner domaine de l'analyticité de la fonction $FA(z)$ et sa représentation analytique.

On a pu apercevoir l'importance de la nouvelle fonction dès l'apparition des premiers résultats analytiques de celle-ci. Tout d'abord, il s'agit d'une fonction très simple jouant le rôle clé dans la solution d'un problème général de la théorie des fonctions analytiques. En deuxième, elle peut être considérée comme une généralisation directe de la fonction exponentielle, préservant certaines de ses propriétés. De plus, $E_{\alpha}(z)$ a quelques propriétés intéressantes qui sont devenues plus tard essentielles pour la description de nombreux problèmes de physique, chimie, biologie, ingénierie et sciences appliquées.

Définition 1.19 *Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction*

$$E_{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{\Gamma(ak+1)}, (a > 0),$$

est appelée de ***Mittag-Leffler****, et la fonction*

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{\Gamma(ak+\beta)}, (a > 0, \beta > 0).$$

de Mittag-Leffler généralisée.

Propriètèes

1) On a

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\, t^{\beta-1}\, E_{a,\beta}\left(z\rho^a\right) dt = \frac{1}{z-1} \qquad |z|<1.$$

2) On a :

$$\int_0^a E_{a,\beta}\left(\lambda\rho^a\right) \rho^{\beta-1}\, dt = z^\beta E_{a,\beta+1}\left(\lambda z^a\right).$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1}E_{a,\beta}\left(\lambda z^a\right)) = z^{\beta-n-1}E_{a,\beta+n}\left(z^a\right).$$

Définition 1.20 *Une fonction $\varphi(t)$ avec $t \geq 0$ est dite fonction complètement monotone (CM), si elle est positive, de classe C^∞, et pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$(-1)^k \varphi^{(k)}(t) \geq 0.$$

Proposition 1.7 *Si $0 < \alpha < 1$ et $\rho \geq 0$, $E_\alpha(-\rho^\alpha)$ est une fonction complètement monotone (CM)*

Remarque 1.10 *Comme la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(-\rho^\alpha)$ est une fonction complètement monotone, pour $0 < \alpha < 1$ et $\rho \geq 0$, alors :*

- $E_\alpha(-\rho^\alpha) \geq 0$
- $\frac{d}{d\rho}E_\alpha(-\rho^\alpha) \leq 0$ *implique $E_\alpha(-\rho^\alpha)$ est décroissante.et on a*

$$E_\alpha(-\rho^\alpha) \leq E_\alpha(0) = 1.$$

1.3 Intégration fractionnaire

N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, A.K. Grunwald, J. Hadamard, J. Liouville, B.Riemann et autres, on pris en charge le développement du calcul fractionnair, en posant plusieurs définitions sans qu'elles soient, pour autant, compatibles les unes avec les autres.

Le calcul fractionnaire fait l'objet de beaucoup de travaux et son l'intérêt et ses applications ne cessent de grandir dés la fin du $20^{ème}$ siècle, suite au développement de l'informatique . Souvent, l'opérateur d'ordre fractionnaire est considéré comme irréel, sans intérêt pour l'ingénieur, car il n'a pas d'interprétation géométrique précise.

Les concepts d'intégration et de différenciation fractionnaires sont généralement associés avec le nom de Liouville. Cependant, les créateurs du calcul différentiel et intégral avaient déjà envisagé des dérivés non seulement d'ordre entier, mais aussi d'ordre fractionnaire. Les dérivés fractionnaires étaient les sujets de l'étude de Leibniz. Euler s'est également intéressé aux dérivés fractionnaires. Liouville, Abel, Riemann, Letnikov, Weyl, Hadamard et de nombreux autres mathématiciens bien connus du passé et du présent ont influencé le développement de l'intégro-différenciation, qui est maintenant devenue un sujet important en analyse mathématique.

A partire de la solution de l'équation intégrale d'Abel, on peut introduire l'intégration et la différentiation fractionnaires. La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$ pour une fonction causale $f(t)$, suffisamment bien comportée, selon l'approche Riemann -Liouville, se base sur la formule de Cauchy :

$$\begin{aligned} I_0^n\ f(t) &= \int_a^{\tau} \int_a^{\tau_{n-1}} ... \int_a^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau d\tau_1 ... d\tau_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

L'idée d'intégration fractionnaire est étroitement liée à l'équation intégrale d'Abel. En 1823, Abel a appliqué le calcul fractionnaire dans la solution d'une équation intégrale qui se pose dans la formulation du problème de tautochrone ; c'est-à-dire le problème de déterminer la forme de la courbe de telle sorte que le temps de descente d'une masse ponctuelle sans frottement glissant le long de la courbe sous l'action de la gravité soit indépendant du point de départ ;. Si le temps de glissement est une constante connue, alors l'équation intégrale d'Abel est

$$k = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt. \tag{1.12}$$

Abel a étudié des équations intégrales plus générales avec des noyaux de la forme $(x-t)^{\alpha}$.

L'intégrale en (1.12), à l'exception du facteur multiplicatif $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$, est un cas particulier d'une intégrale définie qui définit l'intégration fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$. Abel a écrit le côté droit de (1.12) comme $\sqrt{\pi}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}\right) f(x)$. Puis il a opéré des deux côtés de l'équation avec $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}$, pour avoir

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} k = \sqrt{\pi} f(x),$$

puisque ces opérateurs fractionnaires (avec des conditions appropriées sur f) satisfait

$$D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} f = D^{0} f = f.$$

Ainsi, on peut déterminer $f(x)$, en calculant la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ de la constante k en (1.12). C'est une réalisation remarquable d'Abel dans le calcul fractionnaire. Bien que Abel a montré comment la solution, trouvée par d'autres moyens, pouvait être écrite sous forme de dérivée fractionnaire, il n'a jamais résolu le problème par calcul fractionnaire.

Le sujet du calcul fractionnaire est resté en sommeil pendant près d'une décennie jusqu'à ce que les œuvres de Joseph Liouville paraissent.

Les mathématiciens ont décrit la solution d'Abel comme " élégante ". C'était peut-être la formule intégrale de Fourier et la solution d'Abel qui avaient attiré l'attention de Liouville, qui fit la première grande étude du calcul fractionnaire. Il a publié trois longs mémoires en 1832 et plusieurs autres publications en succession rapide.

Le point de départ était les dérivés d'ordre intégral :

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax},$$

qu'il a étendu de manière naturelle aux dérivés d'ordre arbitraire μ :

$$D^\mu e^{ax} = a^\mu e^{ax}. \tag{1.13}$$

Il a assumé que la dérivée arbitraire d'une fonction f développée en une série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad \mathrm{Re}(a_n) > 0, \tag{1.14}$$

est

$$D^{\nu} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\mu} e^{a_n x}, \tag{1.15}$$

La formule (1.15) généralise de manière naturelle une dérivée d'ordre μ arbitraire. Mais elle présente l'inconvénient évident de ne s'appliquer qu'aux fonctions de la forme (1.14) . Pour obtenir sa deuxième définition, Liouville a commencé avec une intégrale définie lié à la fonction Gamma :

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \qquad a > 0, x > 0.$$

En posant $xu = t$, on trouve

$$\begin{aligned} I &= x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, a > 0, \qquad x > 0 \\ &= x^{-a} \Gamma(a), \end{aligned}$$

donc

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

Alors, Liouville opère avec D^{μ} des deux côtés de l'équation ci-dessus, pour obtenir, selon (1.13) ,

$$\begin{aligned} D^{\mu} x^{-a} &= D^{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} D^{\mu} \left(e^{-xu} \right) du \end{aligned}$$

donc

$$D^{\mu}x^{-a} = \frac{(-1)^{\mu}}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a+\mu-1}e^{-xu}du. \tag{1.16}$$

Ainsi, Liouville obtient sa seconde définition d'une dérivée fractionnaire :

$$D^{\mu}x^{-a} = \frac{(-1)^{\mu}\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\mu}, \qquad a > 0.$$

Mais les définitions de Liouville étaient trop étroites pour durer. La première définition est limité aux fonctions de la classe (1.14), et la deuxième définition est utile uniquement pour les fonctions du type x^{-a} (avec $a > 0$). Ni l'un ni l'autre ne convient pour être appliqué à une large classe de fonctions.

Liouville a été le premier à tenter de résoudre des équations différentielles comprenant des opérateurs fractionnaires. Une fonction complémentaire a fait l'objet de certaines de ses recherches. Dans l'un de ses nombreux mémoires, pour justifier l'existence d'une fonction complémentaire, il écrit : " L'équation différentielle ordinaire $\frac{d^n}{dx^n}$ a la solution complémentaire $y_c = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1}$. Donc, $\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}$ (μ arbitraire) devrait avoir une solution complémentaire correspondante ".

Des définitions essentiellement différentes des opérations fractionnaires ont été données qui ont différents domaines d'utilité.

1.3.1 Equation intégrale d'Abel

On a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds = f(t), \qquad 0 < \alpha < 1, t > 0 \tag{1.17}$$

est appellée l'équation d'Abel. Soit $a > -\infty$ et supposons que l'équation est considérée sur un intervalle fini $[a, b]$.

L'équation (1.17) peut être résolue de la manière suivante. Multiplions les deux côtés de (1.14)

par $(x-t)^{-\alpha}$ et intégrons :

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{1.18}$$

donc :

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

On pose $t = s + \tau(x-s)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\,dt &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}\tau^{\alpha-1} d\tau \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha), \end{aligned}$$

alors

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \int_a^x \varphi(s)\,ds. \tag{1.19}$$

De (1.18) et (1.19), on a

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{1.20}$$

Ainsi, après différenciation, nous avons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{1.21}$$

Donc si (1.17) a une solution, cette solution est nécessairement donnée par (1.21) et c'est donc unique.

De manière similaire, pour

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt = f(x), x \leq b, \tag{1.22}$$

au lieu de (1.21), on obtient la formule suivante

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}. \tag{1.23}$$

Les conditions sur $f(x)$, sous les-quelles l'équation d'Abel admit des solution.

Posons

$$F_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{1.24}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b |F_{1-\alpha}(x)|\,dx &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\int_a^x (x-t)^{1-\alpha}|f(t)|\,dtdx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|\int_t^b (x-t)^{-\alpha}\,dxdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|\left[\frac{1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}\Big|_t^b dx\right]dt \\
&\leq \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}\,dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}\,dt.
\end{aligned}$$

Donc $F_{1-\alpha}(x) \in L_1(a,b)$, dés que $f(x) \in L_1(a,b)$.

Maintenant, on introduit des conditions en fonction de $F_{1-\alpha}(x)$, sous lesquelles l'équation d'Abel admet une solution.

Théorème 1.8 *[33] L'équation d'Abel* (1.17), *avec* $0 < \alpha < 1$, *admit des solution dans* $L_1(a,b)$ *si et seulement si*

$$F_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b]) \ \ et \ F_{1-\alpha}(a) = 0 \tag{1.25}$$

Ces conditions étant satisfaites, l'équation a une solution unique donnée par (1.21).

Preuve Nécessité : Supposons que (1.17) admit des solution dans $L_1(a,b)$, alors d'aprés la résolution de l'équation d'Abel (1.17) ci-dessus, (1.21) est satifaite. Par conséquent , on obtient (1.25).

Suffisance : Comme $F_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, on a

$$F'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} F_{1-\alpha}(x) \in L_1([a,b])$$

donc la fonction donnée par (1.21) existe presque partout et appartient à $L_1([a,b])$. Montrons qu'il s'agit bien d'une solution de (1.17).

Pour atteindre cet objectif, On la substitut dans le côté gauche de (1.17) et notons le résultat par $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{F'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = g(x) \tag{1.26}$$

et on démontre que $g(x) = f(x)$. Comme (1.26) est une équation de type (1.17) par rapport à $F'_{1-\alpha}(x)$ et elle admit des solutions. De (1.21), on trouve

$$\begin{aligned} F'_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dx} g_{1-\alpha}(x) = g'_{1-\alpha}(x) \end{aligned}$$

avec $g_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$.

La fonction $g_{1-\alpha}(x)$ est absolument continue ; en vertu de (1.20), et par hypothèse, $F_{1-\alpha}(x)$

est aussi une fonction absolument continue, donc

$$F_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c \tag{1.27}$$

Or par hypothèse $F_{1-\alpha}(a) = 0$, tandis que (1.26) donne $g_{1-\alpha}(a) = 0$. Par conséquence, $c = 0$, alors on a

$$\int_a^x \frac{f(t) - g(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}} = 0 \tag{1.28}$$

L'équation (1.28) est de la forme (1.17). L'unicité de sa solution conduit à la relation

$$f(t) = g(t).$$

■

Donnons une simple condition de solvabilité suffisante en fonction de la fonction $f(x)$ elle même.

Lemme 1.6 *Si $f(x) \in AC([a,b])$, alors $F_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$ et*

$$F_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}\, dt \right] \tag{1.29}$$

Preuve Au vu que $f(x) \in AC([a,b])$, on remplace $f(t)$ par $f(a) + \int_a^t f'(s)\, ds$ dans (1.27), on a

$$\begin{aligned} F_{1-\alpha}(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha}\, dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t f'(s)\, ds \\ &= \frac{f(a)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[-(x-t)^{1-\alpha} \Big|_a^x \right] + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t f'(s)\, ds \right) (x-t)^{-\alpha}\, dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t f'(s)\, ds \right) (x-t)^{-\alpha}\, dt, \end{aligned} \tag{1.30}$$

implique

$$\begin{aligned}\int_a^x \left(\int_a^t f'(s)\,ds\right)(x-t)^{-\alpha}\,dt &= \left[\left(\int_a^t f'(s)\,ds\right)\left(\frac{-(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_a^x\right] + \frac{1}{1-\alpha}\int_a^x f'(t)\,(x-t)^{1-\alpha}\,dt \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_a^x f'(t)\,(x-t)^{1-\alpha}\,dt \qquad (1.31)\end{aligned}$$

Substituons (1.31) dans (1.30) , on trouve (1.29)

La fonction $F_{1-\alpha}(x)$ est une combinaison linéaire de deux termes absolument continues, donc $F_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$. ■

Corollaire 1.1 *Si $f(x) \in AC([a,b])$, alors l'équation d'Abel* (1.17) *avec $0<\alpha<1$ est solvable dans $L_1(a,b)$, et sa solution* (1.21) *est représentée sous la forme*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right] \qquad (1.32)$$

Similairement pour le théorème 1.9, l'équation (1.5) admet une solution dans $L_1([a,b])$ si et seulement si

$$\widetilde{F}_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b]) \text{ et } \widetilde{F}_{1-\alpha}(b) = 0$$

où

$$\widetilde{F}_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt, 0<\alpha<1.$$

La solution (1.23) de (1.22) avec $f(x) \in AC([a,b])$ peut être écrite de la même manière que (1.32) comme suit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}} - \int_t^b \frac{f'(s)}{(s-t)^{\alpha}}ds\right] \qquad (1.33)$$

1.3.2 Intégrales fractionnaires

Définition 1.21 *Soit $\varphi(t) \in L_1([a,b])$. Les intégrales*

$$I^{\alpha}_{a/t}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds \tag{1.34}$$

et

$$I^{\alpha}_{t/b}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \frac{\varphi(s)}{(s-t)^{1-\alpha}}ds \tag{1.35}$$

où $\alpha > 0$, sont appelées intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville, d'ordre α.

Si $\varphi(t) \in L_1([a,b])$ existent presque partout, les intégrales fractionnaires (1.34), (1.35) sont définies.

Formules d'intégration par parties

Lemme 1.7 *Soient $\varphi, \psi \in C([a,b])$, alors*

$$\int_a^b \varphi(t)\, I^{\alpha}_{a/t}\psi(t)\, dt = \int_a^b \psi(t)\, I^{\alpha}_{t/b}\varphi(t)\, dt \tag{1.36}$$

Preuve La démonstration se base sur le théorème de Fubini.

On a φ et ψ sont continues sur $[a,b]$ et $(t-s)^{\alpha-1}$ est régulière (loin de $s=t$), donc $\Psi(t,s)$:

$\Psi(t,s) = \varphi(t)(t-s)^{\alpha-1}\psi(s)\chi_{a\le\tau\le t\le b}$, où $\chi_{a\le s\le t\le b}$ est la fonction indicatrice pour $s \le t$,

est continue, donc mesurable et aussi, on a

$$\exists M_1, M_2 > 0, \text{ tels que } |\varphi(t)| \le M_1; |\psi(t)| \le M_2, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Deplus, pour $\frac{1}{n} < \alpha < 1$ avec $n > 0$, la fonction $(t-s)^{\alpha-1}$ est localement intégrable et

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Intégrons sur la région : $a \leq s \leq t \leq b$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^t |\Psi(t,s)|\, dsdt &\leq M_1 M_2 \int_a^b \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\, dsdt \\
&\leq M_1 M_2 \int_a^b \frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} dt \\
&\leq \frac{M_1 M}{\alpha(\alpha+1)} (b-a)^{\alpha+1} < \infty,
\end{aligned}$$

d'où $|\Psi(t,s)|$ est integrable sur $[a,b] \times [a,b]$.

Par définition :

$$\int_a^b \varphi(t)\, I_{a/t}^{\alpha} \psi(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \psi(s)\, dsdt,$$

implique

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(t)\, I_{a/t}^{\alpha} \psi(t)\, dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_s^b (s-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \psi(s)\, ds \\
&= \int_a^b \psi(t)\, I_{t/b}^{\alpha} \varphi(t)\, dt
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.8 *Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, l'intégration fractionnaire a la propriété*

$$I_{a/t}^{\alpha} I_{a/t}^{\beta} \varphi(x) = I_{a/t}^{\alpha+\beta} \varphi(x), I_{t/b}^{\alpha} I_{t/b}^{\beta} \varphi(x) = I_{t/b}^{\alpha+\beta} \varphi(x), \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.37}$$

Les équations (1.37) *sont satisfaites en tout point pour* $\varphi(t) \in C([a,b])$ *et en presque tous les points pour* $\varphi(t) \in L_1([a,b])$.

Preuve En effet, on a

$$I_{a/t}^{\alpha} I_{a/t}^{\beta} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds dt$$

En interchangeant l'ordre d'intégration par le théorème de Fubini, on a

$$I_{a/t}^{\alpha} I_{a/t}^{\beta} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt$$

Effectuons le chagement de variable suivant $t = s + \tau(x-s)$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{a/t}^{\alpha} I_{a/t}^{\beta} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_0^1 (x - s - \tau(x-s))^{\alpha-1} (s + \tau(x-s) - s)^{\beta-1} (x-s)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s)\, ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s)\, ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&= I_{a/t}^{\alpha+\beta} \varphi(x)
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.11 *Le résultat dans* (1.37) *est appelé une propriété semi-groupe de l'intégration fractionnaire.*

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Malgré l'absence de toute signification physique ou géométrique, le nombre d'études qui utilisent la différentiation et l'intégration fractionnaires a augmenté de jour en jour. Le nombre de problèmes ouverts exprimés en utilisant la différentiation et l'intégration fractionnaires a inspiré de nombreux scientifiques. Tout d'abord, les scientifiques avaient besoin de définitions des dérivées et intégrales fractionnaires. Cette exigence a donné naissance à différentes définitions telles que Grunwald-Letnikov Riemann-Liouville et Caputo.

Il est naturel d'introduire la différenciation fractionnaire, comme une opération inverse de l'intégration fractionnaire. Compte tenu de l'inversion de l'équation d'Abel (1.2) ou (1.5) qui a été obtenu ci-dessus, nous arrivons à la définition suivante.

Définition 1.22 *Les expressions*

$$D_{a/t}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds \tag{1.38}$$

et

$$D_{t/b}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^{\alpha}} ds \tag{1.39}$$

pour une fonction $f(t)$ donnée dans $[a;b]$ et $0 < \alpha < 1$, sont, appelées dérivée fractionnaire à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Donnons une condition simple et suffisante pour l'existence de dérivées fractionnaires.

Lemme 1.8 *Si $f(t) \in AC([a,b])$, alors $D_{a/t}^{\alpha} f(t)$ et $D_{t/b}^{\alpha} f(t)$ existent **p. p** pour $0 < \alpha < 1$. Aussi, $D_{a/t}^{\alpha} f(t), D_{t/b}^{\alpha} f(t) \in L_r(a,b), 1 \leq r \leq \frac{1}{\alpha}$ et*

$$D_{a/t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds \right] \tag{1.40}$$

$$D_{t/b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}} - \int_t^b \frac{f'(s)}{(s-t)^{\alpha}} ds \right] \tag{1.41}$$

Les asserssions du lemme 1.8 découle du corollaire 1.1.En effet, les relation (1.40) et (1.41) résultent directement des relations (1.32) et (1.33) . La condition $D^{\alpha}_{a/t}f(t), D^{\alpha}_{t/b}f(t) \in L_r(a,b)$, $1 \leq r \leq \frac{1}{\alpha}$ étant directement dérivée de (1.20) et (1.18) .

Indiquons à ce propos un exemple de la fonction $f(t) = (t-a)^{-p}$, $0 < p < 1$, pour laquelle $D^{\alpha}_{a/t}f(t)$ est définit. On a

$$D^{\alpha}_{a/t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{(s-a)^{-p}}{(t-s)^{\alpha}}ds \tag{1.42}$$

Posons $s = a + \tau(t-a)$ dans (1.42) , donne

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a/t}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha}(t-a)^{1-\alpha-p}\tau^{-p}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left[(t-a)^{1-\alpha-p}\right]\int_0^1 \tau^{-p}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau \\ &= \frac{B(1-\alpha,1-p)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left[(t-a)^{1-\alpha-p}\right] \\ &= \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(2-\alpha-p)}(1-\alpha-p)(t-a)^{-\alpha-p}, \end{aligned}$$

donc

$$D^{\alpha}_{a/t}f(t) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-\alpha-p)}\frac{1}{(t-a)^{\alpha+p}} \tag{1.43}$$

Si $p = 1-\alpha$, on obtient

$$D^{\alpha}_{a/t}f(t) \equiv 0 \tag{1.44}$$

La dérivée fractionnaire (1.37) est une fonction intégrable si $\alpha - p < 1$.

On constate que l'effet de la fonction $(t-a)^{\alpha-1}$ pour la dérivée fractionnaire est similaire à l'effet d'une constante dans la différenciation classique.

Nous utiliserons des notations standards :

$[\alpha]$ signifiant la partie entière du nombre α, et $\{\alpha\}$ signifiant sa partie " fractionnaire ", donc

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} \tag{1.45}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a le sens de différenciation usuelle :

$$D^{\alpha}_{a/t} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}, D^{\alpha}_{t/b} = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}, \tag{1.46}$$

Si α n'est pas un entier, il est naturel d'introduire $D^{\alpha}_{a/t} f, D^{\alpha}_{t/b} f$ comme suit

$$D^{\alpha}_{a/t} f = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{a/t} f = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{a/t} f \tag{1.47}$$

$$D^{\alpha}_{t/b} f = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{t/b} f = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{t/b} f, \tag{1.48}$$

en prenent compte également de la notation

$$D^{\alpha}_{a/t} f = I^{-\alpha}_{a/t} = \left(I^{\alpha}_{a/t}\right)^{-1}.$$

Donc

$$D^{\alpha}_{a/t} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{a}^{t} \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \qquad n = [\alpha] + 1 \tag{1.49}$$

$$D^{\alpha}_{t/b} f = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{t}^{b} \frac{f(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} ds, \qquad n = [\alpha] + 1. \tag{1.50}$$

Une condition suffisante pour que les dérivées fractionnaires (1.49) et (1.50) existent est

$$\int_{a}^{t} \frac{f(s)}{(t-s)^{\{\alpha\}}} ds \in AC^{[\alpha]}([a,b])$$

Cette condition est obtenue si $f(t) \in AC^{[\alpha]}([a,b])$.

Pour : $f(t) = (t-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, 2, ..., [\alpha]+1$, on constate que (1.23) est vraie pour tout $\alpha > 0$

et de même pour (1.24) . De plus,

$$D^{\alpha}_{a/t} f(t) \equiv 0.$$

Lemme 1.9 *Soit* $\varphi(t) \in L_1(a,b)$. *L'équation intégrale d'Abel homogène* $I^{\alpha}_{a/t}\varphi(s) = 0$ *admet uniquement la solution trivial* $\varphi(t) \equiv 0$ *p.p.*

Preuve Notons $m = [\alpha]$. Le cas $\alpha = m$ est clair.

Si $\alpha \neq 1, 2, ...$; en différenciant m fois l'égalité $I^{\alpha}_{a/t}\varphi(s) = 0$, on obtient

$$I^{\alpha-m}_{a/t}\varphi(s) = 0$$

Il est evident, dans ce cas, que $0 < \alpha - m < 1$, alors, suivant le théorème 1.1, on a

$$\varphi(t) \equiv 0.$$

■

1.4.1 Intégration et différenciation fractionnaire comme opérations réciproques

Il est bien connu que

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \varphi(t)\,dt = \varphi(t),$$

cependant

$$\int_a^t \varphi'(t)\,dt \neq \varphi(t),$$

dans la plupart des cas, en raison de la constante $(-\varphi(a))$. Pour $n > 1$, $\left(\frac{d}{dt}\right)^n I^n_{a/t}\varphi(t) = \varphi(t)$ mais $I^n_{a/t}\varphi^{(n)}(t) \neq \varphi(t)$ différent de $\varphi(t)$ par un polynôme d'ordre $n-1$.

Considérons la fonction $f(t)$, représentée par l'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction sommable :

$$f(t) = I^{\alpha}_{a/t}\varphi(s),\ \varphi \in L_p(a,b), 1 \leq p < \infty,$$

l'espace de ces fonctions est noté $I_{a/t}^{\alpha}(L_p)$.

Théorème 1.9 [33] *Soient* $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ *Pour que* $f(t) \in I_{a/t}^{\alpha}(L_1)$, *il est nécessaire et suffisant que*

$$f_{n-\alpha}(s) = I_{a/t}^{n-\alpha} f(s) \in AC^n([a,b]) \tag{1.51}$$

et que

$$f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0, \qquad k = 1, 2, ..., n-1. \tag{1.52}$$

Preuve $i-$ Supposons que $f(t) = I_{a/t}^{\alpha}\varphi(s)$, $\varphi \in L_1(a,b)$. Compte tenu de (1.18), on a

$$I_{a/t}^{n-\alpha} f(s) = I_{a/t}^{n}\varphi(s), \varphi \in L_1(a,b)$$

ainsi, (1.51) et (1.52) découlent du lemme 1.1.

$ii-$ Admettons que $f(t)$ satisfasse (1.32) et (1.33), alors on peut représenter $f_{n-\alpha}(t)$, selon le lemme 1.1 comme suit

$$f_{n-\alpha}(s) = I_{a/t}^{n}\varphi(s)$$

où $\varphi \in L_1(a,b)$. Par conséquence

$$\begin{aligned} I_{a/t}^{n-\alpha} f(s) &= I_{a/t}^{n}\varphi(s) \\ &= I_{a/t}^{n-\alpha} I_{a/s}^{\alpha}\varphi(s) \end{aligned}$$

alors

$$I_{a/t}^{n-\alpha}\left(f(s) - I_{a/s}^{\alpha}\varphi(\tau)\right) = 0$$

Comme $n - \alpha > 0$, et compte tenu du lemme 1.4, on trouve

$$f(t) - I_{a/t}^{\alpha}\varphi(s) = 0,$$

donc,

$$f(t) \in I_{a/t}^{\alpha}(L_1).$$

■

1.5 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

La nécessitée des conditions initiales pouvant être interprétées physiquement à travers des dérivées standard, a incité plusieurs auteurs y compris **Caputo,** a se rendre compte que l'approche de **Riemann-Liouville** doit être révisé.

les dérivées au sens de **Caputo** ${}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f(t)$ et ${}^{C}D_{t/T}^{\alpha}f(t)$ d'ordre $\alpha > 0$,**,** sont introduite sur $[0,b]$ par

$$ {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}f(t) =^{R.L} D_{0/t}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right], $$

et

$$ {}^{C}D_{t/b}^{\alpha}f(t) =^{R.L} D_{t/b}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\right], $$

et si $0 < \alpha < 1$, on a

$$ \begin{cases} {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}f(t) =^{R.L} D_{0/t}^{\alpha}\left[f(t) - f(0)\right], \\ {}^{C}D_{t/b}^{\alpha}f(t) =^{R.L} D_{t/b}^{\alpha}\left[f(t) - f(b)\right]. \end{cases} $$

Remarque 1.12 *Les dérivées* ${}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f(t)$ *et* ${}^{C}D_{t/T}^{\alpha}f(t)$ *d'ordre* $\alpha > 0$, *sont, en particulier, définies pour des fonctions* $f(t) \in AC^{n}([0,b])$.

Ainsi ces dérivées peuvent être définies comme suit

Définition 1.23 *Soient* $f \in L_{loc}^{1}[0,b]$, $\alpha > 0$, *avec* $n = [\alpha] + 1$.

La dérivée de ***Caputo*** *d'ordre* α *de* f

i− ***à gauche***

$$ {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. $$

ii− ***à droite***

$$ {}^{C}D_{t/T}^{\alpha}f(t) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau, $$

et si $0 < \alpha < 1$, *on a :*

$$ {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \tag{1.53} $$

et

$$ {}^{C}D_{t/b}^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{f^{'}\left(\tau\right)}{\left(\tau-t\right)^{\alpha}}d\tau. \tag{1.54}$$

Remarque 1.13 *i− Si* ${}^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)$ *existe, on a*

$$ {}^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)=I^{n-\alpha}D^{n}f\left(t\right). $$

ii− Soit $C\in\mathbb{R}$*, alors*

$$ {}^{C}D^{\alpha}C=0. $$

La dérivée de Caputo d'une fonction constante est nulle.

Lemme 1.10 *Soit* $n=[\alpha]+1$*. Si* $f\left(t\right)\in C^{1}\left[0,b\right]$*, alors*

$$ {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f\left(t\right),{}^{C}\ D_{t/b}^{\alpha}f\left(t\right)\in C\left[0,b\right], $$

de plus

$$ {}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f\left(0\right)={}^{C}\ D_{t/b}^{\alpha}f\left(b\right)=0. $$

Preuve Les représentations (1.53) et (1.54) ${}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f\left(t\right)$ et ${}^{C}D_{t/b}^{\alpha}f\left(t\right)$, entrainent leurs continuitées sur $[0,b]$. On a

$$\begin{aligned}\left|{}^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f\left(t\right)\right| &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left|\int_{0}^{t}\frac{f^{(n)}\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-n+1}}d\tau\right| \\ &\leq \frac{\left\|f^{(n)}\left(t\right)\right\|}{\Gamma(n-\alpha)}\left|\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}d\tau\right| \\ &\leq \frac{\left\|f^{(n)}\left(t\right)\right\|}{\Gamma(n-\alpha)\left(n-\alpha\right)}t^{n-\alpha},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|{}^{C}D_{t/b}^{\alpha}f\left(t\right)\right| &= \left|\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{f^{(n)}\left(\tau\right)}{\left(\tau-t\right)^{\alpha-+n+1}}d\tau\right| \\ &\leq \frac{\left\|f^{(n)}\left(t\right)\right\|}{\Gamma(n-\alpha)\left(n-\alpha\right)}\left(b-t\right)^{n-\alpha}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$^{C}D_{0/t}^{\alpha}\ f\left(0\right) =^{C}\ D_{t/b}^{\alpha}f\left(b\right) = 0$$

■

1.5.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

Corollaire 1.2 *Assumons que* $^{C}Df\left(t\right)$ *et* $^{C}Dg\left(t\right)$ *de deux fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *existent, et que :* $n = [\alpha] + 1$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1− *On a*

$$^{C}D^{\alpha}(\lambda f\left(t\right) + g\left(t\right)) = \lambda ^{C}D^{\alpha}f\left(t\right) +^{C}\ D^{\alpha}g\left(t\right).$$

2−*Pour* $m \in \mathbb{N}^{*}$, *On a*

$$^{C}D^{\alpha}D^{m}f\left(t\right) \neq D^{m}\ ^{C}D^{\alpha}f\left(t\right).$$

3− *Si* $f \in C\left[a,b\right]$, *alors :*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f\left(t\right) = f(t).$$

4−*Si* $f \in AC\left[a,b\right]$ *et si* $0 < \alpha < 1$, *on a :*

$$I_{a}^{\alpha}\left(^{C}D_{a}^{\alpha}f\right)\left(t\right) = f(t) - f\left(0\right).$$

6− *Pour* $\beta = \alpha - n + 1$, *on a*

$$^{C}D^{\alpha}f\left(t\right) =^{C}\ D^{\beta}D^{n-1}f\left(t\right).$$

Preuve 1− On a

$$^{C}D^{\alpha}f\left(t\right) = I^{n-\alpha}D^{n}f\left(t\right),$$

implique

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+g\left(t\right)\right) &= I^{n-\alpha}D^{n}(\lambda f\left(t\right)+g\left(t\right)) \\ &= \lambda I^{n-\alpha}D^{n}\left[\left(f+g\right)\left(t\right)\right] \\ &= \lambda I^{n-\alpha}D^{n}f\left(t\right)+I^{n-\alpha}D^{n}g\left(t\right) \\ &= \lambda\,{}^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)+{}^{C}D^{\alpha}g\left(t\right). \end{aligned}$$

3– On a

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f\left(t\right) &= I_{a}^{n-\alpha}\left(D^{n}I_{a}^{\alpha}f(t)\right) \\ &= I_{a}^{n-\alpha}\left(I_{a}^{\alpha-n}f(t)\right), \end{aligned}$$

L'égalité (1.31) , donne

$${}^{C}D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f(t)=f(t).$$

4– On a

$$\begin{aligned} I_{a}^{\alpha}\left({}^{C}D_{a}^{\alpha}f\right)\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\tau}\left(\tau-s\right)^{-\alpha}f^{'}\left(s\right)ds\right)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\int_{s}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-s\right)^{-\alpha}d\tau f^{'}\left(s\right)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)f^{'}\left(s\right)ds \\ &= f(t)-f\left(0\right). \end{aligned}$$

■

Théorème 1.10 *Pour $\rho>0,\alpha>0$ et $n=[\alpha]+1$, on a*

$${}^{C}D^{\alpha}f(\rho)={}^{R}D^{\alpha}f(\rho)-\sum_{k=o}^{n-1}\frac{\rho^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0).$$

Preuve On utilise le $D.L$ en serie de Taylor de f à $\rho = 0$,

$$f(\rho) = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\rho^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1},$$

avec

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\rho f^{(n)}(x)(\rho - x)^{n-1} dx \\ &= I^n f^{(n)}(\rho). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(\rho) &= {}^R D^\alpha \left(\sum_{k=o}^{n-1} \frac{\rho^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=o}^{n-1} \frac{{}^R D^\alpha \rho^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + {}^R D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{\rho^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + {}^R D^\alpha I^n f^{(n)}(\rho) \\ &= \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\rho^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(\rho) \\ &= \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\rho^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + {}^C D^\alpha f(\rho). \end{aligned}$$

Donc :

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(\rho) - \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\rho^{k-\alpha}}{\Gamma(k-+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

■

Remarque 1.14 *Si $f(\rho)$ et tout ses premiers $(n-1)$ dérivées sont nulles au point $\rho = 0$, alors*

$${}^C D^\alpha f(\rho) = {}^R D^\alpha f(\rho).$$

Chapitre 2

Transformée de Laplace et les équations différentièlles d'ordre fractionnaires

2.1 Transformée de Laplace

Une technique très puissante pour résoudre les quations différentièlles et les équatations aux dérivées partielles est celle de la transformée de Laplace, qui transforme littéralement l'équation différentielle d'origine en une expression algébrique élémentaire. Cette dernière peut ensuite être simplement transformée une fois de plus, en solution du problème d'origine.

Définition 2.1 *Soient* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ *et* s *soit un paramètre réel* (*ou complexe*) *On définit la transformée de Laplace de* f *comme*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) &= \mathcal{L}(f(t)) && (2.1)\\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt && (2.2)\\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)\, dt. && (2.3) \end{aligned}$$

Remarque 2.1 *i· Lorsque la limite existe, on dit que l'intégrale* (2.1) *converge. Si la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge et il n'y a pas de transformée de Laplace définie pour*

f .

ii· Le domaine de s est $\mathbb{R}$ *ou de* $\mathbb{C}$*. D'un point de vue mathématique et technique, le domaine de s est assez important. Cependant, d'un point de vue pratique, lors de la résolution d'équations différentielles, le domaine de s est systématiquement ignoré.*

Si $f(t) \equiv 1$ pour $t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} 1 dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^b \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-sb}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

à condition que $s > 0$. Donc

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}.$$

2.1.1 Convergence

Bien que l'opérateur de Laplace puisse s'appliquer à un grand nombre de fonctions, il en existe certaines pour lesquelles l'intégrale (2.1) ne converge pas.

on distingue deux modes particuliers de convergence de l'intégrale de Laplace

Définition 2.2 *L'intégrale* (2.1) *est dite absolument convergente si*

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \left| e^{-st} f(t) \right| dt$$

existe. Si $\mathcal{L}(f(t))$ *converge absolument, alors*

$$\left| \int_b^{b'} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_b^{b'} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \to 0$$

quand $b \to \infty$, *pour tout* $b' > b$. *Cela implique alors que* $\mathcal{L}(f(t))$ *converge également au sens ordinaire de* (2.1)

Définition 2.3 *On dit que l'intégrale* (2.1) *converge uniformément pour* s *dans un domaine* Ω *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* b_0 *tel que si* $b \geq b_0$, *alors*

$$\left| \int_b^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

pour tout s *dans* Ω.

Définition 2.4 *Une fonction* f *présente une discontinuité de saut en un point* t_0 *si*

$$\lim_{t \to t^-} f(t) = f\left(t^-\right) \quad et \quad \lim_{t \to t^+} f(t) = f\left(t^+\right)$$

existent et $f(t^-) \neq f(t^+)$.

Définition 2.5 *On dit que* f *est continue par morceaux sur* $[0, \infty)$ *si*

(i) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ *existe et*

(ii) f *est continue sur tout intervalle fini* $(0, a)$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$, *dans* $(0, a)$ *où* f *présente une discontinuité de saut.*

La continuité par morceaux entraine que sur chaque sous-intervalle, la fonction f est également bornée. C'est-à-dire que :

$$\exists M_i > 0 : |f(t)| \leq M_i,\ \rho_i < t < \rho_{i+1}; \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

Définition 2.6 *Une fonction* f *a un ordre exponentiel* α *s'il existe des constantes* $M > 0$ *et* α, *telles que pour un certain* $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0$$

Remarque 2.2 *i− La fonction exponentielle e^{at} a un ordre exponentiel $\alpha = a$, tandis que l'ordre exponentiel de t^n est $\alpha = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, aussi les fonctions bornées comme $\sin t, \cos t$ ont un ordre exponentiel 0, et e^{-t} a un ordre -1. Par contre, e^{t^2} n'a pas d'ordre exponentiel.*

ii− Si $\beta > \alpha$, alors l'ordre exponentiel α implique l'ordre exponentiel β. On définit l'ordre comme la plus petite valeur de α qui fonctionne.

Théorème 2.1 *[14] la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ d'une fonction f continue par morceaux sur $[0, \infty)$ et d'ordre exponentiel α, existe pour $s > \alpha$ et converge absolument.*

Exemple 2.1 *i− Soit $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $[0, \infty)$ et d'ordre exponentiel a. On a*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(e^{at}\right)(s) &= \int_b^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{s-a}, \qquad (s > a) \end{aligned}$$

ii− Soit $f(t) = t$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int_b^{\infty} e^{-st} t dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} \right) + \frac{1}{s} \int_b^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \frac{1}{s} \mathcal{L}(1)(s) \\ &= \frac{1}{s^2}, \qquad (s > 0). \end{aligned}$$

Et par induction pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\mathcal{L}\left(t^{n}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad (s > 0)\,.$$

Afin d'étendre ce résultat aux valeurs non entières de n, considérons

$$\mathcal{L}\left(t^{\gamma}\right) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} t^{\gamma} dt,$$

Pour $\gamma > -1$, la transformée de Laplace, $\mathcal{L}\left(t^{\gamma}\right)$, existe.

Posons $\theta = st$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t^{\gamma}\right) &= \int_{0}^{\infty} e^{-\theta} \left(\frac{\theta}{s}\right)^{\gamma} \frac{1}{s} d\theta, \\
&= \frac{1}{s^{\gamma+1}} \int_{0}^{\infty} \theta^{\gamma} e^{-\theta} d\theta, \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}}, \qquad \gamma > -1, s > 0
\end{aligned}$$

Pour $t = -\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}
\end{aligned}$$

2.1.2 Propriétés

On note K l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $]0, \infty[$, pour lesquelles La transformée de Laplace existe pour une certaine valeur de s. On sait que lorsque $\mathcal{F}(s)$ existe pour une certaine valeur s_0, alors $\mathcal{F}(s)$ existe pour tout s avec : $s > s_0$.

$i-$ La linéarité.

Si $f_1 \in K$ pour $s > \alpha$, $f_2 \in K$ pour $s > \beta$, alors $f_1 + f_2 \in K$ pour $s > \max\{\alpha, \beta\}$, et

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2)$$

ii− Pour une série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ convergente pour $t \geq 0$, il n'est en général pas possible d'obtenir sa transformée de Laplace en prenant la transformée terme à terme. Cependant, si

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge pour $t \geq 0$, avec

$$|a_n| \leq \frac{k\alpha^n}{n!}$$

pour tout n suffisamment grand et $\alpha > 0, k > 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}\left(t^n\right)(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}, \qquad s > \alpha. \end{aligned}$$

iii− Si $\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ pour $s > 0$; alors

$$\mathcal{F}(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right)(s), \qquad a \in \mathbb{R}, s > a.$$

iv− Si f est continue par morceaux sur $[0, \infty[$ et a un ordre exponentiel α, alors

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}(f(\rho))(s) \to 0, \qquad \text{quand } s \to \infty.$$

En conséquence, toute fonction $\mathcal{F}(s)$ sans ce comportement, par exemple : $\frac{s-1}{s+1}$, $\frac{e^s}{s}$ ou s^2, ne peut pas être la transformée de Laplace d'une fonction f .

Théorème 2.2 (*Théorème de dérivée*) [*14*] *Pour une fonction f continue sur $]0, \infty[$, d'ordre*

exponentiel α et sa dérivée continue par morceaux sur $[0,\infty[$,. on a

$$\mathcal{L}\left(f'\left(\rho\right)\right)=s\mathcal{L}\left(f\left(\rho\right)\right)-f\left(0^{+}\right),\qquad\left(s>\alpha\right)$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}e^{-st}f'\left(\rho\right)d\rho &= \lim_{\substack{a\to0^{+}\\b\to\infty}}\int_{a}^{b}e^{-st}f'\left(\rho\right)d\rho\\ &= \lim_{\substack{a\to0^{+}\\b\to\infty}}\left[e^{-st}f\left(\rho\right)\Big|_{a}^{b}+s\int_{a}^{b}e^{-st}f\left(\rho\right)d\rho\right]\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 2.3 · *Une caractéristique intéressante du théorème* (2.2) *est que nous obtenons* $\mathcal{L}\left(f'\left(\rho\right)\right)$ *sans exiger que* $f'\left(\rho\right)$ *soit d'ordre exponentiel.*

· *Si* f' *est continue sur* $[0,\infty[$ *et d'ordre exponentiel* α*, alors la fonction* f *est aussi continue et du même ordre* α*. En effet, comme* f' *est d'ordre exponentiel,*α*, donc,* $\exists M>0$:

$$\left|f'\left(\rho\right)\right|\leq Me^{\alpha\rho},\qquad\rho\geq\rho_{0},$$

Or

$$f\left(\rho\right)=\int_{\rho_{0}}^{\rho}f'\left(s\right)ds+f\left(\rho_{0}\right),$$

alors

$$\left|f\left(\rho\right)\right|\leq M\int_{\rho_{0}}^{\rho}e^{\alpha\rho}dt+\left|f\left(\rho_{0}\right)\right|,$$

donc

$$\begin{aligned}\left|f\left(\rho\right)\right| &\leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha\rho}+\left|f\left(\rho_{0}\right)\right|\\ &\leq Ce^{\alpha\rho}.\end{aligned}$$

2.1.3 Transformée de Laplace et le calcul fractionnaire

Considérons

$$D_0^{\gamma} u(\rho) = au(\rho) + f(u) + d(\rho) \tag{2.4}$$

où : $0 < \gamma < 1$, $f(u)$ est la partie non linéaire et continue par rapport à u. Assumons que

(i) $\|f(u)\| \leq l\|u\|$, pour une constante $l > 0$,

(ii) $\|d(\rho)\| \leq M$, pour une constante $M > 0$.

Nous avons alors le résultat suivant

Lemme 2.1 *Considérons l'équation différentièlle fractionnaire* (2.2) *et assumons que les hypothéses* (i) *et* (ii) *sont satifaites.*

Proposition 2.1 1− *Si* D_0^{γ} *désigne* ${}^{C}D_0^{\gamma}$, *on a pour tout* $\rho > 0$,

$$\|u(\rho)\| \leq Ce^{p\rho},$$

où $C > 0$ *et* $p > 0$.

2− *Si* D_0^{γ} *désigne* ${}^{RL}D_0^{\gamma}$, *pour tout* $\rho > \xi$,

$$\|u(\rho)\| \leq Ce^{p\rho},$$

où : $C > 0$ *et* $p > 0$ *et* $\xi > 0$.

Proposition 2.2 *Pour* $\gamma > 0$, *on a*

$$\mathcal{L}\left(I_o^{\gamma} u(\rho)\right) = \frac{\mathcal{L}(u(\rho))}{s^{\gamma}}.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(I_o^{\gamma}u(\rho)\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^{\rho}\frac{u(s)}{(\rho-s)^{1-\gamma}}ds\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\mathcal{L}\left(\int_a^{\rho}(\rho-s)^{\gamma-1}u(s)\,ds\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\mathcal{L}\left(\rho^{\gamma-1}\right)\mathcal{L}\left(u(\rho)\right),\end{aligned}$$

cependant

$$\mathcal{L}\left(\rho^{\gamma-1}\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{s^{\gamma}},$$

donc

$$\mathcal{L}\left(I_o^{\gamma}u(\rho)\right)=\frac{\mathcal{L}\left(u(\rho)\right)}{s^{\gamma}}$$

■

Exemple 2.2 *On a les transformations de Laplace suivantes*

- $\mathcal{L}\left(I_o^{\gamma}\rho^{\mu}\right)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\gamma+\mu+1}}, \qquad \gamma>0,\mu>-1,$
- $\mathcal{L}\left(I_o^{\gamma}e^{a\rho}\right)=\frac{1}{s^{\gamma}(s-a)}, \qquad \gamma>0.$

Proposition 2.3 *Soit* $0<\gamma<1$. *Si* $u(\rho), I^{1-\gamma}u(\rho)$ *sont continues sur* $[0,\infty[$ *et d'ordre exponentiel et* ${}^{RL}D_0^{\gamma}u(\rho)$ *est continue morceaux sur* $[0,\infty[$. *Alors*

$$\mathcal{L}\left({}^{RL}D_0^{\gamma}u(\rho)\right)=s^{\gamma}\mathcal{L}\left(u(\rho)\right)-I_0^{1-\gamma}u\left(0^{+}\right).$$

Preuve On a

$${}^{RL}D^{\gamma}u(\rho)=\frac{d}{d\rho}I_0^{1-\gamma}u(\rho)$$

Posons $g(\rho)=I_0^{1-\gamma}u(\rho)$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left({}^{RL}D_0^{\gamma}u(\rho)\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{d}{d\rho}g(\rho)\right)\\ &= s\mathcal{L}\left(g(\rho)\right)-g\left(0^{+}\right)\\ &= s^{\gamma}\mathcal{L}\left(u(\rho)\right)-I_0^{1-\gamma}u\left(0^{+}\right)\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4 *Si les hypothèses* (i) *et* (ii) *sont satisfaites et* $u(\rho)$ *est continue, on peut appliqué la transformée de Laplace sur les deux côtés de* (2.2)*, avec* D_0^γ *désigne* ${}^{RL}D_0^\gamma$*,*

Preuve D'après (1.40) et le théorème (1.5), il existe des constantes $C > 0$ et $p > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \left| {}^{RL}D_0^\gamma u(\rho) \right| &= |a|\,|u(\rho)| + |f(u(\rho))| + |d(\rho)| \\ &\leq (|a| + C)\,u(\rho) + M \\ &\leq (|a| + l)\,u(\rho) + M \\ &\leq Ce^{p(\rho)} \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2 *Si* $u(\rho), u'(\rho)$ *sont continues sur* $[0,\infty[$ *et d'ordre exponentiel et* ${}^{C}D^{\gamma}u(\rho)$ *est continue par morceaux sur* $[0,\infty[$*. Donc*

$$\mathcal{L}\left({}^{C}D_0^\gamma u(\rho)\right) = s^\gamma \mathcal{L}(u(\rho)) - u(0), \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Preuve Par définition

$${}^{C}D_0^\gamma u(\rho) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_a^\rho (\rho - s)^{-\gamma} u'(s)\, ds,$$

implique

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left({}^{C}D_0^\gamma u(\rho)\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \mathcal{L}\left(\rho^{-\gamma}\right) \mathcal{L}(u'(\rho)) \\ &= s^\gamma \mathcal{L}(u(\rho)) - u(0). \end{aligned}$$

■

2.1.4 Transformée inverse de Laplace

Dans le cadre des problèmes physiques, Pour appliquer la transformée de Laplace, il est nécessaire d'invoquer la transformée inverse.

On a

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(s\right)\right) = f\left(t\right), \qquad t \geq 0.$$

où : $\mathcal{F}\left(s\right) = \mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(s\right)$, $\mathcal{L}^{-1}$ est la transformée nverse de Laplace

Si f est une fonction discontinue, alors $\mathcal{L}^{-1}$ peut être plus d'une fonction.

Proposition 2.5 *Des fonctions continues distinctes sur* $[0, \infty[$ *ont des transformées de Laplace distinctes.*

Remarque 2.4 *i· Par conséquence, pour les fonctions continues sur* $[0, \infty[$, $\mathcal{L}^{-1}$ *est défini de manière unique et on peut parler de l'inverse* $\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(s\right)\right) = f\left(t\right)$.

ii· On a

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\lambda_1 \mathcal{F}\left(s\right) + \lambda_2 G\left(s\right)\right) = \lambda_1 f\left(t\right) + \lambda_2 g\left(t\right),$$

où : $\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(s\right) = \mathcal{F}\left(s\right)$ *et* $\mathcal{L}\left(g\left(t\right)\right)\left(s\right) = G\left(s\right)$.

2.2 Convolution

La convolution de deux fonctions, joue un rôle important dans un certain nombre d'applications physiques différentes.

2.2.1 Définition et propriétés

Définition 2.7 *La convolution de* $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ *et* $g \in L^q\left(\mathbb{R}^n\right)$, *avec* $p, q, r \in [1, \infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ *est la fonction* $(f * g) \in L^r\left(\mathbb{R}^n\right)$, *définie par*

$$\left(f * g\right)\left(x\right) = \int f\left(y - x\right) g\left(y\right) dy$$

Définition 2.8 *La convolution de deux fonctions f et g continues par morceaux , est donnée par l'intégrale*

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

Définition 2.9 *Une fonction f est dite causale si $f(t)=0$, pour $t<0$.*

Remarque 2.5 *En physique, le principe de causalité indique qu'un effet ne peut précéder sa cause. Par conséquent, t étant la variable temps, si la fonction R caractérise la réponse d'un système physique à un signal $S(t)$ parvenu au temps $t=0$, cette fonction-réponse doit être nulle pour $t<0$: la fonction R est causale.*

Proposition 2.6 *Soient f et g deux fonctions continues et causales. Alors, la fonction $(f*g)$ existe, elle est causale et*

$$\begin{aligned}(f*g)(\rho) &= \int_0^\rho f(\rho-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\\ &= \int_0^\rho g(\rho-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

Lemme 2.3 *Pour $p,q\in[1,\infty]$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, supposons que $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$. On a, $(f*g)$ existe pour tout x, elle est bornée et continue uniformément. Si de plus, $p>1$, on a $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Lemme 2.4 *Considéron les fonctions f,g et h continues par morceaux. On a*

$i-$ $f*g=g*f$,

$ii-\lambda(f*g)(t)=\lambda f*g=f*\lambda g$,

$iii-$ Associative : $f*(g*h)=(g*f)*h$

$iv-$ Distributivité : $f*(g+h)=f*g+f*h$

Preuve $i-$ On a

$$(f*g)(\rho)=\int_0^\rho f(\rho-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

pour $\theta = \rho - \tau$, on trouve

$$\begin{aligned}(f * g)(\rho) &= \int_0^{\rho} f(\theta)\, g(\rho - \theta)\, d\theta \\ &= (g * f)(\rho).\end{aligned}$$

iii− On a

$$\begin{aligned}[f * (g * h)](\rho) &= \int_0^{\rho} f(\tau)\, (g * h)(\rho - \tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{\rho} f(\tau) \left(\int_0^{\rho - \tau} g(u)\, h(\rho - \tau - u)\, du \right) d\tau,\end{aligned}$$

pour $\theta = u + \tau$, résulte

$$\begin{aligned}[f * (g * h)](\rho) &= \int_0^{\rho} \left(\int_{\tau}^{\rho} f(\tau)\, g(\theta - \tau)\, h(\rho - \theta)\, d\theta \right) d\tau \\ &= \int_0^{\rho} \left(\int_0^{\theta} f(\tau)\, g(\theta - \tau)\, d\tau \right) h(\rho - \theta)\, d\theta \\ &= [(f * g) * h](\rho).\end{aligned}$$

■

Lemme 2.5 *La convolution de $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$; satisfait*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Preuve On a

$$|(f * g)(x)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x - y)\, dy \right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

alors

$$|(f*g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy$$

Puisque $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, donc $|g(x-y)| \leq \|g\|_{\infty}$ presque partout. Ainsi :

$$\begin{aligned} |(f*g)(x)| &\leq \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$

En prenant le supremum, on conclut que :

$$\|f*g\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}$$

■

Proposition 2.7 *Si $f, g \in L^{\infty}(0,T)$; alors on a*

$$\|f*g\|_{\infty} \leq T \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$$

Preuve Pour $\rho \in (0,T)$, on a

$$\begin{aligned} |(f*g)(\rho)| &\leq \int_0^{\rho} |f(\tau)|\,|g(\rho-\tau)|\,d\tau \\ &\leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} \int_0^{\rho} d\tau \\ &\leq \rho \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur $(0,T)$, on conclut que :

$$\begin{aligned} \|f*g\|_{\infty} &\leq \sup_{\rho \in \leq (0,T)} \rho \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} \\ &\leq T \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Transformée de Laplace d'une convolution

Théorème 2.3 *[14] Si f et g sont continues par morceaux sur $[0,\infty[$ et d'ordre exponentiel α, alors*

$$\mathcal{L}\left\{(f*g)(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(\rho)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{g(\rho)\right\}, \qquad s>\alpha$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(\rho)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{g(\rho)\right\} &= \left(\int_0^\infty e^{-s\mu}f(\mu)\,d\mu\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\theta}g(\theta)\,d\theta\right)\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\mu+\theta)}f(\mu)\,g(\theta)\,d\theta\right)d\mu.\end{aligned}$$

Posons $\rho=\mu+\theta$, et comme μ est fixe dans l'integrale interieur, on a

$$\mathcal{L}\left\{f(\rho)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{g(\rho)\right\} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s\rho}f(\mu)\,g(\rho-\mu)\,d\rho d\mu$$

La convergence de $\int_0^\infty\int_0^\infty |e^{-s\rho}f(\mu)\,g(\rho-\mu)|\,d\rho d\mu$, est une conséquence de la convergence absolue des intégrales de f et g, ainsi, on a

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s\rho}f(\mu)\,g(\rho-\mu)\,d\mu d\rho,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(\rho)\}\cdot\mathcal{L}\{g(\rho)\} &= \int_0^\infty\left(\int_0^\rho e^{-s\rho}f(\mu)\,g(\rho-\mu)\,d\mu\right)d\rho\\ &= \int_0^\infty e^{-s\rho}\left(\int_0^\rho f(\mu)\,g(\rho-\mu)\,d\mu\right)d\rho\\ &= \mathcal{L}\{(f*g)(\rho)\}.\end{aligned}$$

■

Exemple 2.3 *Soient $\alpha,\beta>0$. Pour $\rho>0$,déterminons $\mathcal{L}\left\{\rho^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\right\}$.*

Assumons que : $f(\rho)=\rho^{\alpha-1}$ et $g(\rho)=\rho^{\beta-1}$. On a

$$(f*g)(\rho)=\int_0^\rho \tau^{\alpha-1}(\rho-\tau)^{\beta-1}\,d\tau,$$

pour $\tau=\theta\rho$, on obtient

$$\begin{aligned}(f*g)(\rho) &= \rho^{\alpha+\beta-1}\int_0^1\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,d\theta, \qquad (\tau=\theta\rho)\\ &= \rho^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} &= \mathcal{L}\left\{t^{\alpha-1}\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}\right\}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}\left\{\rho^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\right\}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}.$$

Une méthode efficace et pratique pour résoudre les équations différentielles fractionnaires est nécessaire., Ils existent plusieurs méthodes mais elles présentent certains inconvénients. Une partie de ces méthodes sont conçues pour les équations différentielles fractionnaires d'ordre rationnel

et ne fonctionnent pas dans le cas d'un ordre réel arbitraire et d'autre méthodes permet de résoudre seulement des équations différentielles fractionnaires relativement simples. Cependant, la transformée de Laplace est une méthode exempte de ces inconvénients

Chapitre 3

Etude d'un système d'équations différentielles fractionnaires

3.1 Introduction

3.1.1 Inégalité de Gronwall

Lemme 3.1 *Considérons deux fonctions continues* $\alpha(\rho)$ *et* $\beta(\rho)$*, et une fonction positive* $u \in C[0,T]$, $T > 0$. *Si*

$$u'(\rho) \leq \alpha(\rho) u(\rho) + \beta(\rho), \qquad \rho \in [0,T], \tag{3.1}$$

donc,

$$u(\rho) \leq u(0) \exp\left\{ \int_0^\rho \alpha(s)\, ds \right\} + \int_0^\rho \beta(s) \exp\left\{ \int_s^\rho \alpha(\tau)\, d\tau \right\} ds, \qquad \rho \in [0,T]$$

Preuve Pour $\rho \in [0,T]$, introduisons la fonction $v(\rho)$ comme suit

$$v(\rho) = u(\rho) \exp\left\{ -\int_0^\rho \alpha(s)\, ds \right\}, \tag{3.2}$$

implique

$$v^{'}(\rho) = \left(u^{'}(\rho) - \alpha(\rho)\, u(\rho)\right) \exp\left\{-\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\}.$$

De (3.1) , on trouve

$$v^{'}(\rho) \leq \beta(\rho) \exp\left\{-\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} v'(s)\, ds &= v(\rho) - v(0) \\ &\leq \int_0^{\rho} \beta(s) \exp\left\{-\int_0^{s} \alpha(\tau)\, d\tau\right\} ds, \end{aligned} \tag{3.3}$$

en utilisant la définition (3.2) de $v(\rho)$, l'inégalité (3.3) devient

$$u(\rho) \exp\left\{-\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\} - u(0) \leq \int_0^{\rho} \beta(s) \exp\left\{-\int_0^{s} \alpha(\tau)\, d\tau\right\} ds, \tag{3.4}$$

Enfin, la multiplication des deux côtés de l'inégalité (3.4) par $\exp\left\{\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\}$, conduit à

$$u(\rho) \leq u(0) \exp\left\{\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\} + \int_0^{\rho} \beta(s) \exp\left\{-\int_0^{s} \alpha(\tau)\, d\tau\right\} ds.$$

■

Remarque 3.1 *Un cas particuliers du lemme de Gronwall* 3.1 :

$$u^{'}(\rho) \leq \alpha(\rho)\, u(\rho) \Rightarrow u(\rho) \leq u(0) \exp\left\{\int_0^{\rho} \alpha(s)\, ds\right\}$$

et pour $u(0) = 0$, *on a*

$$u(\rho) \leq 0.$$

Lemme 3.2 *Considérons une fonction positive* $u \in C[0,T]$, $T > 0$, *qui satisfait*

$$u(\rho) \leq u(0) + \int_0^\rho \alpha(s)\, u(s)\, ds + \int_0^\rho \beta(s)\, ds, \qquad \rho \in [0,T] \tag{3.5}$$

où : $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho) \in L^1(0,T)$ *et* $\alpha(\rho)$ *est positive, on a par conséquance,* $u(\rho)$ *satifait*

$$u(\rho) \leq u(0) \exp\left\{\int_0^\rho \alpha(s)\, ds\right\} + \int_0^\rho \beta(s) \exp\left\{\int_s^\rho \alpha(\tau)\, d\tau\right\} ds, \qquad \rho \in [0,T]$$

Preuve Pour le cas $\beta \equiv 0$, on note

$$A(\rho) = \int_0^\rho \alpha(s)\, ds, u(0) = u_0 \text{ et } v(\rho) = u(\rho) - u_0 e^{A(\rho)}.$$

L'inégalité (3.5), entraine

$$\begin{aligned}
v(\rho) &\leq \int_0^\rho \alpha(s)\, u(s)\, ds + u_0\left(1 - e^{A(\rho)}\right) \\
&\leq \int_0^\rho \alpha(s)\left(v(s) + u_0 e^{A(s)}\right) ds + u_0\left(1 - e^{A(\rho)}\right) \\
&\leq \int_0^\rho \alpha(s)\, v(s)\, ds + u_0 \int_0^\rho \alpha(s)\, e^{A(s)} ds + u_0\left(1 - e^{A(\rho)}\right) \\
&\leq \int_0^\rho \alpha(s)\, v(s)\, ds + u_0\left(e^{A(s)}\Big|_0^\rho\right) + u_0\left(1 - e^{A(\rho)}\right) \\
&\leq \int_0^\rho \alpha(s)\, v(s)\, ds + u_0\left(e^{A(\rho)} - 1\right) + u_0\left(1 - e^{A(\rho)}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |v(\rho)| &\leq \left| \int_0^\rho \alpha(s) v(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^\rho \alpha(s) |v(s)| ds = w(\rho). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} w'(\rho) &= \alpha(\rho) |v(\rho)| \\ &\leq \alpha(\rho) w(\rho), \end{aligned}$$

et on peut utiliser le lemme 3.1, pour déduire

$$w(\rho) \leq w(0) e^{A(\rho)} = 0,$$

ensuite, on a

$$v(\rho) \leq |v(\rho)| \leq w(\rho) \leq 0.$$

D'où la conclusion.

Maintenant le cas général, posons

$$v(\rho) = u(\rho) - u_0 e^{A(\rho)} - - \int_0^\rho \beta(s) e^{A(\rho)-A(s)} ds,$$

On a

$$v(\rho) \leq \int_0^\rho \alpha(s) u(s) ds + u_0 \left(1 - e^{A(\rho)}\right) + \int_0^\rho \beta(s) e^{A(\rho)-A(s)} ds + \int_0^\rho \beta(s) ds,$$

ainsi que

$$v(\rho) \leq \int_0^\rho \alpha(s) v(s) ds.$$

Suivant la première étape, on conclut le résultat. ■

Remarque 3.2 *Un cas particuliers du lemme de Gronwall* 3.2

$$u'(\rho) \leq \alpha(\rho) u(\rho) \Rightarrow u(\rho) \leq u(0) \exp\left\{ \int_0^\rho \alpha(s)\, ds \right\},$$

et pour $u(0) = 0$*, on a*

$$u(\rho) \leq 0.$$

3.1.2 Application de la transformée de Laplace

Considérons système d'équations fractionnaires suivant

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho) = \int_0^\rho G_1(\rho - s)\, e^{\vartheta(s)} ds, \rho > 0 \\ \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho) = \int_0^\rho G_2(\rho - s)\, e^{w(s)} ds,\ \rho > 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$w(0) = w_0 > 0, \vartheta(0) = \vartheta_0 > 0. \tag{3.7}$$

où : $0 < \sigma_i < 1$, $i = 1, 2$, $\mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre σ.

Les noyaux $G_i : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $i = 1, 2$ sont presumés etre des fonctions locallement integrable telles que

$$G_i \ncong 0 \ a.e.$$

On impose la condition H sur les fonctions G_i , $i = 1, 2$,

$$G_i(\rho) \geq \delta_i > 0; \forall\ \rho > 0. \tag{H}$$

Le problème (3.6), entraine

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^{\rho} G_1(\rho-s)\, e^{\vartheta(s)} ds\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^{\rho} G_2(\rho-s)\, e^{w(s)} ds\right\}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} s^{\sigma_1}\mathcal{L}\{w(\rho)\} - s^{\sigma_1-1} w_0 = \mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\} \\ s^{\sigma_2}\mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} - s^{\sigma_2-1}\vartheta_0 = \mathcal{L}\{G_2(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{w(s)}\right\}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{w(\rho)\} = \frac{s^{\sigma_1-1}}{s^{\sigma_1}} w_0 + \frac{\mathcal{L}\left\{G_1(\rho)\right\}\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\}}{s^{\sigma_1}} \\ \mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} = \frac{s^{\sigma_2-1}}{s^{\sigma_2}}\vartheta_0 + \frac{\mathcal{L}\left\{G_2(\rho)\right\}\mathcal{L}\left\{e^{w(s)}\right\}}{s^{\sigma_2}}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{w(\rho)\} = \frac{w_0}{s} + \frac{1}{s^{\sigma_1}}\mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\} \\ \mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} = \frac{\vartheta_0}{s} + \frac{1}{s^{\sigma_2}}\mathcal{L}\{G_2(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{w(s)}\right\}, \end{cases}$$

Or

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}}\right\} = \frac{\rho^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_1}}\mathcal{L}\{G_i(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{u_i(s)}\right\}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_1}}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\}\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma_1)}\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_1-1}\int_0^{\rho-\tau} G_1(\rho-\tau-s)\, e^{\vartheta(s)} ds, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_2}}\mathcal{L}\{G_i(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{u_i(s)}\right\}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\sigma_2)}\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_2-1}\int_0^{\rho-\tau} G_2(\rho-\tau-s)\, e^{w(s)} ds.$$

Par conséquence

$$\begin{cases} w(\rho) = w_0 + \int_0^{\rho} (\rho - \tau)^{\sigma_1 - 1} Y_1(\rho - \tau)\, d\tau \\ \vartheta(\rho) = \vartheta_0 + \int_0^{\rho} (\rho - \tau)^{\sigma_2 - 1} Y_2(\rho - \tau)\, d\tau, \end{cases}$$

où

$$Y_i(\rho - \tau) = \int_0^{\rho - \tau} G_i(\rho - \tau - s)\, e^{u_i(s)} ds, \qquad i = 1, 2, u_1(s) = w(s), u_2(s) = \vartheta(s).$$

3.2 Existence Locale

On définit une solution douce du problème (3.6), (3.7) comme suit

Définition 3.1 (*Solution douce*) *Soient* $w_0, \vartheta_0 > 0$, *et* $T > 0$. *On dit que* $(w, \vartheta) \in C([0,T]) \times C([0,T])$ *est une solution douce du problème* (3.6), (3.7) *si*

$$w(\rho) = w_0 + \frac{1}{\Gamma(\sigma_1)} \int_0^{\rho} (\rho - \tau)^{\sigma_1 - 1} \int_0^{\rho - \tau} G_1(\rho - \tau - s)\, e^{\vartheta(s)} ds d\tau, \tag{3.8}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \frac{1}{\Gamma(\sigma_2)} \int_0^{\rho} (\rho - \tau)^{\sigma_2 - 1} \int_0^{\rho - \tau} G_2(\rho - \tau - s)\, e^{w(s)} ds d\tau, \tag{3.9}$$

pour $\rho \in [0,T]$.

On démontre que problème (3.6), (3.7) admet une solution douce locale unique, en appliquant le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.1 (*Existence locale*) *Soient* $w_0, \vartheta_0 > 0$. *Si* G_1 *et* G_2 *sont positives et vérifient*

$$G_1(\rho) = \rho^{-\sigma_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{3.10}$$

alors, le problème (3.6), (3.7) *a une solution douce unique* $(w, \vartheta) \in AC([0,T]) \times AC([0,T])$, *pour un temps maximal* $T_{\max} > 0$. *Aussi,* $w(\rho), \vartheta(\rho) > 0$ *pour tout* $0 < \rho < T_{\max}$.

Preuve Pour $T > 0$, définissons l'espace

$$E_{_T} = \left\{ (w, \vartheta) \in C\left([0,T]\right) \times C\left([0,T]\right); \left\|(u,v)\right\|_{_{E_T}} \leq 2\left(w_{_0} + \vartheta_{_0}\right) \right\},$$

où : $\left\|\cdot\right\|_{_{E_T}}$ est la norme définie par :

$$\left\|(w,\vartheta)\right\|_{_{E_T}} = \left\|w\right\|_{_\infty} + \left\|\vartheta\right\|_{_\infty},$$

et

$$\left\|w\right\|_{_\infty} = \sup_{0 \leq \rho \leq T} \left|w\left(\rho\right)\right|.$$

On a $\left(E_{_T}, \left\|\cdot\right\|_{_{E_T}}\right)$ est un espace de Banach.

On introduit, pour tout $(w, \vartheta) \in E_{_T}$, la fonction Ψ définie par

$$\Psi\left(w,\vartheta\right) = \left(\Psi_{_1}\left(w,\vartheta\right), \Psi_{_2}\left(w,\vartheta\right)\right),$$

avec

$$\Psi_{_1}\left(w,\vartheta\right) = w_{_0} + \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{_1}\right)} \int_0^\rho \left(\rho - \tau\right)^{\sigma_{_1}-1} \int_0^{\rho-\tau} G_{_1}\left(\rho - \tau - s\right) e^{\vartheta(s)} ds d\tau, \tag{3.11}$$

et

$$\Psi_{_2}\left(w,\vartheta\right) = \vartheta_{_0} + \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{_2}\right)} \int_0^\rho \left(\rho - \tau\right)^{\sigma_{_2}-1} \int_0^{\rho-\tau} G_{_2}\left(\rho - \tau - s\right) e^{w(s)} ds d\tau, \tag{3.12}$$

Etape 1 : On démontre que $\Psi : E_{_T} \longrightarrow E_{_T}$.

Soit $(w, \vartheta) \in E_{_T}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi\left(w,\vartheta\right)\right\|_{_{E_T}} &= \left\|\Psi_{_1}\left(w,\vartheta\right)\right\|_{_\infty} + \left\|\Psi_{_2}\left(w,\vartheta\right)\right\|_{_\infty} \\
&\leq w_{_0} + \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{_1}\right)} \left\| \int_0^\rho \left(\rho - \tau\right)^{\sigma_{_1}-1} \int_0^{\rho-\tau} G_{_1}\left(\rho - \tau - s\right) e^{\vartheta(s)} ds d\tau \right\|_{_\infty} \\
&\quad + \vartheta_{_0} + \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{_2}\right)} \left\| \int_0^\rho \left(\rho - \tau\right)^{\sigma_{_2}-1} \int_0^{\rho-\tau} G_{_2}\left(\rho - \tau - s\right) e^{w(s)} ds d\tau \right\|_{_\infty},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi\left(w,\vartheta\right)\right\|_{E_T} &\leq w_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_1\right)}\left\|\int_0^{\rho}\left(\rho-\tau\right)^{\sigma_1-1}\int_0^{\rho-\tau}\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_1}e^{\vartheta(s)}dsd\tau\right\|_{\infty}\\
&\quad+\vartheta_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_2\right)}\left\|\int_0^{\rho}\left(\rho-\tau\right)^{\sigma_2-1}\int_0^{\rho-\tau}\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_2}e^{w(s)}dsd\tau\right\|_{\infty}\\
&\leq w_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_1\right)}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}\left(\rho-\tau\right)^{\sigma_1-1}\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_1}d\tau e^{\vartheta(s)}ds\right\|_{\infty}\\
&\quad+\vartheta_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_2\right)}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}\left(\rho-\tau\right)^{\sigma_2-1}\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_2}d\tau e^{w(s)}ds\right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Pour $\tau=\omega\left(\rho-s\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi\left(w,\vartheta\right)\right\|_{E_T} &\leq w_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_1\right)}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{1}\left(1-\omega\right)^{\sigma_1-1}\omega^{-\sigma_1}d\omega e^{\vartheta(s)}ds\right\|_{\infty}\\
&\quad+\vartheta_0+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_2\right)}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{1}\left(1-\omega\right)^{\sigma_2-1}\omega^{-\sigma_2}d\omega e^{w(s)}ds\right\|_{\infty}\\
&\leq w_0+\Gamma\left(1-\sigma_1\right)\int_0^{T}\left\|e^{\vartheta(s)}\right\|_{\infty}ds+\vartheta_0+\Gamma\left(1-\sigma_2\right)\int_0^{T}\left\|e^{w(s)}\right\|_{\infty}ds\\
&\leq w_0+\vartheta_0+T\Gamma\left(1-\sigma_1\right)e^{\|\vartheta(s)\|_{\infty}}+T\Gamma\left(1-\sigma_2\right)e^{\|w(s)\|_{\infty}}\\
&\leq w_0+\vartheta_0+2C_1Te^{2\left(w_0+\vartheta_0\right)},
\end{aligned}$$

avec

$$C_1=\max\left\{\Gamma\left(1-\sigma_1\right),\Gamma\left(1-\sigma_2\right)\right\}.$$

Il suffit de choisir T tel que

$$2C_1Te^{2\left(w_0+\vartheta_0\right)}\leq w_0+\vartheta_0,$$

on conclut que $\Psi\left(w,\vartheta\right)\in E_T$.

Etape 2 : On démontre que Ψ est une contraction.

· Pour $(w,\vartheta),\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\in E_{_T}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{_{E_T}} &= \left\|\Psi_{_1}(w,\vartheta)-\Psi_{_1}\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{\infty}+\left\|\Psi_{_2}(w,\vartheta)-\Psi_{_2}\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{\infty}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_{_1})}\left\|\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_{_1}-1}\int_0^{\rho-\tau}G_{_1}(\rho-\tau-s)\left(e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right)dsd\tau\right\|_{\infty}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\sigma_{_2})}\left\|\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_{_2}-1}\int_0^{\rho-\tau}G_{_2}(\rho-\tau-s)\left(e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right)dsd\tau\right\|_{\infty}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_{_1})}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_{_1}-1}G_{_1}(\rho-\tau-s)\,d\tau\left(e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right)ds\right\|_{\infty}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\sigma_{_2})}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_{_2}-1}G_{_2}(\rho-\tau-s)\,d\tau\left(e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right)ds\right\|_{\infty}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_{_1})}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_{_1}-1}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_{_1}}d\tau\left(e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right)ds\right\|_{\infty}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\sigma_{_2})}\left\|\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_{_2}-1}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_{_2}}d\tau\left(e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right)ds\right\|_{\infty}\\
&\leq \Gamma(1-\sigma_{_1})T\left\|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right\|_{\infty}+\Gamma(1-\sigma_{_2})T\left\|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right\|_{\infty} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

L'inégalité (1.5), entraine

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{_{E_T}} &\leq CTe^{2(w_0+\vartheta_0)}\left[\left\|w(s)-\widetilde{w}(s)\right\|_{\infty}+\left\|\vartheta(s)-\widetilde{\vartheta}(s)\right\|_{\infty}\right]\\
&\leq CTe^{2(w_0+\vartheta_0)}\left\|(w,\vartheta)-\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{_{E_T}},
\end{aligned}$$

et pour un choix T tel que

$$2CTe^{2(w_0+\vartheta_0)}\leq 1,$$

on trouve

$$\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{_{E_T}}\leq\frac{1}{2}\left\|(w,\vartheta)-\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{_{E_T}}.$$

Ainsi Ψ est une contraction. Donc le problème admit, suivant le théorème du point fixe de Banach, une solution douce unique $(w,\vartheta)\in E_{_T}$ sur$[0,T]$

Maintenant, on définit l'intervalle maximal $[0,T_{\max}[$ de l'existence de la solution

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0:\|(w,\vartheta)\|<\infty\right\}.$$

Etape 3 : On démontre l'unicité de la solution douce.

Assumons que $(w,\vartheta),\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\in C\left([0,T_{\max}]\right)\times C\left([0,T_{\max}]\right)$ soient deux solutions douce du problème (3.6) , (3.7). En utilisant (3.10), on a pour $\rho\in[0,T_{\max}]$,

$$\begin{aligned}
|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq C\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_1-1}\int_0^{\rho-\tau}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_1}\left|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|dsd\tau\\
&\quad +C\int_0^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_2-1}\int_0^{\rho-\tau}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_2}\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|dsd\tau\\
&\leq C\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_1-1}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_1}d\tau\left|e^{\vartheta(s)}-e_{\infty}^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds\\
&\quad +C\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}(\rho-\tau)^{\sigma_2-1}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_2}d\tau\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds,
\end{aligned}\tag{3.14}$$

En faisant le changement de variable : $\tau=\theta(\rho-s)$,l'inégalité (3.14) donne

$$\begin{aligned}
|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq C\int_0^{\rho}\int_0^{1}(1-\theta)^{\sigma_1-1}\theta^{-\sigma_1}d\tau\left|e^{\vartheta(s)}-e_{\infty}^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds\\
&\quad +C\int_0^{\rho}\int_s^{\rho}(\rho-\tau)^{\sigma_2-1}(\tau-s)^{-\sigma_2}d\tau\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds,
\end{aligned}$$

ainsi, on a

$$\begin{aligned}
|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq B(1-\sigma_1,\sigma_1)C\int_0^\rho\left|e^{\vartheta(s)}-e_\infty^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds \\
&\quad +B(1-\sigma_2,\sigma_2)C\int_0^\rho\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds \\
&\leq C'\left(\int_0^\rho\left|e^{\vartheta(s)}-e_\infty^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|d\tau+\int_0^\rho\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|d\tau\right), \quad (3.15)
\end{aligned}$$

et grace à l'inégalité (3.13) ,pour $0<\lambda,\mu,\lambda',\mu'<1,\lambda+\mu=1$ et $\lambda'+\mu'=1$, l'inégalité (3.15) devient a

$$\begin{aligned}
|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq C\int_0^\rho e^{\lambda\vartheta(s)+\mu\widetilde{\vartheta}(s)}\left|\vartheta(s)-\widetilde{\vartheta}(s)\right|ds \\
&\quad +C\int_0^\rho e^{\lambda' w(s)+\mu'\widetilde{w}(s)}|w(s)-\widetilde{w}(s)|ds \\
&\leq C\left\|e^{\lambda\vartheta(s)+\mu\widetilde{\vartheta}(s)}\right\|_\infty\int_0^\rho\left|\vartheta(s)-\widetilde{\vartheta}(s)\right|ds \\
&\quad +\left\|e^{\lambda' w(s)+\mu'\widetilde{w}(s)}\right\|_\infty\int_0^\rho|w(s)-\widetilde{w}(s)|ds, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

et comme pour $\rho\in[0,T_{\max}]$, (w,ϑ), $\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)$ existent et par conséquence, $\exists M>0$ tel que

$$\|w(s)\|_\infty,\|\widetilde{w}(s)\|_\infty,\|\vartheta(s)\|_\infty,\left\|\widetilde{\vartheta}(s)\right\|_\infty\leq\frac{M}{2},$$

donc, on a

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda\vartheta(s)+\mu\widetilde{\vartheta}(s)}\right\|_\infty &\leq e^{\lambda\|\vartheta(s)\|_\infty+\mu\|\widetilde{\vartheta}(s)\|_\infty} \\
&\leq e^M,
\end{aligned}$$

et

$$\left\| e^{\lambda' w(s)+\mu' \widetilde{w}(s)} \right\|_{\infty} \leq e^{M}. \tag{3.17}$$

En substituons dans (3.16) on obtient

$$\|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)\|_{\infty}+\left\|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right\|_{\infty} \leq C' e^{M} \int_{0}^{\rho} \left(|w(s)-\widetilde{w}(s)|+\left|\vartheta(s)-\widetilde{\vartheta}(s)\right|\right) ds,$$

et grace à l'inégalité de Gronwall (lemme 3.2), on obtient l'unicité. ■

3.3 Explosion de la solution

3.3.1 Introduction

Dans le contexte des équations différentielles, L'explosion d'une solution fait référence à un scénario où la solution devient illimitée dans un temps fini. Dans de beaucoup de domaines de la physique, de l'ingénierie et des systèmes biologiques, étudier du phénoméne de l'explosion d'une solution est crucial , car elle permet de prédire les singularités, les instabilités et les seuils critiques dans les phénomènes de la vie réelle.

Les équations différentielles fractionnaires, qui étendent les équations différentielles classiques en introduisant des dérivées d'ordre non entier, présentent des effets de mémoire longue et un comportement non local. L'existence de dérivées fractionnaires entraîne souvent de nouveaux types de phénomènes d'explosion qui diffèrent de ceux dans l'ordre différentiel entier. L'intérêt pour de tels problèmes est d'une valeur scientifique et profonde.

La forme la plus simple de singularités spontanées dans les problèmes non linéaires apparaît lorsque la ou les variables tendent vers l'infini lorsque le temps s'approche d'une certaine limite finie $T > 0$. C'est ce que l'on appelle un phénomène d'explosition. L'explosition se produit sous une forme élémentaire dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et l'exemple le plus

simple est le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} u_{t}(t) = u^{2}(t) \\ u(0) = \gamma. \end{cases}$$

Pour la données $a > 0$, il est immédiat qu'une solution unique existe dans l'intervalle de temps $0 < t < T = \frac{1}{a}$. Comme elle est donnée par la formule : $u(t) = \frac{1}{T-t}$, on voit qu'il s'agit d'une fonction régulière pour $t < T$ et aussi que

$$\lim_{t \to T^{-}} u(t) = +\infty.$$

On dit que la solution explose à $t = T$ et aussi que $u(t)$ a explosé à ce moment. À partir de cet exemple, le concept d'explosion peut être largement généralisé comme le phénomène par lequel les solutions cessent d'exister globalement dans le temps en raison de la croissance infinie des variables décrivant le processus d'évolution.

On a le lemme suivant

Lemme 3.3 *Considérons la fonction* $\xi : [0, \infty[$ *définie par*

$$\xi(\rho) = \begin{cases} \Upsilon^{-\kappa} (\Upsilon - \rho)^{\kappa}, 0 \leq \rho \leq \Upsilon \\ 0, \qquad \rho > \Upsilon, \end{cases} \tag{3.18}$$

avec $\kappa >> 1$. *On obtient*

$$D^{\sigma}_{\rho/\Upsilon} \xi(\rho) = \Upsilon^{-\kappa} (\Upsilon - \rho)^{\kappa - \sigma} \frac{\Gamma(\kappa + 1)(1 + \kappa - \sigma)}{\Gamma(\kappa - \sigma + 2)}, \tag{3.19}$$

ainsi

$$\int_{0}^{\Upsilon} D^{\sigma}_{\rho/\Upsilon} \xi(\rho) \, d\rho = \Upsilon^{1-\sigma} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - \sigma + 2)}, \tag{3.20}$$

où : $0 \leq \sigma \leq 1$.

Lemme 3.4 *Soient* G_{1} *et* G_{2} *des fonctions positives telles que :* $G_{i} \ncong 0$ *a.e. Assumons que* ξ *soit donné par* (3.18) .

Supposons que G_1 *st* G_2 *satisfont* (H)*, donc*

$$K_i(s) = \int_s^{\Upsilon} G_i(\rho - s)\,\xi(\rho)\,d\rho \geq \frac{\delta_i}{1+\kappa}\Upsilon^{-\kappa}(\Upsilon-\rho)^{\kappa+1},\ 0 \leq s < \rho \leq \Upsilon,\ i = 1,2. \tag{3.21}$$

aussi

$$\int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\ln\frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)}d\rho \leq \Upsilon^{1-\sigma_1}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}\left(\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}} + \frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)} + \Theta\right). \tag{3.22}$$

Preuve En utilisant la condition (H), on trouve

$$\begin{aligned} K_i(s) &\geq \delta_i\int_s^{\Upsilon}\xi(\rho)\,d\rho \\ &\geq \delta_i\int_s^{\Upsilon}\Upsilon^{-\kappa}(\Upsilon-\rho)^{\kappa}\,d\rho \\ &\geq \frac{\delta_i}{1+\kappa}\Upsilon^{-\kappa}(\Upsilon-\rho)^{\kappa+1}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

L'inegalité (3.23) et l'estimation (3.19), nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} &\leq \frac{\Upsilon^{-\kappa}(\Upsilon-\rho)^{\kappa-\sigma_1}}{\Upsilon^{-\kappa}(\Upsilon-\rho)^{\kappa+1}} \times \frac{2\Gamma(\kappa+1)(1+\kappa)(1+\kappa-\sigma_1)}{e\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)\delta_2} \\ &\leq \frac{1}{(\Upsilon-\rho)^{1+\sigma_1}} \times \frac{2\Gamma(\kappa+1)(1+\kappa)(1+\kappa-\sigma_1)}{e\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)\delta_2}, \end{aligned}$$

cela implique que

$$\ln\frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} \leq \ln\frac{1}{(\Upsilon-\rho)^{1+\sigma_1}} \times \frac{2\Gamma(\kappa+1)(1+\kappa)(1+\kappa-\sigma_1)}{e\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)\delta_2}.$$

On en déduit

$$\ln\frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} \leq \Theta_1 + \ln\left(\frac{1}{(\Upsilon-\rho)^{1+\sigma_1}}\right),$$

avec

$$\Theta_{_1}=\ln\frac{2\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{\delta_{_2}e\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)},$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Upsilon}D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_1}\xi\left(\rho\right)\ln\frac{2D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_1}\xi\left(\rho\right)}{eK_{_2}\left(\rho\right)}d\rho &\leq \frac{\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{\Gamma\left(\kappa-\sigma_{11}+2\right)}\Upsilon^{-\kappa}\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}\left[\Theta_{_1}+\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)\right]d\rho\\
&\leq \Upsilon^{-\kappa}\frac{\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)}\left[\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)d\rho\right.\\
&\quad\left.+\Theta_{_1}\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}d\rho\right]\\
&\leq \Upsilon^{-\kappa}\frac{\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)}\left[\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)d\rho\right.\\
&\quad\left.+\frac{\Theta_{_1}}{1+\kappa-\sigma_1}\left(-\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\kappa-\sigma_1}\Big|_0^{\Upsilon}\right)d\rho\right]\\
&\leq \Upsilon^{-\kappa}\frac{\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)}\left[\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)d\rho\right.\\
&\quad\left.+\frac{\Theta_{_1}}{1+\kappa-\sigma_1}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}\right].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\alpha_1}}\right)d\rho &= \frac{-1}{1+\kappa-\alpha_1}\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)\Big|_0^{\Upsilon}\\
&\quad+\frac{1+\kappa}{1+\kappa-\sigma_1}\int_0^{\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\kappa-\sigma_1}\left(\Upsilon-\rho\right)^{-1}D\Upsilon\\
&= \frac{-1}{1+\kappa-\sigma_1}\lim_{\rho\to\Upsilon}\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\sigma_1}}\right)\\
&\quad+\frac{1}{1+\kappa-\sigma_1}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\\
&\quad+\frac{1+\kappa}{1+\kappa-\sigma_1}\left(\frac{-1}{1+\kappa-\alpha_1}\left(\Upsilon-\rho\right)^{1+\kappa-\alpha_1}\Big|_0^{\Upsilon}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquence, on trouve

$$\int_0^{\Upsilon}(\Upsilon-\rho)^{\kappa-\sigma_1}\ln\left(\frac{1}{(\Upsilon-\rho)^{1+\alpha_1}}\right)d\rho=\frac{1}{1+\kappa-\sigma_1}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}+\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)^2}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1},$$

on peut conclure que

$$\begin{aligned}\int_0^{\Upsilon}D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\ln\frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)}d\rho &\leq \Upsilon^{-\kappa}\frac{\Gamma(\kappa+1)(1+\kappa-\sigma_1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}\left[\frac{1}{1+\kappa-\sigma_1}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)^2}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}+\frac{\Theta_1}{1+\kappa-\sigma_1}\Upsilon^{1+\kappa-\sigma_1}\right]\\ &\leq \Upsilon^{1-\sigma_1}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\alpha_1+2)}\left(\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\alpha_1}}+\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)}+\Theta_1\right).\end{aligned}$$

D'une manière identiqie, on déduit

$$\int_0^{\Upsilon}D^{\sigma_2}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\ln\frac{2D^{\sigma_2}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)}d\rho\leq\Upsilon^{1-\sigma_2}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\left(\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}+\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_2)}+\Theta_2\right),$$

avec

$$\Theta_2=\ln\frac{2\Gamma(\kappa+1)(1+\kappa-\sigma_2)(1+\kappa)}{e\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)\delta_1}.$$

■

3.3.2 Explosion de la solution

Définition 3.2 (*Solution faible*) *Soient* $\Upsilon>0$ *et* $w_0>0,\vartheta_0>0$. *On dit que* $(w,\vartheta)\in AC[0,\Upsilon]\times AC[0,\Upsilon]$ *est une solution faible du problème* (3.6), (3.7) *si*

$$\begin{cases}\int_0^{\Upsilon}\xi(\rho)\mathbf{D}^{\sigma_1}_{0/\rho}w(\rho)d\rho=\int_0^{\Upsilon}\xi(\rho)\int_0^{\rho}G_1(\rho-s)e^{\vartheta(s)}dsd\rho,\\ \int_0^{\Upsilon}\xi(\rho)\mathbf{D}^{\sigma_2}_{0/\rho}\vartheta(\rho)d\rho=\int_0^{\Upsilon}\xi(\rho)\int_0^{\rho}G_2(\rho-s)e^{w(s)}dsd\rho,\end{cases}$$

pour toutes les fonction test positive ξ *telles que* $D^{\sigma_i}_{\rho/\Upsilon}\xi$, $i=1,2$, *existent avec* $\xi(\Upsilon)=0$.

Théorème 3.2 *Soient* $w_0>0$ *et* $\vartheta_0>0$. *Supposons que* G_1 *et* G_2 *sont positives et vérifient*

$$G_1 \ncong 0 \ p.p$$

Si G_1 *et* G_2 *satisfont* (H), *alors toute solution du problème* $(3.6),(3.7)$ *explose dans un temps fini.*

Preuve Par contradiction. Supposons que (w,ϑ) est une solution globale du problème $(3.6),(3.7)$; on obtient

$$\int_0^\Upsilon w(\rho)\, D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho = w_0\int_0^\Upsilon D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho + \int_0^\Upsilon \xi(\rho)\int_0^\rho e^{\vartheta(s)}G_1(\rho-s)\, dsd\rho, \tag{3.24}$$

et

$$\int_0^\Upsilon \vartheta(\rho)\, D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)\, d\rho = \vartheta_0\int_0^\Upsilon D^{\sigma_2}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho + \int_0^\Upsilon \xi(\rho)\int_0^\rho e^{w(s)}G_2(\rho-s)\, dsd\rho. \tag{3.25}$$

Posons

$$\Pi_1 := \int_0^\Upsilon \xi(\rho)\int_0^\rho G_1(\rho-s)\, e^{\vartheta(s)}dsd\rho,$$

et

$$\Pi_2 := \int_0^\Upsilon \xi(\rho)\int_0^\rho e^{w(s)}G_2(\rho-s)\, dsd\rho.$$

On peut construire les integrales $\Pi_1$et Π_2 sous la forme

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \int_0^\Upsilon e^{\vartheta(s)}\int_s^\Upsilon \xi(\rho)\, G_1(\rho-s)\, d\rho ds \\ &= \int_0^\Upsilon K_1(s)\, e^{\vartheta(s)}ds,\end{aligned} \tag{3.26}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \int_0^{\Upsilon} e^{w(s)} \int_s^{\Upsilon} G_2(\rho - s)\,\xi(\rho)\,d\rho ds \\ &= \int_0^{\Upsilon} K_2(s)\, e^{w(s)} ds, \end{aligned} \tag{3.27}$$

où

$$K_i(s) = \int_s^{\Upsilon} \xi(\rho)\, G_i(\rho - s)\, d\rho, 0 \le s < \rho \le \Upsilon,\ i = 1, 2. \tag{3.28}$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$PS \le Ze^P + S \ln\left(\frac{S}{eZ}\right),\ \text{for each } P \ge 0, S \ge 0 \text{ and } Z \ge 0, \tag{3.29}$$

on trouve

$$\int_0^{\Upsilon} w(\rho)\, D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho \le \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} K_2(\rho)\, e^{w(\rho)} d\rho + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho \tag{3.30}$$

et

$$\int_0^{\Upsilon} \vartheta(\rho)\, D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)\, d\rho \le \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho. \tag{3.31}$$

L'utilisation de (3.24) − (3.27) conduit à

$$\begin{aligned}\int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho + w_0 \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho &\le \frac{1}{4}\int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho + \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho \\ &\quad + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho, \end{aligned} \tag{3.32}$$

et

$$\int_0^{\Upsilon} K_2(\rho)\, e^{w(\rho)} d\rho + \vartheta_0 \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)\, d\rho \;\leq\; \frac{1}{4}\int_0^{\Upsilon} K_2(\rho)\, e^{w(\rho)} d\rho + \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho. \tag{3.33}$$

En tenant en compte (3.21) , les inegalities (3.32) et (3.33) deviennent

$$\int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho + \Upsilon^{1-\sigma_1} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)} w_0 \;\leq\; \frac{1}{4}\int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho + \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho, \tag{3.34}$$

et

$$\int_0^{\Upsilon} K_2(\rho)\, e^{w(\rho)} d\rho + \Upsilon^{1-\sigma_2} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)} \vartheta_0 \;\leq\; \frac{1}{4}\int_0^{\Upsilon} e^{w(\rho)} K_2(\rho)\, d\rho + \frac{1}{2}\int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho + \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho. \tag{3.35}$$

Si l'on pose :

$$M_1 \;:=\; \int_0^{\Upsilon} K_2(\rho)\, e^{w(\rho)} d\rho,\; M_2 := \int_0^{\Upsilon} K_1(\rho)\, e^{\vartheta(\rho)} d\rho,$$

$$\Lambda \;:=\; \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_1}_{\rho/\Upsilon}\xi(\rho)}{eK_2(\rho)} d\rho,\; \Sigma := \int_0^{\Upsilon} D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho) \ln \frac{2D^{\sigma_2}_{0/\rho}\xi(\rho)}{eK_1(\rho)} d\rho,$$

alors, (3.34) et (3.35) deviennent

$$\Upsilon^{1-\sigma_1} \frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)} w_0 + M_2 \leq \frac{2}{3}\Sigma + \frac{4}{3}\Lambda, \tag{3.36}$$

et

$$\Upsilon^{1-\sigma_2}\frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\vartheta_0+M_1\leq\frac{2}{3}\Lambda+\frac{4}{3}\Sigma. \tag{3.37}$$

Donc

$$\Upsilon^{1-\sigma_1}\frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}w_0\leq\frac{2}{3}\Sigma+\frac{4}{3}\Lambda, \tag{3.38}$$

et

$$\Upsilon^{1-\sigma_2}\frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\vartheta_0\leq\frac{2}{3}\Lambda+\frac{4}{3}\Sigma. \tag{3.39}$$

Les inégalities (3.38) et (3.39) nous permettent d'écrire

$$w_0\leq\Upsilon^{\sigma_1-1}\frac{3\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}{4\Gamma(\kappa+1)}\left(\frac{2}{3}\Sigma+\frac{4}{3}\Lambda\right),$$

et

$$\vartheta_0\leq\Upsilon^{\sigma_2-1}\frac{3\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}{4\Gamma(\kappa+1)}\left(\frac{2}{3}\Lambda+\frac{4}{3}\Sigma\right).$$

Utiliser (3.23) conduit à

$$\begin{aligned}w_0 &\leq \Upsilon^{\sigma_1-1}\frac{3\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}{4\Gamma(\kappa+1)}\left(\frac{2}{3}\left[\Upsilon^{1-\sigma_2}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_2)}+\Theta_2+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}\right)\right]\right.\\ &\left.+\frac{4}{3}\left[\Upsilon^{1-\sigma_1}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)}+\Theta_1+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right)\right]\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vartheta_0 &\leq \Upsilon^{\sigma_2-1}\frac{3\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}{4\Gamma(\kappa+1)}\left(\frac{2}{3}\left[\Upsilon^{1-\sigma_1}\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)}+\Theta_1+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right)\right]\right.\\ &\left.+\frac{4}{3}\left[\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\Upsilon^{1-\alpha_2}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_2)}+\Theta_2+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}\right)\right]\right),\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}w_0 &\leq \Upsilon^{\sigma_1-\sigma_2}\frac{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)}{2\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_2)}+\Theta_2+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}\right)\\ &+\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)}+\Theta_1+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}\vartheta_{_0} \;\leq\; & \Upsilon^{\sigma_2-\sigma_1}\frac{\Gamma\left(\kappa-\sigma_{_2}+2\right)}{2\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_1)}+\Theta_{_1}+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right)\\ & +\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_{_2})}+\Theta_{_2}+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}\right)\Bigg). \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

· Si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ la limite supérieure dans (3.41) a pour valeur limite $-\infty$ lorsque $\Upsilon \to \infty$. Cela donne la contradiction $\vartheta_{_0} < 0$.

· Si $\sigma_1 > \sigma_2$ la limite supérieure dans (3.40) a pour valeur limite$-\infty$ lorsque $\Upsilon \to \infty$. Cela donne la contradiction $w_{_0} < 0$. ■

Chapitre 4

Etude d'un Système d'équations différentielles fractionnaires amorties

4.1 Introduction

Les termes d'amortissement dans les systèmes physiques représentent des forces opposées au mouvement, souvent proportionnelles à la vitesse. Dans le cadre des équations différentielles fractionnaires, l'amortissement peut également être modélisé de manière fractionnaire. Cela permet d'introduire une mémoire dans le comportement du système, c'est-à-dire que la réponse du système à une excitation dépend non seulement de son état actuel, mais aussi de ses états passés.

Un exemple classique d'équation différentielle fractionnaire avec amortissement est l'équation du mouvement d'un oscillateur amorti, mais avec des termes d'amortissement fractionnaires. Elle a la forme générale :

$$\gamma D^{\alpha} u(t) + \mu D^{\beta} u(t) + \rho u(t) = f(t),$$

où :γ est la masse, μ est le coefficient d'amortissement, ρ est la constante de raideur, $u(t)$ est la position du système, et $f(t)$ est une force externe appliquée au système,

Les dérivées fractionnaires dans cette équation modélisent un comportement d'amortissement où la dissipation d'énergie dépend non seulement de la vitesse mais aussi des variations passées du mouvement. Ce type de modélisation est plus adapté pour décrire des systèmes ayant une

mémoire, comme dans certains matériaux viscoélastiques.

Les systèmes physiques affichant des comportements fractionnaires d'amortissement peuvent englober des matériaux viscoélastiques, des circuits électriques et des structures mécaniques ayant des effets de friction non linéaires ou des phénomènes biologiques où la dynamique dépend de historiques complexes.

Par exemple, dans le cadre des matériaux viscoélastiques, l'amortissement fractionnaire est utilisé pour décrire des comportements où la déformation du matériau dépend non seulement de la contrainte actuelle mais aussi des contraintes passées.

Les dérivées d'ordre inférieur représentent généralement des termes d'amortissement et contribuent donc à stabiliser le système en plus de l'existence de solutions pour tous les temps. Au contraire, les sources exponencielles ou polynomiales déstabilisent le système et peuvent même forcer les solutions à exploser en un temps fini. En fait, on les appelle parfois termes d'explosion. Lorsqu'ils sont tous les deux présents dans le système, nous aurons une compétition entre ces deux termes.

Des effets non locaux peuvent se produire dans l'espace et dans le temps. Par exemple, dans le domaine temporel, l'extension d'une description locale à une description non locale se manifeste sous la forme d'un effet de mémoire, qui indique en gros que le comportement réel d'un objet donné n'est pas seulement influencé par l'état réel du système, mais aussi par des événements qui se sont produits dans le passé. Une première approche d'interprétation était de la considérée comme une capacité de l'objet à collecter ou à mémoriser des événements antérieurs, une idée remontant à la physique d'Aristote. Mais ce concept semble obsolète depuis l'époque de Newton. Afin de permettre une meilleure compréhension des effets non locaux, nous considérons comme un exemple simple le mouvement d'une particule classique dans un gaz dilué. Le cas du champ libre qui est caractérisé par l'absence de toute frontières, avec un taux de collision donné $\Psi(t)$, la dynamique du système est déterminée par une théorie locale, caractérisé par le terme source $\Psi(t)$, tandis que le même cas incluant des frontières (on introduit quelques limites sur lesquels les molécules de gaz rebondissent) peut être décrit par une théorie non locale.En effet, si à l'instant $t-\tau$ un taux fixe de molécules de gaz est diffusé et à l'instant $t-\frac{\tau}{2}$ elles entrent en collision avec les limites et sont réfléchies, alors à

l'instant t la dynamique du système est alors caractérisée par un terme source qui en plus de $\Psi(t)$ contient terme non local supplémentaire proportionnel à $\Psi(t-\tau)$, c-à-d un terme source $\Psi(t)+\rho\Psi(t-\tau)$ avecρ étant un facteur de proportionnalité. Ile est clair que ni la particule décrite ni le milieu environnant ne mémorisent les événements antérieurs. Il n'y a pas d'intelligence dans le système. Les limites génèrent une réaction retardée du milieu, ce qui se traduit par un effet mémoire.

4.2 Application de la transformée de Laplace

Considérons système d'équations fractionnaires suivant

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho) + \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_1} w(\rho) = \int_0^{\rho} G_1(\rho - s)\, e^{\vartheta(s)} ds, \rho > 0 \\ \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho) + \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_2} \vartheta(\rho) = \int_0^{\rho} G_2(\rho - s)\, e^{w(s)} ds,\ \rho > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

avec

$$w(0) = w_0 > 0, \vartheta(0) = \vartheta_0 > 0. \tag{4.2}$$

oú : $0 < \sigma_i \leq \eta_i < 1$, $i = 1, 2$.

Les fonctions $G_i : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $i = 1, 2$ sont presumés etre des fonctions locallement integrable telles que

$$G_i \ncong 0 \ a.e.$$

On impose la condition H sur les fonctions G_i , $i = 1, 2$, comme sui :

$$(H) : G_i(\rho) \geq \delta_i > 0; \forall\ \rho > 0.$$

Le problème (4.1), entraine

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho)\right\} + \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_1} w(\rho)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\rho G_1(\rho - s)\, e^{\vartheta(s)} ds\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho)\right\} + \mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_2} \vartheta(\rho)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\rho G_2(\rho - s)\, e^{w(s)} ds\right\}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \left(s^{\sigma_1} + s^{\eta_1}\right)\mathcal{L}\{w(\rho)\} - \left(s^{\sigma_1 - 1} + s^{\eta_1 - 1}\right) w_0 = \mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\} \\ \left(s^{\sigma_2} + s^{\eta_2}\right)\mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} - \left(s^{\sigma_2 - 1} + s^{\eta_2 - 1}\right) \vartheta_0 = \mathcal{L}\{G_2(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{w(s)}\right\}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{w(\rho)\} = \frac{\left(s^{\sigma_1 - 1} + s^{\eta_1 - 1}\right)}{\left(s^{\sigma_1} + s^{\eta_1}\right)} w_0 + \frac{\mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\mathcal{L}\{e^{\vartheta(s)}\}}{\left(s^{\sigma_1} + s^{\eta_1}\right)} \\ \mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} = \frac{\left(s^{\sigma_2 - 1} + s^{\eta_2 - 1}\right)}{\left(s^{\sigma_2} + s^{\eta_2}\right)} \vartheta_0 + \frac{\mathcal{L}\{G_2(\rho)\}\mathcal{L}\{e^{w(s)}\}}{\left(s^{\sigma_2} + s^{\eta_2}\right)}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{w(\rho)\} = \frac{w_0}{s} + \frac{1}{s^{\sigma_1}\left(s^{\eta_1 - \sigma_1} + 1\right)} \mathcal{L}\{G_1(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{\vartheta(s)}\right\} \\ \mathcal{L}\{\vartheta(\rho)\} = \frac{\vartheta_0}{s} + \frac{1}{s^{\sigma_2}\left(s^{\eta_2 - \sigma_2} + 1\right)} \mathcal{L}\{G_2(\rho)\}\,\mathcal{L}\left\{e^{w(s)}\right\}. \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}\left(s^{\eta_i - \sigma_i} + 1\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^{\eta_i - \sigma_i} + 1\right)}\right\},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}}\right\} &= \frac{\rho^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\eta_i - \sigma_i} + 1}\right\} &= E_{\eta_i - \sigma_i}\left(-\rho^{\eta_i - \sigma_i}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}\left(s^{\eta_i - \sigma_i} + 1\right)}\right\} = \int_0^\rho \frac{\tau^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} E_{\eta_i - \sigma_i}\left(-(\rho - \tau)^{\eta_i - \sigma_i}\right) d\tau.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_1}\left(s^{\eta_1-\sigma_1}+1\right)}\mathcal{L}\left\{G_i\left(\rho\right)\right\}\mathcal{L}\left\{e^{u_i(s)}\right\}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_i}\left(s^{\eta_i-\sigma_i}+1\right)}\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{G_i\left(\rho\right)\right\}\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{u_i(s)}\right\}\right.\\ &= \int_0^\rho f_i\left(\rho\right)Y_i\left(\rho-\tau\right)d\tau, \qquad i=1,2\end{aligned}$$

où :

$$Y_i\left(\rho-\tau\right)=\int_0^{\rho-\tau}G_1\left(\rho-\tau-s\right)e^{u_i(s)}ds, \qquad i=1,2, u_1\left(s\right)=w\left(s\right), u_2\left(s\right)=\vartheta\left(s\right),$$

et

$$f_i\left(\rho\right)=\int_0^\rho\frac{u^{\sigma_i-1}}{\Gamma\left(\sigma_i\right)}E_{\eta_i-\sigma_i}\left(-\left(\rho-u\right)^{\eta_i-\sigma_i}\right)du, \qquad i=1,2$$

Par conséquence

$$\begin{cases} w\left(\rho\right)=w_0+\int_0^\rho f_1\left(\rho\right)Y_i\left(\rho-\tau\right)d\tau \\ \vartheta\left(\rho\right)=\vartheta_0+\int_0^\rho f_2\left(\rho\right)Y_i\left(\rho-\tau\right)d\tau. \end{cases}$$

4.3 Existence Locale

Définition 4.1 (*Solution douce*) *Soient* $w_0,\vartheta_0>0$, *et* $T>0$. *On dit que* $(w,\vartheta)\in C\left([0,T]\right)\times C\left([0,T]\right)$ *est une solution douce du problème* $(4.1),(4.2)$ *si*

$$w\left(\rho\right) = w_0+\int_0^\rho f_1\left(\rho\right)Y_1\left(\rho-\tau\right)d\tau, \tag{4.3}$$

$$\vartheta\left(t\right) = \vartheta_0+\int_0^\rho f_2\left(\rho\right)Y_2\left(\rho-\tau\right)d\tau, \tag{4.4}$$

pour $\rho \in [0,T]$.

Théorème 4.1 (*Existence locale*) *Soient* $w_0, \vartheta_0 > 0$, *et assumons que* G_1 *et* G_2 *soient deux fonctions positives telles que* (3.10) *est satifaite, alors le problème* (4.1) , (4.2) *a une solution douce unique* $(w,\vartheta) \in AC([0,T]) \times AC([0,T])$. *pour un temps maximal* $T_{\max} > 0$ *et on a* $w(\rho), \vartheta(\rho) > 0$ *pour tout* $0 < \rho < T_{\max}$.

Preuve Pour $T > 0$, considérons l'espace de Banach $\left(E_T, \|\cdot\|_{E_T}\right)$, introduit dans le chapitre 3.

Pour tout $(w,\vartheta) \in E_T$, on introduit la fonction Ψ définie sur E_T par

$$\Psi(w,\vartheta) = (\Psi_1(w,\vartheta), \Psi_2(w,\vartheta)),$$

où

$$\Psi_1(w,\vartheta) = w_0 + \int_0^\rho f_1(\rho) Y_1(\rho-\tau)\, d\tau, \tag{4.5}$$

et

$$\Psi_2(w,\vartheta) = \vartheta_0 + \int_0^\rho f_2(\rho) Y_2(\rho-\tau)\, d\tau, \tag{4.6}$$

Etape 1 : on démontre que $\Psi : E_T \to E_T$.

Pour $(w,\vartheta) \in E_T$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Psi(w,\vartheta)\|_{E_T} &= \|\Psi_1(w,\vartheta)\|_\infty + \|\Psi_2(w,\vartheta)\|_\infty \\ &\leq w_0 + \left\| \int_0^\rho f_1(\rho) Y_1(\rho-\tau)\, d\tau \right\|_\infty \\ &\quad + \vartheta_0 + \left\| \int_0^\rho f_2(\rho) Y_2(\rho-\tau)\, d\tau \right\|_\infty . \end{aligned} \tag{4.7}$$

De la remarque 1.6,on a : $E_{\eta_{i}-\sigma_{i}}\left(-\left(\rho-u\right)^{\eta_{i}-\sigma_{i}}\right)\leq 1$

$$\begin{aligned}
\left|f_{i}\left(\rho\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{i}\right)}\int_{0}^{\rho}u^{\sigma_{i}-1}\left|E_{\eta_{i}-\sigma_{i}}\left(-\left(\rho-u\right)^{\eta_{i}-\sigma_{i}}\right)\right|du\\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\sigma_{i}\right)}\int_{0}^{\rho}u^{\sigma_{i}-1}du\\
&\leq \frac{\rho^{\sigma_{i}}}{\Gamma\left(\sigma_{i}+1\right)}, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

et comme $\left|G_{1}\left(\rho-\tau-s\right)\right|\leq\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_{i}}$,on trouve

$$\begin{aligned}
\left|\int_{0}^{\rho-\tau}G_{1}\left(\rho-\tau-s\right)e^{u_{i}(s)}ds\right| &\leq \left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}\int_{0}^{\rho-\tau}\left(\rho-\tau-s\right)^{-\sigma_{i}}ds\\
&\leq \frac{\left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}\left(\rho-\tau-s\right)^{1-\sigma_{i}}}{1-\sigma_{i}}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

De (4.8) et (4.9), on obtient

$$\left|\int_{0}^{\rho}f_{i}\left(\rho\right)\int_{0}^{\rho-\tau}G_{1}\left(\rho-\tau-s\right)e^{u_{i}(s)}ds\right|\leq\frac{\left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}}{\left(1-\sigma_{i}\right)\Gamma\left(\sigma_{i}+1\right)}\left|\int_{0}^{\rho}\rho^{\sigma_{i}}\left(\rho-\tau-s\right)^{1-\sigma_{i}}ds\right|. \qquad (4.10)$$

Par le chengement de variable : $s=\theta\rho$, (4.10) devient

$$\begin{aligned}
\left|\int_{0}^{\rho}f_{i}\left(\rho\right)\int_{0}^{\rho-\tau}G_{1}\left(\rho-\tau-s\right)e^{u_{i}(s)}ds\right| &\leq \frac{\rho^{2}\left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}}{\left(1-\sigma_{i}\right)\Gamma\left(\sigma_{i}+1\right)}\int_{0}^{1}\theta^{\sigma_{i}}\left(1-\theta\right)^{1-\sigma_{i}}d\theta\\
&\leq \frac{B\left(\sigma_{i}+1,2-\sigma_{i}\right)}{\left(1-\sigma_{i}\right)\Gamma\left(\sigma_{i}+1\right)}\rho^{2}\left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}\\
&\leq \frac{\Gamma\left(1-\sigma_{i}\right)}{2}\rho^{2}\left\|e^{u_{i}(s)}\right\|_{\infty}\\
&\leq \frac{\Gamma\left(1-\sigma_{i}\right)}{2}\rho^{2}e^{\|u_{i}(s)\|_{\infty}}, \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\left\| \int_0^{\rho} f_i(\rho) \int_0^{\rho-\tau} G_1(\rho-\tau-s)\, e^{u_i(s)} ds_{\infty} \right\|_{\infty} \leq \frac{\Gamma(1-\sigma_i)}{2} T^2 e^{\|u_i(s)\|_{\infty}}. \tag{4.12}$$

Par conséquence, (4.7) donne

$$\begin{aligned} \|\Psi(w,\vartheta)\|_{E_T} &\leq w_0 + \frac{\Gamma(1-\sigma_i)}{2} T^2 e^{\|u_i(s)\|_{\infty}} \\ &\quad + \vartheta_0 + \frac{\Gamma(1-\sigma_i)}{2} T^2 e^{\|u_i(s)\|_{\infty}} \\ &\leq w_0 + \vartheta_0 + C_1 T^2 e^{2(w_0+\vartheta_0)}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

avec

$$C_1 = \max\left\{ \frac{\Gamma(1-\sigma_1)}{2}, \frac{\Gamma(1-\sigma_2)}{2} \right\}.$$

Alors, si on choisit T tel que

$$C_1 T^2 e^{2(w_0+\vartheta_0)} \leq w_0 + \vartheta_0,$$

on conclut que $\Psi(w,\vartheta) \in E_T$.

Etape 2 : On démontre que Ψ est une contraction.

· Soient $(w,\vartheta), \left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right) \in E_T$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \Psi(w,\vartheta) - \Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right) \right\|_{E_T} &= \left\| \Psi_1(w,\vartheta) - \Psi_1\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right) \right\|_{\infty} + \left\| \Psi_2(w,\vartheta) - \Psi_2\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right) \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \int_0^{\rho} f_i(\rho) \int_0^{\rho-\tau} G_1(\rho-\tau-s) \left(e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)} \right) ds \right\|_{\infty} \\ &\quad + \left\| \int_0^{\rho} f_i(\rho) \int_0^{\rho-\tau} G_1(\rho-\tau-s) \left(e^{w(s)} - e^{\widetilde{w}(s)} \right) ds \right\|_{\infty}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De l' inégalité (3.10), on trouve

$$\left| \int_0^{\rho} f_i(\rho) \int_0^{\rho-\tau} G_1(\rho-\tau-s) \left(e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)} \right) ds \right| \leq \frac{\Gamma(1-\sigma_i)}{2} \rho^2 \left\| e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)} \right\|_{\infty}.$$

Par conséquence, (4.14) donne

$$\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{E_T}\leq\frac{\Gamma(1-\sigma_1)}{2}T^2\left\|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right\|_{\infty}+\frac{\Gamma(1-\sigma_2)}{2}T^2\left\|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right\|_{\infty}.$$

En utilisant l'inégalité (1.5) ,on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{E_T} &\leq CT^2e^{2(w_0+\vartheta_0)}\left[\left\|w(s)-\widetilde{w}(s)\right\|_{\infty}+\left\|\vartheta(s)-\widetilde{\vartheta}(s)\right\|_{\infty}\right]\\ &\leq CTe^{2(w_0+\vartheta_0)}\left\|(w,\vartheta)-\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{E_T},\end{aligned}$$

et pour un choix T tel que

$$2CT^2e^{2(w_0+\vartheta_0)}\leq 1, \tag{4.15}$$

on trouve

$$\left\|\Psi(w,\vartheta)-\Psi\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{E_T}\leq\frac{1}{2}\left\|(w,\vartheta)-\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\right\|_{E_T}.$$

Ainsi Ψ est une contraction. Par le théorème du point fixe de Banach, le problème admit une solution douce unique $(w,\vartheta)\in E_T$ sur$[0,T]$

Maintenant, on définit l'intervalle maximal $[0,T_{\max}[$ de l'existence de la solution

$$T_{\max}=\sup\{T>0:\|(w,\vartheta)\|<\infty\}.$$

Etape 3 : On démontrel'unicité de la solution douce.

Assumons que $(w,\vartheta),\left(\widetilde{w},\widetilde{\vartheta}\right)\in C([0,T_{\max}])\times C([0,T_{\max}])$ soient deux solutions douce du problème (4.1) , (4.2). Pour $\rho\in[0,T_{\max}]$, on a

$$\begin{aligned}|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq \int_0^{\rho}f_1(\rho)\left(\int_0^{\rho-\tau}G_1(\rho-\tau-s)\left(e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right)ds\right)d\tau \quad (4.16)\\ &\quad+\int_0^{\rho}f_2(\rho)\left(\int_0^{\rho-\tau}G_2(\rho-\tau-s)\left(e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right)ds\right)d\tau \quad (4.17)\end{aligned}$$

Des inégalitées (4.8) et (4.9) ; on a

$$\begin{aligned}
|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq \int_0^{\rho}|f_1(\rho)|\left(\int_0^{\rho-\tau}|G_1(\rho-\tau-s)|\left|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds\right)d\tau \\
&\quad+\int_0^{\rho}|f_2(\rho)|\left(\int_0^{\rho-\tau}|G_2(\rho-\tau-s)|\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds\right)d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_1+1)}\int_0^{\rho}\tau^{\sigma_1}\left(\int_0^{\rho-\tau}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_1}\left|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds\right)d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_2+1)}\int_0^{\rho}\tau^{\sigma_2}\left(\int_0^{\rho-\tau}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_2}\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds\right)d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_1+1)}\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}\tau^{\sigma_1}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_1}d\tau\left|e^{\vartheta(s)}-e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right|ds,
\end{aligned}$$

donc

$$|w(\rho)-\widetilde{w}(\rho)|+\left|\vartheta(\rho)-\widetilde{\vartheta}(\rho)\right|\leq\frac{1}{\Gamma(\sigma_2+1)}\int_0^{\rho}\int_0^{\rho-s}\tau^{\sigma_2}(\rho-\tau-s)^{-\sigma_2}d\tau\left|e^{w(s)}-e^{\widetilde{w}(s)}\right|ds. \quad (4.18)$$

Posons : $\tau = \theta(\rho - s)$, l'inégalité (4.18), devient

$$\begin{aligned}
|w(\rho) - \widetilde{w}(\rho)| + \left|\vartheta(\rho) - \widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma_1 + 1)} \int_0^\rho (\rho - s) \int_0^1 \theta^{\sigma_1} (1-\theta)^{-\sigma_1} d\theta \left|e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\sigma_2 + 1)} \int_0^\rho (\rho - s) \int_0^1 \theta^{\sigma_2} (1-\theta)^{-\sigma_2} d\theta \left|e^{w(s)} - e^{\widetilde{w}(s)}\right| ds \\
&\leq \frac{B(\sigma_1 + 1, 1 - \sigma_1)}{\Gamma(\sigma_1 + 1)} \int_0^\rho (\rho - s) \left|e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right| ds \\
&\quad + \frac{B(\sigma_2 + 1, 1 - \sigma_2)}{\Gamma(\sigma_2 + 1)} \int_0^\rho (\rho - s) \left|e^{w(s)} - e^{\widetilde{w}(s)}\right| ds \\
&\leq \Gamma(1 - \sigma_1) \int_0^\rho (\rho - s) \left|e^{\vartheta(s)} - e^{\widetilde{\vartheta}(s)}\right| ds \\
&\quad + \Gamma(1 - \sigma_2) \int_0^\rho (\rho - s) \left|e^{w(s)} - e^{\widetilde{w}(s)}\right| ds, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

et grace à l'inégalité (3.13), pour $0 < \lambda, \mu, \lambda', \mu' < 1, \lambda + \mu = 1$ et $\lambda' + \mu' = 1$, l'inégalité (4.19) devient

$$\begin{aligned}
|w(\rho) - \widetilde{w}(\rho)| + \left|\vartheta(\rho) - \widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq \Gamma(1 - \sigma_1) \int_0^\rho (\rho - s) e^{\lambda\vartheta(s) + \mu\widetilde{\vartheta}(s)} \left|\vartheta(s) - \widetilde{\vartheta}(s)\right| ds \\
&\quad + \Gamma(1 - \sigma_2) \int_0^\rho (\rho - s) e^{\lambda' w(s) + \mu' \widetilde{w}(s)} |w(s) - \widetilde{w}(s)| ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|w(\rho) - \widetilde{w}(\rho)| + \left|\vartheta(\rho) - \widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq \Gamma(1 - \sigma_1) \left\|e^{\lambda\vartheta(s) + \mu\widetilde{\vartheta}(s)}\right\|_\infty \int_0^\rho (\rho - s) \left|\vartheta(s) - \widetilde{\vartheta}(s)\right| ds \\
&\quad + \Gamma(1 - \sigma_2) \left\|e^{\lambda' w(s) + \mu' \widetilde{w}(s)}\right\|_\infty \int_0^\rho (\rho - s) |w(s) - \widetilde{w}(s)| ds, \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

et comme pour $\rho \in [0, T_{\max}]$, (w, ϑ), $\left(\widetilde{w}, \widetilde{\vartheta}\right)$ existent, et en utilisant (3.17) et (3.18), on obient

$$\begin{aligned} |w(\rho) - \widetilde{w}(\rho)| + \left|\vartheta(\rho) - \widetilde{\vartheta}(\rho)\right| &\leq Ce^{M} \int_0^{\rho} (\rho - s) \left[\left|\vartheta(s) - \widetilde{\vartheta}(s)\right| + |w(s) - \widetilde{w}(s)|\right] ds \\ &\leq C' \int_0^{\rho} (\rho - s) \left[\left|\vartheta(s) - \widetilde{\vartheta}(s)\right| + |w(s) - \widetilde{w}(s)|\right] ds, \end{aligned}$$

et grace à l'inégalité de Gronwall (lemme 3.2), on obtient l'unicité. ■

4.4 Explosion de la solution

Définition 4.2 (*Solution faible*) *Soient* $\Upsilon > 0$ *et* $w_0 > 0, \vartheta_0 > 0$. *On dit que* $(w, \vartheta) \in AC[0, \Upsilon] \times AC[0, \Upsilon]$ *est une solution faible du problème* (4.1), (4.2) *si*

$$\begin{cases} \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_1} w(\rho) d\rho + \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_1} w(\rho) d\rho = \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \int_0^{\rho} G_1(\rho - s) e^{\vartheta(s)} ds d\rho, \\ \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \mathbf{D}_{0/\rho}^{\sigma_2} \vartheta(\rho) d\rho + \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \mathbf{D}_{0/\rho}^{\eta_2} \vartheta(\rho) d\rho = \int_0^{\Upsilon} \xi(\rho) \int_0^{\rho} G_2(\rho - s) e^{w(s)} ds d\rho, \end{cases}$$

pour toutes les fonction test positive ξ *telles que* $D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_i} \xi, D_{\rho/\Upsilon}^{\eta_i} \xi$, $i = 1, 2$, *existent avec* $\xi(\Upsilon) = 0$.

Théorème 4.2 *Soient* $w_0 > 0$ *et* $\vartheta_0 > 0$. *Assumons que* G_1 *et* G_2 *soient deux fonctions positives telles que*

$$G_1 \ncong 0 \ p.p$$

Supposons que G_1 *et* G_2 *satisfont* (H), *alors toute solution du problème* (4.1), (4.2), *explose dans un temps fini.*

Preuve Par contradiction. Supposons que (w, ϑ) est une solution globale du problème (4.1), (4.2) ; on obtient

$$\int_0^{\Upsilon} w(\rho) D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_1} \xi(\rho) d\rho + \int_0^{\Upsilon} w(\rho) D_{\rho/\Upsilon}^{\eta_1} \xi(\rho) d\rho = w_0 \int_0^{\Upsilon} D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_1} \xi(\rho) d\rho + w_0 \int_0^{\Upsilon} D_{\rho/\Upsilon}^{\eta_1} \xi(\rho) d\rho + \Pi_2,$$

et

$$\int_0^{\Upsilon} \vartheta(\rho) D_{0/\rho}^{\sigma_2} \xi(\rho) d\rho + \int_0^{\Upsilon} \vartheta(\rho) D_{0/\rho}^{\eta_2} \xi(\rho) d\rho = \vartheta_0 \int_0^{\Upsilon} D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_2} \xi(\rho) d\rho + \vartheta_0 \int_0^{\Upsilon} D_{\rho/\Upsilon}^{\eta_2} \xi(\rho) d\rho + \Pi_1,$$

sachant que Π_1 et Π_2 sont comme dans (3.27) et (3.28). On a

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\Gamma(\kappa+1) w_0 \left(\frac{1}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)} \Upsilon^{1-\sigma_1} + \frac{1}{\Gamma(\kappa-\eta_1+2)} \Upsilon^{1-\eta_1} \right) + \Pi_2 &= \int_0^{\Upsilon} w(\rho) D_{\rho/\Upsilon}^{\sigma_1} \xi(\rho) d\rho \\ &\quad + \int_0^{\Upsilon} w(\rho) D_{\rho/\Upsilon}^{\eta_1} \xi(\rho) d\rho \end{aligned} \tag{4.21}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\Gamma(\kappa+1) \vartheta_0 \left(\frac{1}{\Gamma(\kappa-\sigma_2+2)} \Upsilon^{1-\sigma_2} + \frac{1}{\Gamma(\kappa-\eta_2+2)} \Upsilon^{1-\eta_2} \right) + \Pi_1 &= \int_0^{\Upsilon} \vartheta(\rho) D_{0/\rho}^{\sigma_2} \xi(\rho) d\rho \\ &\quad + \int_0^{\Upsilon} \vartheta(\rho) D_{0/\rho}^{\eta_2} \xi(\rho) d\rho \end{aligned} \tag{4.22}$$

Une procédure comme celle de la preuve du théorème 3.2, (4.21) et (4.22) deviennent

$$\frac{4}{3}\Gamma(\kappa+1) w_0 \left(\frac{1}{\Gamma(\kappa-\sigma_1+2)} \Upsilon^{1-\sigma_1} + \frac{1}{\Gamma(\kappa-\eta_1+2)} \Upsilon^{1-\eta_1} \right) \leq \frac{2}{3}(\Lambda_2+\Sigma_2) + \frac{4}{3}(\Lambda_1+\Sigma_1)$$

$$\frac{4}{3}\Gamma(\kappa+1) \vartheta_0 \left(\frac{1}{\Gamma(\kappa-\alpha_2+2)} \Upsilon^{1-\alpha_2} + \frac{1}{\Gamma(\kappa-\eta_2+2)} \Upsilon^{1-\eta_2} \right) \leq \frac{2}{3}(\Lambda_1+\Sigma_1) + \frac{4}{3}(\Lambda_2+\Sigma_2)$$

avec

$$\Lambda_i \ := \ = \int_0^{\Upsilon} w(\rho) D^{\sigma_i}_{\rho/\Upsilon} \xi(\rho) d\rho, \ i = 1,2$$

$$\Sigma_i \ := \ = \int_0^{\Upsilon} w(\rho) D^{\eta_i}_{\rho/\Upsilon} \xi(\rho) d\rho, \ i = 1,2$$

Comme $0 \leq \eta_i < \sigma_i \leq 1$, $i = 1,2$, on trouve

$$\frac{1}{\Gamma\left(\kappa - \eta_i + 2\right)} \Upsilon^{1-\sigma_i} \leq \frac{1}{\Gamma\left(\kappa - \eta_i + 2\right)} \Upsilon^{1-\eta_i} + \frac{1}{\Gamma\left(\kappa - \sigma_i + 2\right)} \Upsilon^{1-\sigma_i}, \tag{4.23}$$

En se basant sur (4.23), nous induisons

$$\frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma\left(\kappa - \eta_1 + 2\right)} \Upsilon^{1-\sigma_1} w_0 \leq \frac{2}{3}(\Lambda_2 + \Sigma_2) + \frac{4}{3}(\Lambda_1 + \Sigma_1) \tag{4.24}$$

et

$$\frac{4\Gamma(\kappa+1)}{3\Gamma\left(\kappa - \eta_2 + 2\right)} \Upsilon^{1-\sigma_2} \vartheta_0 \leq \frac{2}{3}(\Lambda_1 + \Sigma_1) + \frac{4}{3}(\Lambda_2 + \Sigma_2) \tag{4.25}$$

Des inégalités(4.24) et (4.25), on déduit

$$\begin{aligned} w_0 \ \leq \ & \Upsilon^{\sigma_1 - \eta_2} \frac{\Gamma\left(\kappa - \eta_1 + 2\right)}{2\Gamma\left(\kappa - \eta_2 + 2\right)} \left(\frac{1+\kappa}{\left(1 + \kappa - \eta_2\right)} + \Theta_2 + \ln \frac{1}{\Upsilon^{1+\eta_2}} \right) \\ & + \Upsilon^{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{\Gamma\left(\kappa - \eta_1 + 2\right)}{2\Gamma\left(\kappa - \sigma_2 + 2\right)} \left(\frac{1+\kappa}{(1 + \kappa - \sigma_2)} + \Theta_4 + \ln \frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}} \right) \\ & + \Upsilon^{\sigma_1 - \eta_1} \left(\frac{1+\kappa}{(1 + \kappa - \eta_1)} + \Theta_1 + \ln \frac{1}{\Upsilon^{1+\eta_1}} \right) \\ & + \frac{\Gamma\left(\kappa - \eta_1 + 2\right)}{\Gamma\left(\kappa - \sigma_1 + 2\right)} \left(\frac{1+\kappa}{(1 + \kappa - \sigma_1)} + \Theta_3 + \ln \frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}} \right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

et

$$\begin{aligned}\vartheta_0 \leq\ & \Upsilon^{\sigma_2-\eta_1}\frac{\Gamma\left(\kappa-\eta_2+2\right)}{2\Gamma\left(\kappa-\eta_1+2\right)}\left(\frac{1+\kappa}{\left(1+\kappa-\eta_1\right)}+\Theta_2+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\eta_1}}\right)\\ &+\Upsilon^{\sigma_2-\sigma_1}\frac{\Gamma\left(\kappa-\eta_2+2\right)}{2\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)}\left(\frac{1+\kappa}{\left(1+\kappa-\eta_1\right)}+\Theta_4+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_1}}\right)\\ &+\Upsilon^{\sigma_2-\eta_2}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\eta_2)}+\Theta_1+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\eta_2}}\right)\\ &+\frac{\Gamma\left(\kappa-\eta_2+2\right)}{\Gamma\left(\kappa-\sigma_2+2\right)}\left(\frac{1+\kappa}{(1+\kappa-\sigma_2)}+\Theta_3+\ln\frac{1}{\Upsilon^{1+\sigma_2}}\right)\end{aligned}\tag{4.27}$$

avec

$$\begin{aligned}\Theta_3 &= \ln\frac{2\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa\right)\left(1+\kappa-\sigma_1\right)}{e\Gamma\left(\kappa-\sigma_1+2\right)\delta_2}\\ \Theta_4 &= \ln\frac{2\Gamma\left(\kappa+1\right)\left(1+\kappa\right)\left(1+\kappa-\sigma_2\right)}{e\Gamma\left(\kappa-\sigma_2+2\right)\delta_2}\end{aligned}$$

en conséquence, on obtient

· Si $\sigma_1 \leq \sigma_2$, la limite supérieure dans (4.27) tend vers $-\infty$ lorsque $\Upsilon \to \infty$. Cela conduit à une contradiction $\vartheta_0 < 0$.

· Si $\sigma_1 > \sigma_2$, la limite supérieure dans (4.26) tend vers $-\infty$ lorsque $\Upsilon \to \infty$. Cela conduit à une contradiction $w_0 < 0$. ■

4.5 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence locale et l'explosion (blow-up) en temps fini des solutions de deux systèmes d'équations différentielles fractionnaires couplées, définies par des dérivées de Caputo et des termes intégraux non linéaires et l'un des deux systèmes avec un terme d'amortissement. Ce dernier système, caractérisé par des non-linéarités exponentielles et des effets de mémoire, pose des défis théoriques importants en raison de l'interaction complexe entre les ordres fractionnaires σ_i, η_i et les noyaux $G_i\ (i = 1, 2)$,.

Notre travail a permis d'établir des conditions suffisantes pour l'existence locale des solutions

en utilisant des théorèmes de point fixe, garantissant ainsi que les solutions sont bien définies dans un voisinage du temps initial. Par ailleurs, nous avons démontré que, sous certaines hypothèses sur les noyaux, les solutions explosent en un temps fini, révélant ainsi l'impact critique de la croissance exponentielle des termes sources sur la dynamique du système. Ces résultats enrichissent la théorie des équations différentielles fractionnaires en fournissant de nouveaux critères d'existence et d'explosion adaptés aux modèles intégrant des effets non locaux et des mémoires longues.

Cette étude ouvre plusieurs perspectives de recherche prometteuses. D'un coté, on peut essayer à étendre ces résultats à des systèmes plus généraux, incluant des opérateurs différentiels fractionnaires de type Riemann-Liouville ou des noyaux singuliers. D'un autre coté, une analyse approfondie du temps d'explosion et du comportement asymptotique des solutions après explosion pourrait offrir des avancées théoriques significatives. Enfin, l'application de ces résultats à des problèmes relevant de la physique, de la biomathématique ou des sciences de l'ingénierie, pour des phénomènes de croissance, de dissipation ou de diffusion avec mémoire, constitue une voie de recherche particulièrement stimulante.

En conclusion, cette thèse peut contribue à une meilleure compréhension des systèmes différentiels fractionnaires et peut fournir un cadre théorique solide pour l'analyse de problèmes similaires. Les résultats obtenus, ainsi que les perspectives qu'ils ouvrent, soulignent l'importance des équations différentielles fractionnaires dans la modélisation des phénomènes complexes et leur potentiel pour des applications interdisciplinaires. Ce travail s'inscrit dans une dynamique de recherche en plein essor et pose, on espère bien des bases pour de futures explorations théoriques et appliquées.

Bibliographie

[1] A. Alsaedi, Ahmad B, M. Kirane, F. Al Musalhi and F. Alzahrani. Blowing-up solutions for a nonlinear time-fractional system. Bulletin of Mathematical Sciences 2017; 7 : 201 − 210.

[2] A. Kadem, M. Kirane, C. M. Kirk and W. E. Olmstead. Blowing-up solutions to systems of fractional differential and integral equations with exponential non-linearities. IMA Journal of Applied Mathematics 2013, Page 1 of 12.

[3] A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations ,North-Holland Mathematics Studies,vol. 204 (2006).

[4] A.M. Ahmad, K.M. Furati and N.E. Tatar. On the nonexistence of global solutions for a class of fractional integro-differential problems. Advances in Difference Equations (2017) ; 2017 : 59.

[5] A.M. Ahmad and N.E. Tatar. Nonexistence of global solutions for a fractional system of strongly coupled integro-differential equations. Turkish Journal of Mathematics (2019) ; 43 : 2715 − 2730.

[6] D. Betounes, Differential equations : Theory and Applications, New York, NY, USA : Springer-Verlag, 2009.

[7] F. Tebessi, M. C. Bahi, B. Rebiai, M. Alrawashdeh, T. Radwan, Non-Existence of global solutions to a system of fractionally damped fractional differential problems, Fractals (2025) 2540095 (14 *pages*)

[8] G. van Dijk, Distribution Theory : Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform (De Gruyter, Berlin, Boston, 2013).

[9] H. D. Junghenn, Principles of Analysis, CRS Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, (2018).

[10] H. K. Pathak, An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory, Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018

[11] I. Alazman, M. Jleli and B. Samet, Nonexistence results for a class of nonlinear fractional differential inequalities involving Erdéleyi-Kober fractional derivatives, Fractals, Vol. 30, No. 10 (2022) 2240197 (8 *pages*)

[12] I. Podlubny, Fractional Differetial Equations, Mathematics in science and engineering, Volume 198, University of Kosice, Slovak republic.

[13] J. Bonnar, The Gamma Function, Treasure Trove of Mathematics (2017) .

[14] J. L. Schiff, The Laplace Transform : Theory and Applications ; Springer : New York, NY, USA, 1999.

[15] J. T. Oden, L. M. Demkowicz, Applied Functional Analysis, CRC Press, london (2018)

[16] J. Yeh, Real Analysis, 3rd ed. WORLD SCIENTIFIC, 2014.

[17] K. B. Oldham, J. Spanier, The fractional calculs, London Academic Press (1974).

[18] K.M. Furati.and M. Kirane. Necessary conditions for the existence of global solutions to systems of fractional differential equations. Fractional Calculus and Applied Analysis 2008; 11 (3) : 281 − 298.

[19] M.A. Ahmad and T. Nasser-Eddine. Nonexistence of global solutions for a fractional system of strongly coupled integro-differential equations. Turkish Journal of Mathematics 2019; 43 : 2715 − 2730.

[20] M. Berbiche and A. Hakem, Finite time blow-up of solutions for damped wave Equation with non linear Memory, Comm. Math. Analysis, (14), *pp.* 72 − 84, (2013).

[21] M. Caputo and F. Mainardi, Linear models of dissipation in anelastic solids, Riv. Nuovo Cimento. 1 (1971), 161 − 198.

[22] M. E. Taylor, Partial differential equations III, Nonlinear Equations, Springer, New York, 1996.

[23] M. Kirane and M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 268 (2002) 217-243.

[24] M. Nagasawa and T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Transactions of the American Mathematical Society. **139** (1969) $301 - 310$.

[25] N. S. Landkof, Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, New York,(1972).

[26] O.J. Farrell and B. Ross, Solved Problems in Analysis : As applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel Functions (New York : Dover, 1971).

[27] P. P. Dyke, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Springer undergraduate mathematics series, Springer, London (2001) .

[28] Q. S. Zhang, A Blow up result for a nonlinear wave equation with damping , C.R. Acad. Sciences, Paris, 2001.

[29] R. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York-London, 1975.

[30] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin (2014).

[31] R. Alsaedi, Variational analysisfor fractional equations with variable exponents : existence, multiplicity and nonexistence results, Fractals. **30** (10) (2022) 2240259.

[32] S G. Georgiev, K. Zennir, W. A. S. Ben Khalifa, A. H. M. Yassin, A. Ghilen, S. A. M. Zubair and N. E. A. Osman, Classical solutions for a BVD for a class impulsive fractional partial differential equations, Fractals, Vol. 30, No. 10 (2022) .

[33] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and derivatives, Theory and application, Yverdon-les-Bains, Switzerland : Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon ; 1993.

[34] S. Ovchinnikov, Measure, Integral, Derivative : A Course on Lebesgue's Theory, Springer Science+Business Media, Springer New York 2013.

[35] T. A. Apostol, Mathematical Analysis (1973)

[36] T. Hadj Kaddour and A. Hakem, Local existence and sufficient conditions of the non- global solution for weighted damped wave equations, Facta univ., Ser. Math. Info., Vol. 32, No5 (2017), $629 - 657$.

[37] T. Saeed, J. L. G. Guirao, Z. SABIR, H. H. Alsulami and Y. G. Sanchez,.A computational approach to solve the nonlinear biological prey-predator system, Fractals, Vol. 30, No. 10 (2022) 2240267 (10 *pages*)

[38] V. Barbu Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Science and Business media, B.V.,Springer, Vol 441.

[39] Y. Povstenko, Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers, Springer (2015) .