الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي،
- تبسة -

Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi –Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil

Soutenance
THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat LMD

En : **Génie Civil** Spécialité : **Structures**

Par : **Mr. MESKI Khaled**

Intitulé de la Thèse

Contribution à l'étude du comportement statique des structures en matériaux avancés sous chargements couplés non linéaires

Soutenu publiquement, le **10/ 11/ 2025**
À l'Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi, Tébessa

Devant le jury composé de :

M. BOUTAGOUGA Djamel	Professeur/ Université de Tébessa	Président
M. MAMEN Belgacem	Professeur/Université de Khenchela	Rapporteur
M. MENASRIA Abderrahmane	MCA / Université de Khenchela	Co-rapporteur
M. ABDERRAHMANI Sifeddine	MCA / Université de Tébessa	Examinateur
M. BOURSAS Farid	MCA / Université de Tébessa	Examinateur
M. REBAI Billel	MCA / Université de Khenchela	Examinateur

Année Universitaire : 2024/2025

‘’ À mes chers parents, mon frère, mes sœurs et mon petit prince **Mouaid.’’**

Remerciements

Avant toute chose, je rends grâce à Allah le Tout-Puissant, qui m'a donné la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener réussir cette thèse. Merci Allah pour tout.

Ce travail est l'aboutissement de plusieurs années d'efforts, mais il n'aurait jamais vu le jour sans le soutien précieux de nombreuses personnes.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à mes parents, dont l'amour, le soutien et les encouragements infaillibles m'ont accompagné à chaque étape de ce parcours. Mon frère et mes sœurs ont également été une source constante de motivation, et je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Belgacem MAMEN, Professeur de l'Université Abbes Laghrour-Khenchela, pour sa patience, ses conseils avisés et son engagement sans faille à mes côtés. Son soutien a été une véritable boussole tout au long de cette aventure. Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance au co-encadreur Dr. Abderrahmane MENASRIA, maître de conférences de l'Université de Khenchela, pour son aide précieuse et ses conseils avisés, qui a été attentif à l'évolution de ma recherche et a apporté toute sa contribution pour réussir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Dr. HAMIDANE H'mida pour son soutien inestimable, ses précieux conseils et son accompagnement tout au long de mon parcours, qui m'ont été d'un soutien vital sur les plans académique et personnel. J'adresse également mes sincères remerciements aux Pr. BOUHADRA Abdelhakim et Dr. Rafik BOUFARAH pour leurs aides précieux et leur bienveillance.

Je tiens à remercier sincèrement tous les membres du jury : Pr. Djamel BOUTAGOUGA, Professeur de l'Université de Tébessa, Monsieur Dr. Sifeddine ABDERRAHMANI, Maître de conférences à l'Université de Tébessa, Monsieur Dr. Farid BOURSAS, Maître de conférences à l'Université de Tébessa et Monsieur Dr. Bilal REBAI, Maître de conférences à l'Université de Khenchela, pour avoir accepté d'évaluer mon travail et pour leurs précieuses remarques.

Je souhaite également exprimer ma profonde reconnaissance au Pr. Elhaddi HARKATI, directeur du laboratoire des mines, pour son encadrement et son soutien précieux. Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieur İsmail ESEN, Professeur à l'Université de Karabük en Turquie, pour son aide et pour m'avoir ouvert de nouvelles perspectives dans mon domaine de recherche.

Je tiens à remercier tous les professeurs et le personnel de l'Université de Tébessa, qui m'ont aidé ou encouragé. J'exprime également mes sincères remerciements à mes amis pour leur encouragement moral et leur soutien.

Enfin, je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui, de manière directe ou indirecte, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Khaled MESKI

Résumé

Le but de ce travail est de développer une nouvelle théorie de déformation en cisaillement élevé quasi-3D pour étudier le comportement en flexion de poutres sandwich fonctionnellement gradués (FGSB), simplement appuyées et soumises à des chargements hygro-thermo-mécanique non linéaire. L'analyse porte sur des poutres sandwich symétriques et asymétriques, avec des peaux en matériau fonctionnellement gradué, De plus, l'influence de l'étirement transversal est prise en compte dans cette étude. Les propriétés des matériaux, le coefficient de dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité varient de manière progressive et continue selon une distribution en loi de puissance (P-FGM), en termes de fractions volumiques des constituants. Le modèle proposé adopte un nouveau champ de déplacement, qui inclut des variables intégrales indéterminées et ne contient que quatre inconnus. Les équations d'équilibres sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel et résolues en utilisant la technique de Navier. De plus, le chargement couplé hygro-thermo-mécanique non linéaire (NL-HTMCL) est intégré dans ces équations. Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation des contraintes et des déplacements non dimensionnels avec ceux obtenus par les autres théories 3D, Quasi-3D, prouvant ainsi l'efficacité et la précision de la théorie proposée. Une étude paramétrique détaillée est également fournie dans cette thèse, quantifiant des termes adimensionnels tels que la flèche, le déplacement axial, et les contraintes, tout en mettant en évidence l'effet des charges thermiques et d'humidité.

Mots clés : Matériaux fonctionnellement gradués, Poutres sandwich composites, comportement en flexion, modélisation analytique, étirement transversal, chargement couplé hygro-thermo-mécanique non linéaire.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطوير نظرية جديدة لتشوه القص العالي شبه ثلاثي الأبعاد (quasi-3D) لدراسة سلوك الانحناء لروافد الساندويتش (روافد ثلاثية الطبقات) المتدرجة وظيفياً (FGSB)، المدعومة ببساطة والمُعرضة لأحمال غير خطية هيدرو-حرارية-ميكانيكية. يركز التحليل على روافد الساندويتش المتناظرة وغير المتناظرة ذات الآسطح العلوية والسفلية المصنوعة من مواد متدرجة وظيفياً (FGM). بالإضافة إلى ذلك، يتم أخذ تأثير التمدد العرضي بعين الاعتبار في هذه الدراسة. تتغير خصائص المواد، معامل التمدد الحراري ومعاملات تركيز الرطوبة بشكل تدريجي ومستمر وفق توزيع قانون القوة (P-FGM)، استنادًا إلى نسب الحجم للمكونات. يعتمد النموذج المقترح على مجال إزاحة جديد يشمل متغيرات تكاملية غير محددة ويحتوي فقط على أربعة مجاهيل. يتم اشتقاق معادلات التوازن باستخدام مبدأ العمل الافتراضي وحلها باستخدام تقنية نافير (Navier). علاوة على ذلك، تم دمج الأحمال المزدوجة غير الخطية هيدرو-حرارية-ميكانيكية (NL-HTMCL) في هذه المعادلات. تُظهر النتائج التي تم الحصول عليها تطابقاً جيداً للإجهادات والإزاحات غيرالابعاد مع تلك التي تم الحصول عليها باستخدام النظريات الثلاثية الأبعاد(3D) وشبه ثلاثية الأبعاد (Quasi-3D)، مما يثبت فعالية ودقة النظرية المقترحة. كما تتضمن هذه الأطروحة دراسة بارامترية تفصيلية تُكمّن المصطلحات اللابُعدية مثل الانحراف، الإزاحة المحورية، والإجهادات، بالإضافة إلى تسليط الضوء على تأثير الأحمال الحرارية والرطوبة.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيًا، روافد الساندويتش المركبة، سلوك الانحناء، النمذجة التحليلية، امتداد مستعرض، التحميل المُقترن الهيدرو-حراري-ميكانيكي غير الخطي.

Abstract

The aim of this work is to develop a new quasi-3D high order shear deformation theory to study the bending behavior of simply supported functionally graded sandwich beams (FGSBs), subjected to nonlinear hygro-thermo-mechanical loadings. The analysis focuses on symmetric and asymmetric sandwich beams, with skins made of functionally graded material. In addition, the influence of transverse stretching is considered in this study. The material properties, thermal expansion and moisture concentration coefficients vary gradually and continuously according to a power-law distribution (P-FGM) in terms of the constituent volume fractions. The proposed model adopts a new field of displacement that includes indeterminate integral variables and contains only four unknowns. The equilibrium equations are derived using the principle of virtual work and solved using the Navier's technique. Furthermore, the nonlinear hygro-thermo-mechanical coupling loading (NL-HTMCL) is integrated into these equations. The results obtained show a strong correlation between the non-dimensional stresses and displacements compared to those obtained from other 3D and quasi-3D theories, which demonstrates the efficiency and accuracy of the present theory. A parametric study is provided and discussed in detail in this thesis, quantifying dimensionless terms such as deflection, axial displacement, and stresses, while highlighting the effects of thermal and moisture loads.

Keywords: Functionally graded materials, Composite sandwich beams, bending behavior, analytical modeling, transverse stretching, nonlinear hygro-thermo-mechanical coupling loading (NL-HTMCL).

Liste des Publications et Communications

Publicalions Internationales

- **Meski**, **K**., Boutrid, A., Menasria, A., Bouhadra, A., Mamen, B., Tounsi, A., & Cuong-Le, T. (2024). Analytical modeling of flexural behavior of advanced composite sandwich beams under nonlinear hygro-thermo-mechanical loads. Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design, 1-19.
- **Meski**, **K**., Zouatnia, N., Menasria, A., Mamen, B., Hadji, L., Bouhadra, A., & Atmane, H. A. (2024). Static behavior of functionally graded sandwich beam with 1D-FG skins and ceramic core using a new quasi-3D HSDT. Advances in Concrete Construction, 18(6), 399.
- **Meski**, **K**., ESEN, I., Menasria, A., Bouhadra, A., Mamen, B., Tounsi, A, & Khedher, K. M. (2025). Elastic Instability of Functionally Graded Sandwich Plates With Auxetic Honeycomb Core Subjected to Thermal and Magnetic Fields. Int. J of S S and Dynamics.

Communications Internationales

- **K**, **Meski**, A. Menasria, A. Bouhadra, B. Mamen, ‘A quasi-3D model theory for vibration analysis of functionally graded rectangular plates’’, the First International Conference on Materials Science and Application ICMS’23, 08-09 February 2023, Khenchla-Algeria.
- **K**, **Meski**, B. Mamen, A. Menasria, ‘Analytical solutions for the thermo-mechanical bending of FG beams using a higher-order shear deformation theory (HSDT) ICCEE2023, 12-14 December 2023, Annaba Algeria.
- **K**, **Meski**, A. Menasria, A. Bouhadra, B. Mamen, ‘Bending analysis of FGM beams under thermo-mechanical loading using a four variable refined beam theory’’, the 3rd International Workshop on Structural Mechanics and Materials, 23 – 24 April Batna2, Algeria.
- **K**, **Meski**, A. Menasria, A. Bouhadra, B. Mamen, ‘Exact Solutions for Nonlinear Static of Flexural Behavior Responses of FGM Beam Under Thermo-Mechanical Loading’’, the 1st SCCEE International Virtual Conference: Building the Future - Innovations and Challenges in Sustainable Civil Engineering, 01 – 03 June 2024 at Abu Dhabi University, University of BALAMAND. Serial No. SCCEE-IVC-06202414.

Table de Matières

Remerciements **i**

Résumé **ii**

Liste des Publications et Communications **v**

Liste des Figures **x**

Liste des Tableaux **xiii**

Liste des Symboles et Abréviations **xiv**

Introduction Générale **1**

Chapitre 1 4

Généralités Sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) 4

1.1 Introduction ……... 4

1.2 Concepts et définitions des matériaux FGM ……. 5

1.3 Historique et développement des FGM ……..... 10

1.4 Comparaison des matériaux FG et des matériaux composites traditionnels ……. 11

1.5 Techniques de fabrication des matériaux FG……. 12

1.5.1 Technique de dépôt en phase vapeur (Vapor deposition technique) ……. 13

1.5.2 Métallurgie des poudres (Power metallurgy) …… 14

1.5.3 Méthode de coulage centrifuge (Centrifugal casting method) …….. 15

1.5.4 Méthode de fabrication additive (Additive manufacturing method) ……. 16

1.6 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués …… 17

1.6.1 Applications aérospatiales ……. 17
1.6.2 Applications automobiles …….. 17
1.6.3 Applications biomédicales …… 18
1.6.4 Applications de défense ……. 19
1.6.5 Applications énergétiques ……. 19
1.6.6 Applications électriques / électroniques …… 19
1.6.7 Applications marines ……. 20
1.6.8 Applications opto-électroniques …… 20
1.6.9 Applications sportifs …….. 20
1.6.10 Applications en génie civil …… 20
1.6.11 Autres applications diverses …….. 21
1.7 Propriétés physiques et mécaniques des matériaux FG ……. 21
1.8 Modélisation des propriétés matérielles effectives des FGM …… 22
1.8.1 Modèles micromécaniques (homogénéisation) ……. 22
1.8.1.1 Modèle de Mori-Tanaka ……..... 23
1.8.1.2 Règle des mélanges (modèle de Voigt) ……. 24
1.8.2 Lois régissantes la variation des propriétés matérielles des FGM …… 24
1.8.2.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM ……... 25
1.8.2.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM ……... 26
1.8.2.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM ……... 27
1.8.2.4 Propriétés matérielles des poutre sandwichs en FGM ……... 28
1.9 Conclusion ……. 28

Chapitre 2 **30**

Théories et Recherches Réalisées sur les Poutres FG 30

2.1 Introduction ……... 30
2.2 Les théories des poutres …… 31

2.2.1 La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT Théorie classique des poutres) …….. 31

2.2.2 Modèle de Timochenko (Théorie des poutres de premier ordre FSDBT) ……. 32

2.2.2.1 Facteur de correction de cisaillement …… 34

2.2.3 La Théorie de déformation en cisaillement d'Ordre Elevé (HSDTS –High Ordre deformation Theory) …….. 35

2.3 Études de recherche rapportées sur les poutres FG ……... 39

2.3.1 Analyse statique des poutres FG ……... 40

2.3.2 Analyse vibratoire des poutre FG …….. 42

2.3.3 Analyse du flambage des poutres FG …… 44

2.4 Différents modèles de distributions hygrothermiques ……... 46

2.4.1 Modèles de distribution polynomiale …… 47

2.4.2 Modèles de distribution d'élévation hygrothermique ……... 48

2.4 Conclusion ……..... 49

Chapitre 3 **51**

Modélisation du Comportement Hygro-Thermo-Mécanique des Poutres Sandwich Fonctionnellement Graduées 'FGSBs' 51

3.1 Introduction ……... 51

3.2 Formulation du problème……... 54

3.2.1 Configuration géométrique……. 54

2.2.2 Propriétés matérielles……. 56

3.3 Formulation théoriques……..... 57

3.3.1 Champ de déplacement et déformations…… 57

3.3.2 Équations constitutives……... 59

3.3.3 Équations d'équilibres ……... 60

3.3.4 Solution analytique de Navier pour poutre sandwich FG…….. 63

3.4 Conclusion ……..... 65

Chapitre 4 **66**

Résultats Numériques et Discussions 66

4.1 Introduction ……... 66

4.2 Procédure du programme de calcul…… 66

4.3 Résultats et discussion……..... 67

4.4 Conclusion ……..... 84

Conclusion Générale **86**

Bibliographie **89**

Liste des Figures

Figure	Description	Page
1.1	Diagramme schématique de (a) FGM et (b) matériau composite stratifié conventionnel.	5
1.2	Premier réalisation d'un matériaux FG métallique au Japon.	6
1.3	Distribution des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur d'une plaque Stratifiée.	7
1.4	Classifications de FGM : (a) gradation continue et (b) gradation discontinue.	7
1.5	Variation des propriétés : (a) continue et (b) discontinue.	8
1.6	Structures graduées (a) au niveau du joint et (b) en surface.	8
1.7	Microstructure à gradation continue avec des constituants métalliques et céramiques (a) Microstructure doucement graduée (b) Vue agrandie et (c) FGM Céramique-Métal.	9
1.8	Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.	9
1.9	Présentation historique des étapes significatives dans la recherche et le développement des FGM.	11
1.10	Caractéristiques des propriétés des matériaux FG par rapport à celles des composites conventionnels.	12
1.11	Diverses représentations schématisations des matériaux.	12
1.12	Le processus de dépôt chimique en phase vapeur (CVD).	14
1.13	Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD).	14
1.14	Processus de fabrication des FGM par métallurgie des poudres.	15
1.15	Appareil pour la méthode de centrifuge et le mouvement des particules solides sous l'effet de la force centrifuge.	16
1.16	Schéma représentatif de la fabrication additive.	16
1.17	Les principaux domaines d'application des FGM.	17

1.18	Pièces en FGM dans les applications aérospatiales.	18
1.19	Pièces en FGM dans les applications automobiles.	18
1.20	Vue schématique de l'implant dentaire FGM avec une composition de matériau graduée.	19
1.21	Courbes des caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité.	21
1.22	Matériau FG à deux phases avec microstructure particulaire.	24
1.23	Géométrie d'une poutre FGM.	25
1.24	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.	26
1.25	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur S-FGM.	27
1.26	Variation du module d'Young E à travers l'épaisseur E-FGM.	27
1.27	Configuration d'une poutre sandwich FG.	28
2.1	Géométrie non déformée et déformée d'une poutre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli (CBT).	32
2.2	Illustration comparative de la géométrie d'une poutre de Timoshenko, avant et après déformation.	33
2.3	Représentation simplifiée d'une poutre selon deux théories des poutres.	34
2.4	Géométrie non déformée et déformée d'une poutre selon le CBT, FSDT et HSDT.	36
2.5	Variation de la fonction de forme ***f(z)*** à travers différents modèles en fonction de l'épaisseur.	38
2.6	Variation de la dérivée de la fonction de forme ***f '(z)*** à travers différents modèles en fonction de l'épaisseur.	38
3.1	Géométrie et système de coordonnées d'une poutre sandwich fonctionnellement graduée (FGSBs).	54
3.2	Variation de la fraction volumique *Vi(z)* en fonction de l'indice de la loi de puissance *k* pour différentes poutres sandwich FG : Type-A (1-0-1), Type-B (1-1-1, 1-2-1, 2-2-1, 2-1-1).	56
3.3	Variation de la fonction de cisaillement $f'(z) = g(z)$.	58

3.4 Variation de température et d'humidité. 60

4.1 Procédure du programme numérique du comportement hygro-thermo-mécanique des poutres sandwiches fonctionnellement graduées. 67

4.2 Évolution du déplacement axial adimensionnel $\bar{u}$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10 76

4.3 Évolution de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h) en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10 77

4.4 Évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10 78

4.5 Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10 79

4.6 Évolution de la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ pour différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3) : (a-c) Schéma 1-0-1 et (b-d) Schéma 2-1-1 80

4.7 Représentation en 3D de l'évolution de la flèche adimensionnelle pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, a/h, k : (a) Flèche en fonction de T_3, C_3, (b) Flèche dépend de : a/h, k, (c) Flèche varie en fonction de : a/h, T_3. 81

4.8 Évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3) : (a-c) Schéma 1-0-1 et (b-d) Schéma 2-1-1 82

4.9 Représentation en 3D de l'évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, k : (a) $\bar{\sigma}_x$ en fonction de T_3, C_3, (b) $\bar{\sigma}_x$ en fonction de T_3, k. 83

4.10 Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) : (a) Schéma 1-0-1 et (b) Schéma 2-1-1 83

4.11 Représentation en 3D de l'évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, k : (a) $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction de T_3, C_3, (b) $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction de T_3, k. 84

Liste des Tableaux

Tableau	Description	Page
1.1	Propriétés physiques et mécaniques des matériaux Céramiques et Métalliques.	22
4.1	Propriétés matérielles utilisées pour la poutre sandwich FG.	68
4.2	Comparaisons de la flèche maximale $\bar{w}$ et des contraintes σ_i adimensionnelles sous une charge uniformément répartie (a/h=5).	69
4.3	Comparaison des flèches maximales adimensionnelles sous chargement thermomécanique linéaire et non linéaire (Type A, a/h=10).	70
4.4	Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique non linéaire (a/h=10, q0=100, T_2=10, T_3=10, C_2 =C_3=0).	71
4.5	Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire (a/h=10, q0=100, T_2=10, T_3=10, C_2 =C_3=100).	73
4.6	Flèches maximales 3D adimensionnelles utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et hygro-thermo-mécanique non linéaire (k=10).	74
4.7	Flèches maximales 3D non dimensionnelles sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.	74

Liste des Symboles et Abréviations

Symbols

P	Propriétés du matériau
V	Fraction volumique
E	Module de Young
V_i	Fraction volumique du constituant i
P_i	Caractéristiques du matériau du composant i
ν	Coefficient de poisson
T	Champs de temperature
C	Concentration d'humidité
T_1, T_2 et T_3	Représente température (constante, linéaire, non linéaire) respectivement.
C_1, C_2 et C_3	Représente les termes d'humidité (constante, linéaire, non linéaire) respectivement.
α	Coefficient de dilatation thermique
β	Coefficients de concentration d'humidité
P_m , P_c	Les caractéristiques matérielles de la céramique et du métal, respectivement.
E_c, E_m	Module de Young des matériaux céramiques et métalliques, respectivement.
α_c, α_m	Le coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal, respectivement.
β_c, β_m	Coefficient de dilatation d'humidité de la céramique et du métal, respectivement.

n	Le numéro de la couche.
$P(z)^{(n)}$	Propriété matérielle en fonction de z de la couche n.
$V^{(n)}(z)$	Fraction volumique en fonction de z de la couche n.
$\nu^{(n)}$	Coefficient de poisson en fonction de z de la couche n.
$E^{(n)}(z)$	Module de Young en fonction de z de la couche n.
k	Indice matériel (Paramètre)
K	Module de compressibilité
h	Épaisseur de la poutre sandwich
h_0, h_1, h_2, h_3	Les positions verticales de la surface inférieure, des deux interfaces entre les couches, et de la surface supérieure, respectivement.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
b	Largeur de la poutre
a	Longueur de la poutre
u, w	Déplacements dans les directions x, z
u_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.
w_b, w_s	Composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement.
ϕ_x	Rotation autour de l'axe y
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement (rotation de la section transversale autour de l'axe y)
ϕ	Effet de l'étirement de l'épaisseur
$\int \theta(x)\, dx$	Variable intégrale indéterminée
K_a	Coefficient dépendant de la géométrie des poutres

A'	Coefficient dépendant de la solution de Navier
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Fonction de déformation de cisaillement transverse (Première dérivée de la fonction $f(z)$)
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
σ_x, σ_z	Contraintes normales
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	déformations normales et transversales
γ_{xz}	Déformations de cisaillements transversales
$Q_{11}^{(n)}(z)$	Coefficient de rigidité élastique de la couche n.
i *et* j	Nombres naturels
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation du travail externe
$\delta u_0, \delta w_0, \delta\theta, \delta\phi$	Variation du champ de déplacements
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_z$	Variation de déformation longitudinale
$\delta\gamma_{xz}$	Variation de déformation transversale
N_{xx}, N_{zz}	Efforts normaux
M_{xx}, P_{xx}	Moments de flexion dans la poutre
Q_{xz}	Effort de cisaillement
q	Charge mécanique
h_n, h_{n-1}	Coordonnées suivant z du haut et du bas de la nième couche.
$\left[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right]$	Termes de rigidité de la poutre en membrane, couplage et flexion, respectivement.

$\left[B_{sij}, D_{sij}, H_{sij}\right]$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement
$\left[L_{ij}, L_{ij}^{a}, R_{ij}, R_{ij}^{a}, A_{55}^{s}\right]$	Constantes mécaniques
$\left[A_{ij}^{T}, {}^{a}B_{ij}^{T}, {}^{b}B_{ij}^{T}, D_{ij}^{T}\right]$	Constantes thermiques
$\left[{}^{a}B_{sij}^{T}, {}^{c}B_{sij}^{T}, {}^{b}D_{sij}^{T}, {}^{c}D_{sij}^{T}, H_{sij}^{T}\right]$	
$\left[L_{ij}^{T}, L_{aij}^{T}, R_{ij}^{T}\right]$	
$\left[A_{ij}^{C}, {}^{a}B_{ij}^{C}, {}^{b}B_{ij}^{C}, D_{ij}^{C}\right]$	Constantes d'humidité
$\left[{}^{a}B_{sij}^{C}, {}^{c}B_{sij}^{C}, {}^{b}D_{sij}^{C}, {}^{c}D_{sij}^{C}, H_{sij}^{C}\right]$	
$\left[L_{ij}^{C}, L_{aij}^{C}, R_{ij}^{C}\right]$	
$U_n, W_n, \theta_n, \phi_n$	Paramètres arbitraires
$q(x)$	La Charge transversale
$[K]$	La Matrice de rigidité de la poutre
$\{P\}$	Vecteur de chargement généralisée
$\{\Delta\}$	Le vecteur des coefficients inconnus
$\sum$	La somme

Abréviations

FGM	Matériaux Fonctionnellement Gradués
SiC	Carbure de Silicium
EPD	Dépôt par électrophorèse
IBAD	Dépôt assisté par faisceau ionique
SHS	Synthèse à haute température auto-propagée
PVD	Le dépôt physique par phase vapeur
PM	Métallurgie des poudres

CVD	Le dépôt chimique par phase vapeur
3D	Trois dimensions
LRVE	les éléments de volume représentatifs locaux
RPT	La théorie de Plaque Raffinée
2D	Deux dimensions
AM	Fabrication additive
CBT	La théorie d'Euler Bernoulli des poutres
NL-TMCL	Chargement couplé thermomécanique non linéaire
TSDT	La théorie des poutres de déformation par cisaillement du troisième ordre
L-TM	Thermomécanique linéaire
SSDBT	La théorie des poutres de déformation en cisaillement sinusoïdal
M	Mécanique
ESDBT	La théorie des poutres de déformation en cisaillement exponentiel
FGSBs	Les poutres sandwich fonctionnellement graduées
FSDBT	La théorie des poutres de premier ordre
NL-HTMCL	Chargement couplé hygro-thermo-mécanique non linéaire
HTM	Hygro-Thermo-Mécanique
HSDTs	La théories de déformation en cisaillement d'Ordre Elevé
NL-TM	Thermomécanique non linéaire
L-HTM	Hygro-Thermo-Mécanique linéaire
NL-HTM	Hygro-Thermo-Mécanique non linéaire

Introduction Générale

Les progrès scientifiques dans le secteur de la technologie des matériaux, ainsi que le développement progressif des industries modernes, ont produit une demande robuste pour des matériaux de plus en plus avancés, possédant les propriétés et les qualités nécessaires. La nécessité de matériaux avancés présentant des caractéristiques spécifiques a engendré une évolution graduelle des matériaux, passant de leur forme fondamentale (monolithique) à celle de composites.

Un matériau composite constitue une catégorie de matériau avancé, composé de deux ou plusieurs matériaux de nature distincte, dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris individuellement. Il se compose d'une matrice dans laquelle sont intégrées des particules ou des fibres désignées sous le terme de "renfort". Cette structure composite permet d'optimiser diverses propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la légèreté, ainsi que d'autres caractéristiques spécifiques. Néanmoins, un problème majeur des matériaux composites conventionnels, qui se composent généralement de couches (à savoir des composites stratifiés, réside dans la discontinuité des propriétés et des contraintes aux interfaces. Cette discontinuité engendre des concentrations de contraintes majeures sous l'effet de chargements mécaniques et thermiques, notamment dans des milieux humides et thermiquement sollicités. Cela peut induire des fissures dans la matrice, ainsi qu'un problème significatif de délamination dû à une transition abrupte de composition, notamment dans un environnement de haute température.

Une stratégie pour atténuer ces conséquences indésirables est l'utilisation de matériaux présentant un gradient de propriétés, également désignés sous l'appellation de matériaux fonctionnellement gradués (***F**unctionally **G**raded **M**aterials " **F**.**G**.**M** "*). Dans ces matériaux, les caractéristiques présentent une variation continue, laquelle est obtenue par une modification graduelle de la fraction volumique des composants, habituellement dans la seule direction de l'épaisseur. Les matériaux à gradient de propriétés éliminent les interfaces nettes souvent présentes dans les matériaux composites, qui sont souvent la cause de défaillances. Ils remplacent cette interface nette par une interface graduelle, permettant ainsi une transition douce d'un matériau à l'autre. Une caractéristique unique des FGM réside dans leur capacité à être adaptés à des applications spécifiques. En effet, grâce à leurs propriétés de variation progressive et à l'inclusion de céramique comme composant, les matériaux à gradient de propriétés se démontrent être d'excellentes barrières thermiques.

Les matériaux fonctionnellement gradués constituent des composites avancés présentant une microstructure hétérogène. De manière générale, ces matériaux sont conçus à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. On peut observer des FGM dans la nature sous la forme d'os, de dents, etc. la nature a conçu ces matériaux pour répondre aux exigences de service

attendues. Cette idée est inspirée de la nature afin de résoudre des problématiques d'ingénierie, de la même manière que les réseaux neuronaux artificiels sont utilisés pour simuler le fonctionnement du cerveau humain. Les FGM ont été initialement conçus au début des années 1980 par des chercheurs japonais, dans le but d'utiliser des matériaux de barrière thermique pour des applications structurelles dans le domaine aérospatial et pour des réacteurs à fusion. En ce jour, des applications ont été identifiées dans plusieurs domaines de l'ingénierie, où ils sont utilisés en tant qu'éléments structuraux tels que des poutres, des plaques, des coques, etc. Par exemple, dans des structures aérospatiales, les secteurs de la production d'énergie, ainsi que dans les pièces de machines, etc. Ces dernières années, ces nouvelles classes de matériaux ont suscité un intérêt considérable qui motive l'importance d'une compréhension approfondie de leur comportement.

Les poutres sandwich fonctionnellement graduées constituent des éléments structuraux composés de deux matériaux différents. En raison de leur faible poids et de leur grande rigidité, ces éléments sont couramment utilisés dans plusieurs industries telles que la construction, l'aérospatiale, les transports, l'aéronautique et la marine. La prévention des risques peut passer par la connaissance des caractéristiques mécaniques essentielles pour éviter la ruine précoce des structures par fatigue ou l'instabilité thermique par flambage, tout en assurant une durée de vie suffisante de la structure. La progression des propriétés mécaniques de la partie inférieure à la partie supérieure permet d'éliminer l'interface entre les différentes couches, qui est une zone d'accumulation et de concentration de contraintes.

Conscients des impacts engendrés par les chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) auxquels sont soumises les poutres sandwich FG dans de nombreux domaines d'application : aérospatial, automobile, aéronautique, génie civil, il est essentiel de procéder à une étude approfondie de la flexion statique de ces poutres dans les conditions de chargement susmentionnées. Dans ces applications, les sandwichs étaient, lors de leurs premières utilisations, composés de couches isotropes. Dans le souci d'intégrer un plus grand nombre de propriétés au sein des infrastructures tout en garantissant leur légèreté, les matériaux composites se sont imposés comme des éléments essentiels pour l'amélioration et l'optimisation des caractéristiques nécessaires.

L'un des principaux avantages de l'emploi de ces matériaux composites réside dans l'excellent rapport poids/rigidité qu'ils présentent, en sus de leur multifonctionnalité intégrée. Dans cette optique, les composites à fibres, en plus de leur légèreté et de leur excellente rigidité, permettent d'optimiser l'orientation de leurs fibres afin d'améliorer la résistance et les caractéristiques de durabilité des structures. Les structures composites sont conçues et ajustées en fonction des domaines spécifiques ainsi que des contraintes auxquelles elles doivent répondre lors de leur utilisation.

Actuellement, le concept de matériaux à gradient de propriétés produit un intérêt accru en ingénierie en raison de sa capacité à offrir une flexibilité dans le contrôle de la microstructure et de la texture des composites. Grâce à ce nouveau concept, il est devenu plus simple d'ajuster les caractéristiques du matériau en fonction des sollicitations et de présenter des modèles robustes pour étudier leur comportement. Cependant, les FGM présentent des comportements complexes qui nécessitent l'utilisation de méthodes analytiques et numériques avancées pour leur analyse. La méthode de Navier a récemment émergé en tant qu'approche en même temps puissante et efficace,

ce qui lui confère une large application dans l'analyse du comportement complexe de ce type de matériaux.

L'objectif de cette étude est d'enrichir les théories existantes et de développer une nouvelle théorie sur la déformation en cisaillement élevé quasi-3D à quatre variables, visant à l'étude du comportement mécanique des poutres sandwich FG simplement appuyées, soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres :

- **Le premier chapitre** offre une présentation approfondie des matériaux fonctionnellement gradués, en abordant leurs propriétés, leur évolution historique, les procédés de fabrication et les domaines d'application, ainsi que les divers modèles micromécaniques et lois de gradation utilisés pour décrire leurs propriétés effectives. Certains FGM existants naturellement ont également été présentés.
- **Le deuxième chapitre** présente, dans sa première partie, les modèles existants avec les diverses formulations de la théorie de l'élasticité ou des modèles théoriques qui la décrivent (tels que la théorie des poutres, des plaques, et des coques) afin d'analyser le comportement mécanique et de définir la conception de ces structures. La deuxième partie est consacrée aux travaux récents dans le domaine dédié aux comportements statique, vibratoires et de flambage des poutres FG, ainsi qu'aux divers modèles de distribution de l'effet hygrothermique. Une lecture générale de leurs principes fondamentaux et de leurs hypothèses est également abordée.
- **Le troisième chapitre** est dédié à la modélisation de la formulation mathématique proposée, laquelle décrit le comportement d'une poutre sandwich fonctionnellement graduée, soumise à un chargement combiné hygro-thermo-mécanique non linéaire, à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé quasi-3D. cette approche vise à analyser le comportement en flexion des poutres sandwich FG simplement appuyées.
- **Le quatrième chapitre** traite de plusieurs exemples numériques portant sur l'analyse de la flexion des poutres sandwich FG. sous des sollicitations hygro-thermo-mécaniques combinées sont présentés et analysés dans le but de valider l'exactitude de la théorie proposée. Nous avons obtenu des courbes illustrant l'efficacité de cette théorie.

Enfin, une conclusion générale relative à la recherche effectuée, incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Généralités Sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)

1.1 Introduction

Le progrès des matériaux constitue le principal moteur du monde dans lequel nous vivons, car tous les domaines de l'activité humaine dépendent de ce développement pour leur performance. L'évolution des matériaux, du monolithique aux alliages, et le développement des composites reposent sur les limites d'une classe de matériaux qui nécessitent le développement d'autres classes. La plupart des applications nécessitent des matériaux aux propriétés contradictoires qui ne peuvent pas être obtenues avec un matériau monolithique. En outre, l'association de différents matériaux reste soumise aux limitations imposées par le comportement thermodynamique de leurs composants et par la limitation imposée par le degré auquel un matériau peut être mélangé avec d'autres. Les matériaux fonctionnellement gradués, possèdent la capacité de satisfaire aux exigences de ces applications. Ces matériaux composites avancés peuvent survivre dans des environnements de travail difficiles, sans perdre leurs propriétés ni subir de défaillance en cours d'utilisation.

Un FGM est caractérisé par un gradient de composition entre deux matériaux, ce qui le rend complètement différent des matériaux composites conventionnels. L'émergence de ce matériau s'explique par l'insuffisance des composites conventionnels, qui se révèlent inadaptés à des conditions de travail exigeantes. Cet échec résulte principalement de l'interface distincte et clairement définie qui se situe entre les différentes couches de matériaux composites. Cette interface induit une concentration élevée de contraintes favorisant ainsi la création de fissures et leur propagation éventuelle, ce qui conduit à la rupture ultime du composite. Ce processus est connu sous le nom de "délamination". Cette interface est systématiquement éliminée dans les FGM, en raison de la variation progressive des fractions volumiques de leurs composants, entraînant ainsi une transition continue de leurs propriétés le long d'une direction définie.

Le concept réel des FGM a été acquis à partir de la nature et utilisé pour résoudre des problématiques d'ingénierie, de la même manière que la nature exploite ces matériaux en fonction de leurs exigences d'application et de leurs domaines d'utilisation.

Les FGM ont été initialement développés pour une application de barrière thermique. Aujourd'hui, l'application de ce matériau avancé important a été étendue et utilisée pour résoudre un certain nombre de problèmes d'ingénierie. Les applications aérospatiales, automobiles et biomédicales sont quelques-unes des zones qui bénéficient de ce nouveau matériau.

1.2 Concepts et définitions des matériaux FG

Les matériaux fonctionnellement gradués sont une catégorie innovante de composites avancés, élaborés dans le but d'améliorer les performances et, dans certaines situations, d'atteindre des niveaux d'efficacité supérieurs en raison de leur transition graduelle des propriétés [1].

Le terme “Matériaux à Gradient Fonctionnel” contient deux mots importants : “fonctionnellement” et “gradué”. Le mot “fonctionnellement” modifie “gradué”. Impliquant une gradation des caractéristiques non seulement en fonction d'une composition variable, mais également liée à une performance ou à un rôle spécifique. Par conséquent, cette appellation inclut simultanément les matériaux avec une variation de composition simple et ceux avec une gradation optimisée dans le but d'assurer une fonction spécifique [2].

Les matériaux à gradation fonctionnelle sont une catégorie de composites avancés permettant une modulation précise des propriétés pour satisfaire les besoins spécifiques de différentes applications et fonctions. Ces matériaux subissent une évolution graduelle, tant pour leur composition que leurs constituants, et pour leurs microstructures, par exemple la taille des grains, la texture, la porosité, et ce selon des orientations particulières. Cette évolution entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau [3], c'est-à-dire qu'ils sont non homogènes aux niveaux macroscopique et microscopique. Par contre, les matériaux composites conventionnels sont soit des mélanges homogènes impliquant un compromis entre les propriétés des matériaux constitutifs, soit la combinaison de deux matériaux différents, comme c'est le cas pour les composites stratifiés. Figure 1.1 [4], présente le diagramme schématique de (a) FGM et (b) le matériau composite stratifié conventionnel (classique).

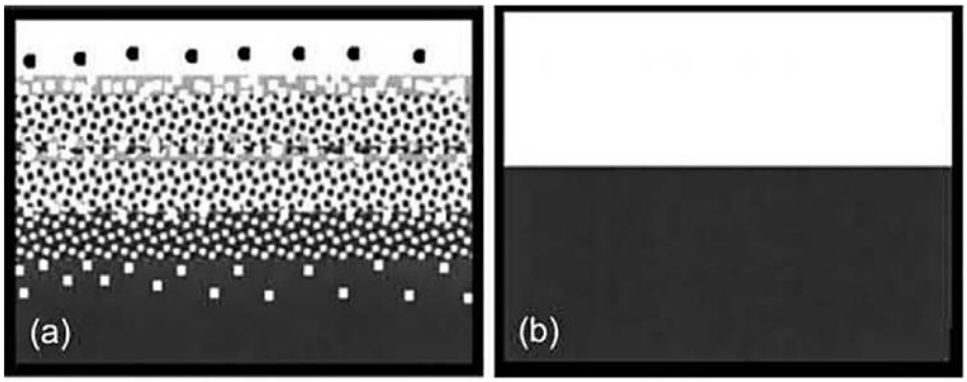


Figure 1.1 Diagramme schématique de (a) FGM et (b) matériau composite stratifié conventionnel [4].

Les FGM se caractérisent par l'absence de frontières ou d'interfaces clairement définies entre leurs différentes régions, contrairement aux matériaux composites classiques. Par conséquent, les FGM offrent une perspective prometteuse pour la réduction des contraintes mécaniques et thermiques dans de nombreuses composantes structurelles, ce qui les rend adaptés à des applications spécifiques.

Les FGM ont été utilisés pour la première fois au Japon en 1984 lors d'un projet d'avion spatial pour l'application de barrières thermiques, où leur concept a été proposé pour la première fois (Koizumi, M et al. 1997) [5]. L’introduction de ces matériaux vise à réduire les contraintes

thermiques présentes dans les matériaux composites stratifiés conventionnels conçus pour les moteurs de fusées réutilisables (Koizumi, M et al. 1995) [6].

En 1984, une équipe de recherche dirigée par M. **Niino** et ses collaborateurs **à Sendai**, dans un laboratoire national d'aérospatial **Japonais**, a lancé un projet visant à créer un matériau avec une performance thermique exceptionnelle, notamment face à d'importants gradients de température. Il était requis que l'un des côtés des matériaux composites soit exposé à une température d'environ 2000 K (1726,85°C), tout en veillant à ce que cette température ne se propage pas à la partie opposée du composite. En d'autres termes, Le matériau composite choisi pour la structure de la navette spatiale doit présenter une résistance thermique suffisante pour supporter un gradient de température d'environ 1000 K entre l'intérieur et l'extérieur de la navette, comme illustré dans la Figure 1.2 [1, 4, 7]. Les matériaux composites stratifiés conventionnels utilisés pour ce projet ont échoué à cause du délaminage (c'est-à-dire la séparation des matériaux composites stratifiés à partir de l'endroit où les deux matériaux constitutifs ont été joints). Cette défaillance était due à la présence d'une interface distincte entre les matériaux constitutifs, qui représentait un site de concentration de contraintes élevé (Figure 1.3 [8]), et l'endroit où la rupture était généralement initiée. Les chercheurs étaient conscients que si l'interface entre les deux matériaux constituant le composite pouvait être éliminée, la problématique serait résolue. **Les chercheurs ont modifié cette interface pointue en une interface graduelle en intégrant progressivement le second matériau dans le premier, plutôt qu'en utilisant 100 % d'un matériau et 100 % de l'autre ensemble** [4]. De cette façon, l'interface pointue a été éliminée et un nouveau matériau appelé FGM a été développé.

En synthèse, la notion des matériaux à gradient de propriété implique de substituer la transition brusque de composition à l'interface entre divers matériaux par une transition graduelle de la composition, Cette gradation compositionnelle vise à réduire les concentrations de contraintes dans la structure.

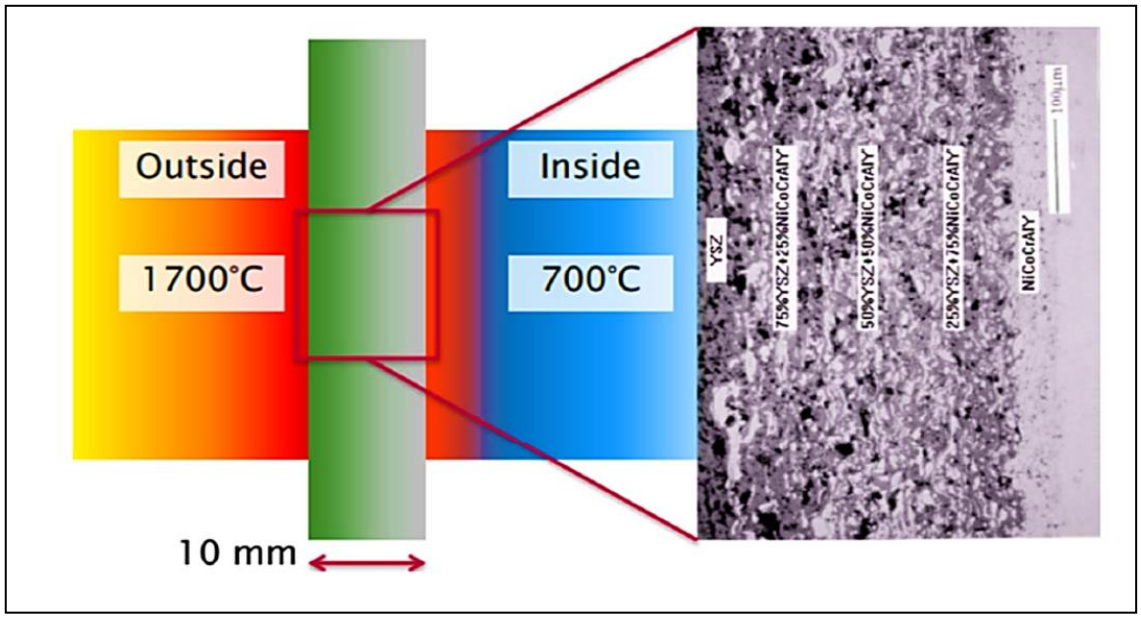


Figure 1.2 Première réalisation d'un matériaux FG métallique au Japon [7].

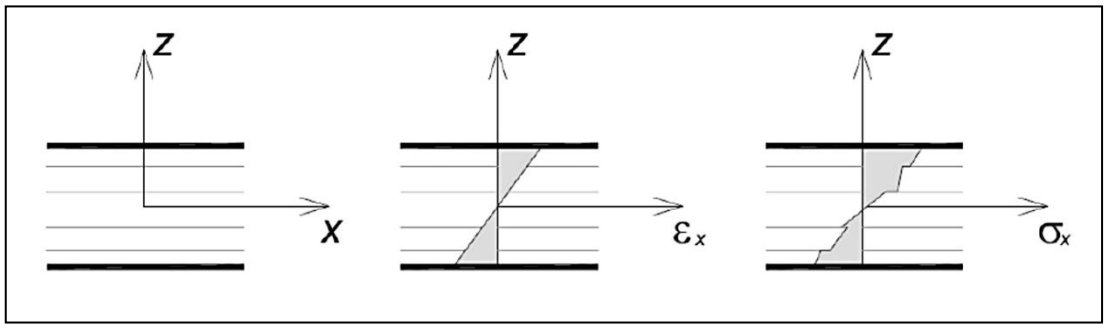


Figure 1.3 Distribution des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur d'une plaque Stratifiée [8].

Un matériau à gradient fonctionnel est couramment constitué de divers matériaux qui possèdent des propriétés variées. Les caractéristiques globales des FGM sont uniques et se distinguent de celles de chaque constituant individuel. Dans certains cas, un FGM composé du même matériau mais présente des microstructures différentes. Les pores représentent également des éléments fondamentaux des matériaux fonctionnels. une augmentation progressive de la distribution des pores, s'étendant de l'intérieur vers la surface, peut conférer diverses propriétés. telles que la résistance aux chocs mécaniques, l'isolation thermique, l'efficacité catalytique et la relaxation des contraintes thermiques [3].

Les FGM peuvent être classés en matériaux à gradient continu et en ceux à gradient discontinu, comme le montrent schématiquement les figures 1.4 [9]. Dans les FGM continus, les composants du matériau et/ou la microstructure varient de façon continue en fonction de la position, rendant ainsi difficile l'identification de zones distinctes ou de lignes de séparation au sein du matériau, ce qui a permis de distinguer les propriétés de chaque zone. En revanche, dans les FGM discontinus, la microstructure et/ou la composition du matériau évoluent de manière progressive, engendrant ainsi une structure multicouche avec une interface positionnée entre les différentes couches [3, 9]. De plus, les caractéristiques des matériaux présentant des variations d'une surface à une autre, soit de manière continue ou discontinue, comme le montrent les figures 1.5 [7]. Il est important de noter que les ingrédients du matériau peuvent varier spatialement dans l'ensemble du volume du matériau, ou uniquement à un emplacement spécifique, tel que l'interface, un joint ou une surface, comme illustré dans la Figure 1.6 [3].

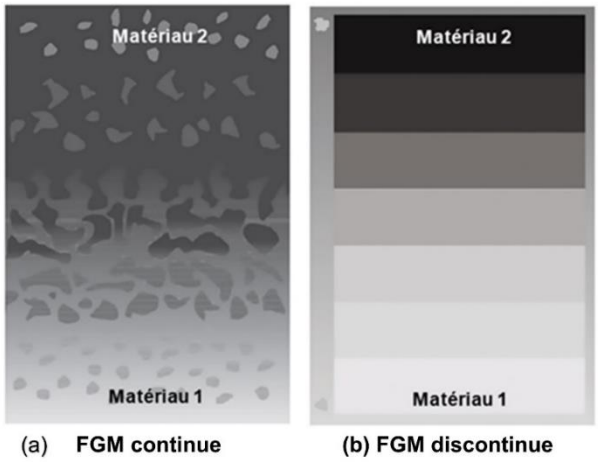


Figure 1.4 Classifications des FGM : (a) gradation continue et (b) gradation discontinue [9].

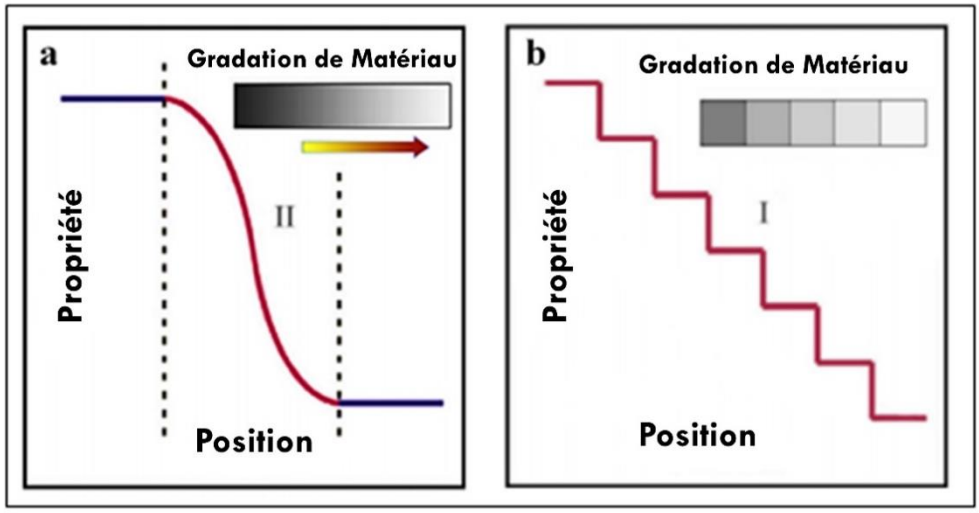


Figure 1.5 Variation des propriétés : (a) continue et (b) discontinue [7].

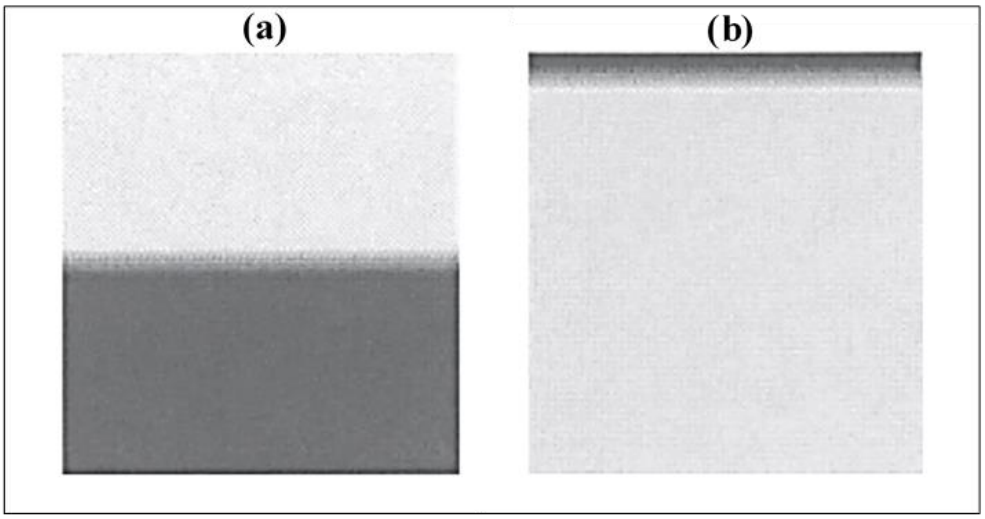


Figure 1.6 Structures graduées (a) au niveau du joint et (b) en surface [3].

Les matériaux fonctionnellement gradués couramment utilisés sont gradés de manière continue dans une direction spécifique. Cependant, dans tous les types de FGM, une transition en douceur des propriétés thermomécaniques est assurée, ce qui permet de réduire les problèmes liés à la délamination et aux fissures. les matériaux FG sont habituellement constitués de composants isotropes tels que les métaux et les céramiques. une microstructure à gradient continu, intégrant des constituants métalliques et céramiques, est illustrée de manière schématique dans la Figure 1.7 [10]. En général, les FGM métalliques-céramiques sont utilisés dans des applications à haute température, où la composante céramique est capable de résister des environnements thermiques extrêmes grâce à ses propriétés meilleures en matière de résistance thermique, tandis que la composante métallique offre des performances mécaniques optimisées et diminue le risque de rupture catastrophique. La phase de transition fournit une protection thermique tout en réduisant les contraintes liées aux discontinuités d'interface.

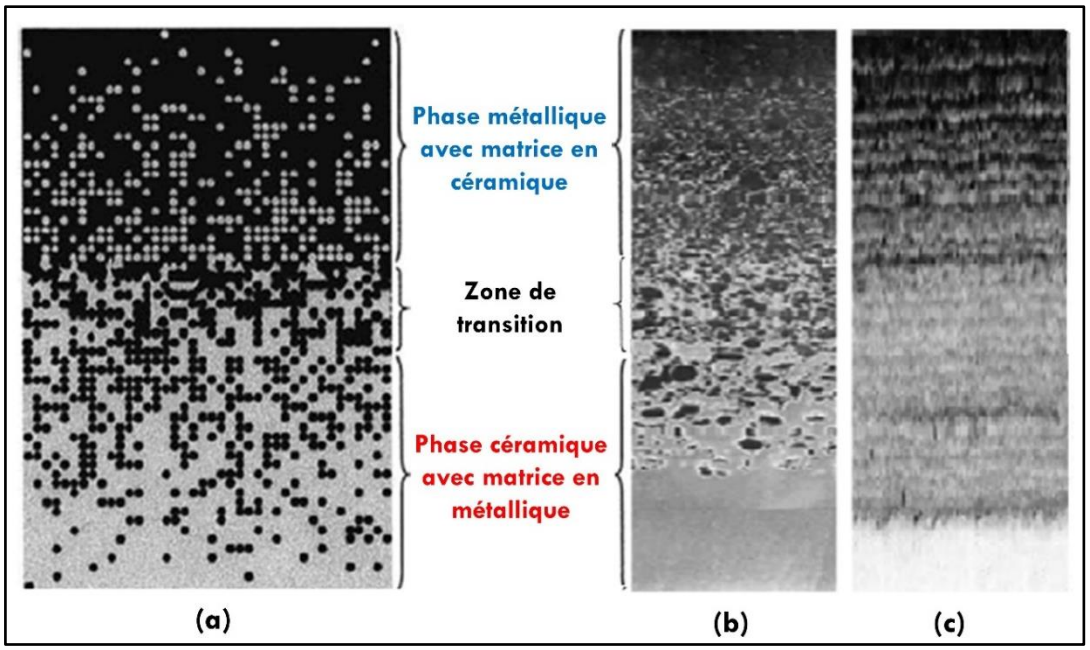


Figure 1.7 Microstructure à gradation continue avec des constituants métalliques et céramiques (a) Microstructure doucement graduée (b) Vue agrandie et (c) FGM Céramique-Métal [10].

Les matériaux FG, qui combinent des éléments céramiques et métalliques, sont largement répandus dans l'industrie. Ils sont conçus pour résister à des températures élevées d'un côté tout en évitant le transfert de chaleur vers l'autre côté. Cette conception a donné naissance des poutres FG, caractérisées par une surface supérieure entièrement en céramique et une surface inférieure entièrement en métal, avec une couche intermédiaire qui varie graduellement à travers l'épaisseur limitée par les deux faces mentionnées, comme illustré dans la Figure 1.8.

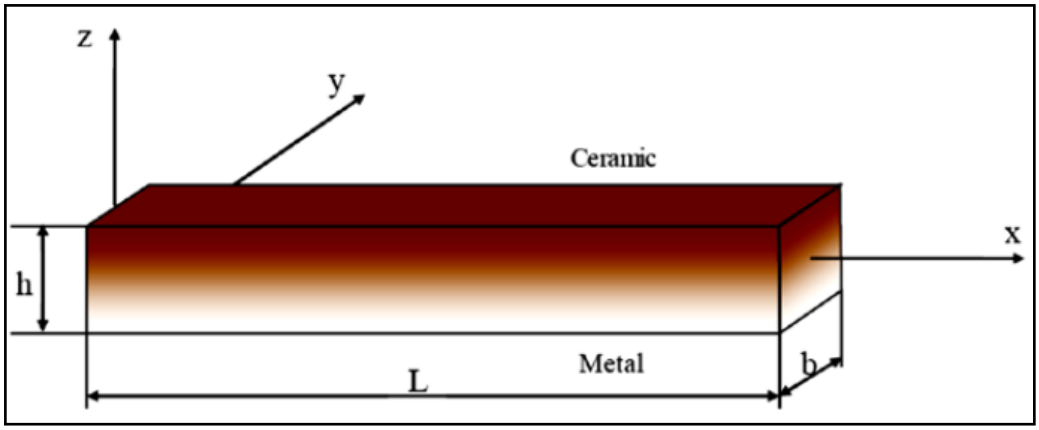


Figure 1.8 Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.

De ce qui précède, il est possible de souligner plusieurs avantages offerts par les matériaux à gradient fonctionnel, que nous énumérons ici en quelques lignes.

- ✓ En raison de leurs interfaces graduelles, les matériaux FG contribuent à réduire les concentrations de contraintes thermomécaniques, ce qui permet de prévenir la délamination dans les zones sujettes aux fissures et d'améliorer la durabilité des structures soumises à des charges.

- ✓ Un matériau fonctionnel graduellement poreux aide à amortir l'impact d'un côté à l'autre, offre une isolation thermique, améliore l'efficacité catalytique, et contribue également à atténuer les contraintes électriques et thermiques.
- ✓ Les matériaux fonctionnellement gradués peuvent agir comme une couche d'interface reliant deux matériaux incompatibles, optimiser la résistance à la liaison, réduire la propagation des fissures se formant à l'intérieur du matériau. En outre, ils peuvent offrir une multitude de fonctionnalités telles que la réponse dynamique, la régulation de la déformation et la résistance à la corrosion. les revêtements en gradient contribuent à réduire les contraintes résiduelles internes.
- ✓ Les FGM métal-céramique éliminent la transition abrupte entre les coefficients de dilatation thermique, offrent une protection thermique/corrosion, et offrent une capacité de charge.
- ✓ Les matériaux FG se caractérisent par leur nature composite et leur hétérogénéité macroscopique. ainsi, se distinguent des matériaux composites traditionnels par leurs changements continus à microstructure.

1.3 Historique et développement des FGM

Bien que le concept des “Matériaux fonctionnellement gradués” ait été introduit au début des années 1980 par des chercheurs japonais, il convient de noter que l'idée générale d'applications théoriques des matériaux composites et polymères à structure graduée avait été formulée pour la première fois en 1972 par Shen et Bever [11]. Néanmoins, L'influence de ces premiers travaux fut limitée, probablement en raison des limitations technologiques et de l'absence de procédés de fabrication adaptés à la réalisation de matériaux à gradient de propriétés.

Les “Matériaux à Gradient Fonctionnel”, FGM, ont été officiellement adoptés en 1986. ensuite été confirmée largement diffusée à la suite d’une discussion menée lors du Troisième Symposium International sur les FGM tenu à Lausanne en 1994, la dénomination complète a été modifiée en 1995 pour adopter l’appellation "Matériaux à Gradient Fonctionnel", celle-ci étant plus précise tant sur le plan descriptif que grammatical [3].

En 1987, un projet de recherche d'une durée de cinq ans (1987-1992) a été initié, intitulé : technologie originelle pour développer les matériaux à gradient fonctionnel et l’analyse de la relaxation des contraintes thermiques (FGM partie I) tend à la conception des matériaux novateurs pour leur intégration dans des structures agissant comme barrières thermiques. Cela concerne en particulier le domaine des programmes aérospatiaux [3]. des échantillons structuraux ont été élaborés lors de cette recherche, comprenant des coques carrées de 300 mm de côté et des bols hémisphériques de 50 mm de diamètre. Ces spécimens spécifiquement conçus pour être appliqués dans les cônes de nez en matériaux à gradient fonctionnel à base de carbure de silicium (SiC) ont été fabriqués [12].

Le domaine des Matériaux à Gradient Fonctionnel a connu une croissance significative à partir des années 1990. la première conférence internationale consacrée à ce thème (FGM 1990) a eu lieu à Sendai au Japon, marquant le début d’une série de conférences périodiques. En 1992, la compréhension de l'importance stratégique de ces matériaux a conduit à leur classification parmi les dix technologies les plus optimistes au Japon [1].

Un nouveau projet de cinq ans (1993-1998), résultant du FGM (partie I), a été lancé en 1993 sous le nom "Recherche sur les matériaux consacrés à la conservation de l'énergie en utilisant un schéma fonctionnel de gradient de structure", communément désigné sous le terme (FGM partie II). Ce programme vise à exploiter la technologie des matériaux fonctionnellement gradués afin d'optimiser l'efficacité et la gestion de l'énergie, par exemple dans l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique [5, 12].

En 2001, un atelier international présentant les tendances et prévisions récentes a été organisé sous la présidence du prof. Naotake Ooyama. Divers sujets tels que la modélisation et la simulation, les systèmes de fabrication automatiques pour les FGM, la mesure des contraintes résiduelles, l'imagerie par ultrasons et la biocompatibilité des matériaux pour les implants FG ont été présentés. Depuis lors, des programmes de recherche sont régulièrement mis en place à l'échelle internationale, accompagnés de colloques et d'ateliers spécialisés. La dernière mise à jour à ce sujet, le 16e conférence international sur les FGM (FGM 2022), s'est tenue du 7 au 10 août 2022 à Hartford, aux États-Unis. La Figure 1.9 [7, 13] offre une présentation historique des étapes et du développement des FGM.

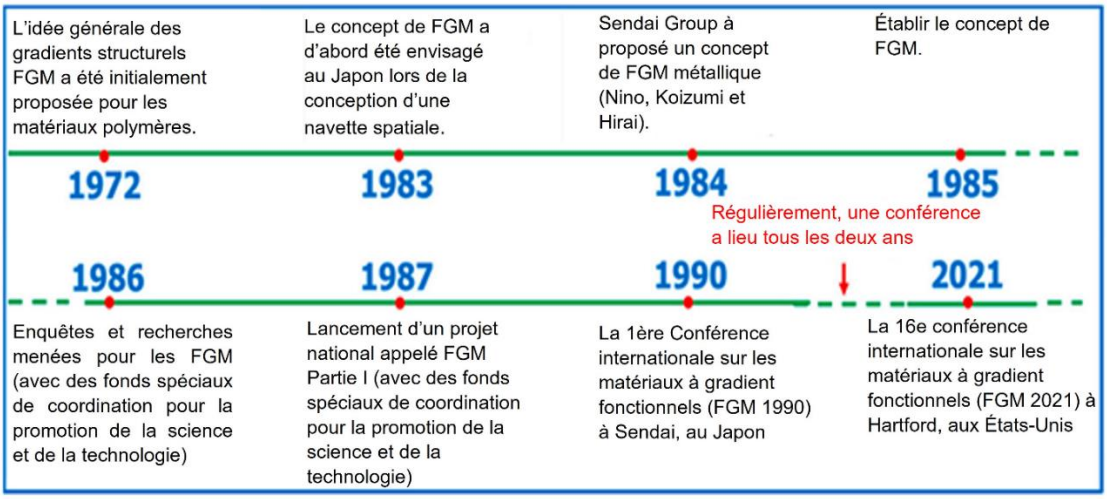


Figure 1.9 Présentation historique des étapes significatives dans la recherche et le développement des FGM [7, 13].

1.4 Comparaison des matériaux FG et des matériaux composites traditionnels

L'analyse comparative entre les matériaux fonctionnellement gradués et les matériaux composites conventionnels peut être envisagée de manière relativement directe, étant donné qu'ils partagent un principe microscopique fondamental similaire. Il est largement admis que les matériaux à gradient fonctionnel composés de céramiques et de métaux possèdent une hétérogénéité macroscopique, caractérisée par une transition continue dans leur microstructure. la figure 1.10 [5] schématise les différences microstructurales et leurs propriétés entre les matériaux FG et les composites traditionnels.

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des propriétés notables qui se distinguent de celles des matériaux composites traditionnels. En conséquence, les FGM attirent un intérêt particulier en raison de leur utilisation dans les secteurs industriels, car ils tirent parti des propriétés liées des deux matières premières qui sont mélangées de façon continue et graduelle, comme l'illustre la figure 1.11. à titre d'illustration, Dans un matériau FG, on peut observer une

coopération de propriétés : une partie métallique offre une haute conductivité thermique et une résistance mécanique significative, tandis que la partie céramique assure une forte résistance aux températures élevées. Cette combinaison de caractéristiques distinctes permet d'améliorer le comportement du matériau en réponse aux contraintes environnementales.

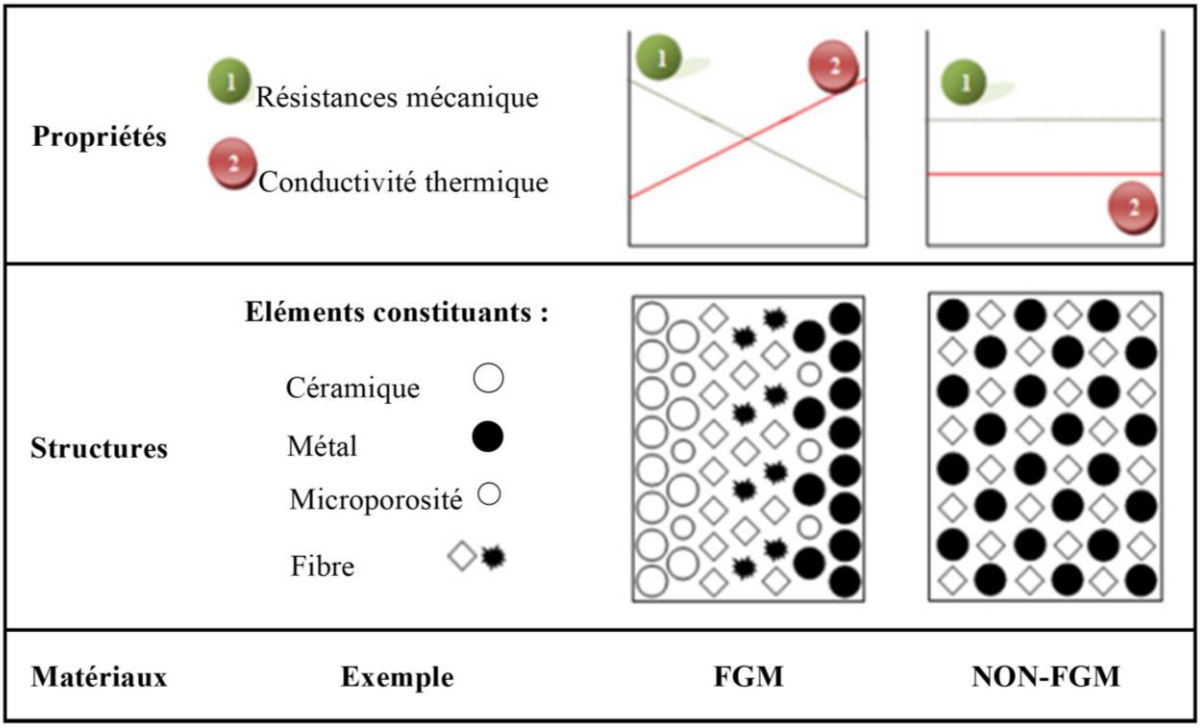


Figure 1.10 Comparaison des propriétés des matériaux FG par rapport à celles des composites conventionnels [5].

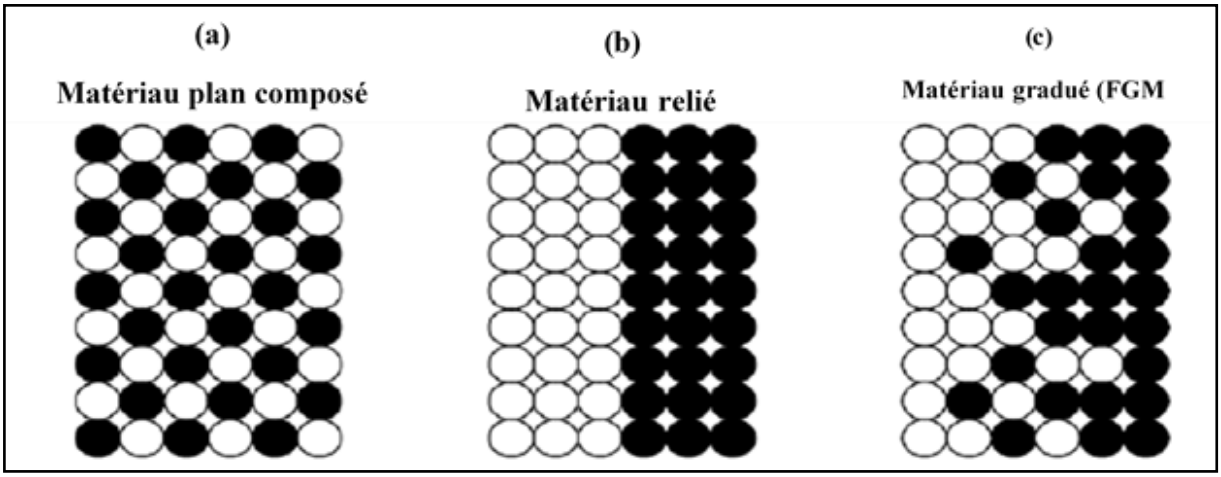


Figure 1.11 Diverses représentations schématisations des matériaux.

1.5 Techniques de fabrication des matériaux FG

Le processus de fabrication représente l'un des aspects les plus essentiels de la recherche sur les matériaux FG, dans lequel une part significative des travaux de recherche a été dédiée à la transformation. Les FGM peuvent se présenter sous forme de revêtements minces appliqués à la surface du matériau pour améliorer les propriétés de surface, ou sous forme de matériaux massifs, dans lesquels les propriétés du matériau varient sur l'ensemble du volume. Plusieurs techniques

ont été développées pour la production de matériaux FG, adaptées aux besoins spécifiques, que ce soit pour des revêtements de surface ou des structures massives de FGM.

Les revêtements de surface, souvent classés comme des matériaux FG, sont généralement appliqués sous forme de couches minces par diverses techniques de dépôt en phase vapeur. En outre, il est également envisageable de fabriquer ces revêtements à gradient fonctionnel grâce à des techniques comme la projection plasma (PPD), L'électrodéposition, dépôt par électrophorèse (EPD), Le dépôt assisté par faisceau ionique (Ion Beam Assisted Deposition, IBAD), et la synthèse à haute température auto-propagée (Self- Propagating High-temperature Synthesis, SHS).

Les matériaux fonctionnellement gradués sous forme de blocs peuvent être élaborés par plusieurs procédés, notamment le procédé de coulée centrifuge (centrifugal casting) [14], la métallurgie des poudres (PM), le coulage séquentiel en barbotine (slip casting) et la technique de coulée en bande sous le nom de doctor-blade. Parmi les méthodes avancées disponibles, la fabrication additive est l'un des procédés prometteurs pour la fabrication en bloc (massique) et le revêtement mince.

Le processus de fabrication d'un FGM peut généralement être divisé en deux étapes. La première étape du processus consiste à élaborer une structure spatialement non homogène, désignée sous le terme de ***Gradation***. La phase suivante consiste à convertir cette structure en un matériau en bloc, ce processus étant appelé ***consolidation***. De manière plus détaillée, les procédés de mélange graduel peuvent être classés selon divers critères, notamment la nature de leurs constituants, le degré d'homogénéisation et les phénomènes de ségrégation. La construction progressive de la structure graduée se réalise grâce à des matériaux précurseurs ou des poudres. ***L'homogénéisation*** est un processus de conversion des interfaces nettes entre deux matériaux en un dégradé par transport matériel. La ***ségrégation*** débute avec un matériau qui présente une homogénéité macroscopique, lequel est ensuite converti en un matériau gradé par le transport de matière provoqué par un champ externe, tel qu'un champ gravitationnel ou électrique. En règle générale, les étapes de frittage et de solidification interviennent après le processus de gradation [15].

Les méthodes de fabrication, tant celles qui sont déjà établies que les plus récentes, concernant les matériaux FG seront abordées dans les sections suivantes.

1.5.1 Technique de dépôt en phase vapeur (Vapor deposition technique)

Le procédé de dépôt en phase vapeur est l'une des plus importantes pour produire un film mince graduel (de quelques nanomètres à plusieurs micromètres) par le processus de construction. Cette méthode décrit un procédé par lequel les matériaux se condensent en un matériau solide pendant le cycle de vaporisation [16]. Il existe différentes techniques de dépôt en phase vapeur sont accessibles, notamment le dépôt chimique en phase vapeur (CVD), le dépôt physique en phase vapeur (PVD) ainsi que la pulvérisation cathodique. Ces méthodes sont employées pour garantir l'application de revêtements de surface minces et d'une microstructure de haute qualité. Toutefois, il est important de noter que ces techniques génèrent des sous-produits gazeux toxiques [17]. Par conséquent, il est essentiel de prendre des précautions et d'adopter des mesures de sécurité appropriées lors du choix de l'une de ces techniques de dépôt en phase vapeur comme procédé de fabrication. Les figures 1.12 [18] et 1.13 [13] illustrent le diagramme schématique des processus CVD et PVD, respectivement.

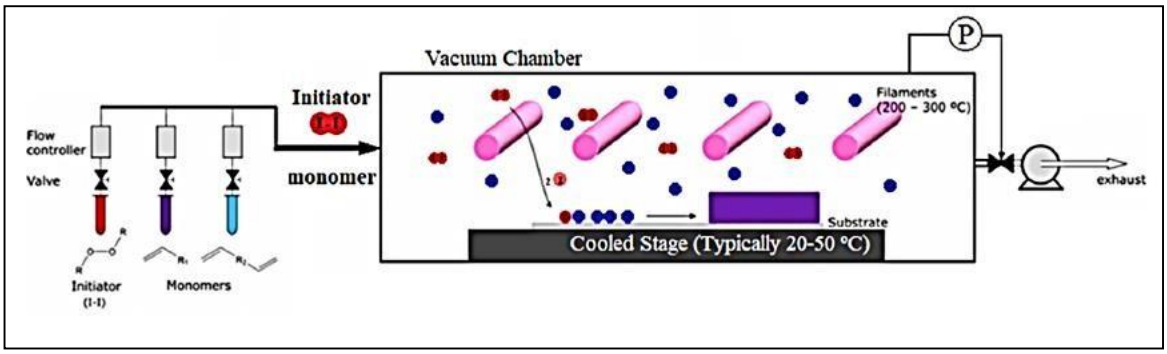


Figure 1.12 Le processus de dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [18].

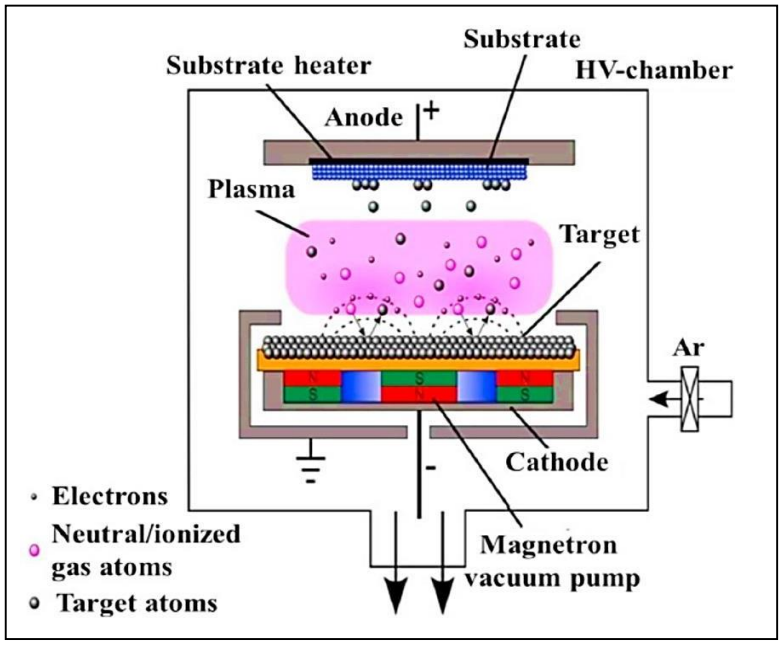


Figure 1.13 Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD) [13].

1.5.2 Métallurgie des poudres (Power metallurgy)

Le processus de métallurgie des poudres (PM) [19] représente une méthode de fabrication ancienne, largement utilisée pour la production de pièces d'ingénierie, et est actuellement utilisée pour la fabrication de matériaux à gradient de propriétés. Cette méthode se compose de trois étapes essentielles : tout d'abord, le pesage et le mélange des poudres sont réalisés en respectant la distribution spatiale prédéfinie, laquelle est déterminée par les exigences fonctionnelles. Par la suite, les poudres pré-mélangées sont empilées et compactées. Enfin, la dernière étape consiste dans le processus de frittage, tel qu'illustré dans la figure 1.14 [20]. La méthode de métallurgie des poudres aboutit à une structure par étapes. En revanche, si une structure continue est recherchée, la méthode centrifuge est alors utilisée.

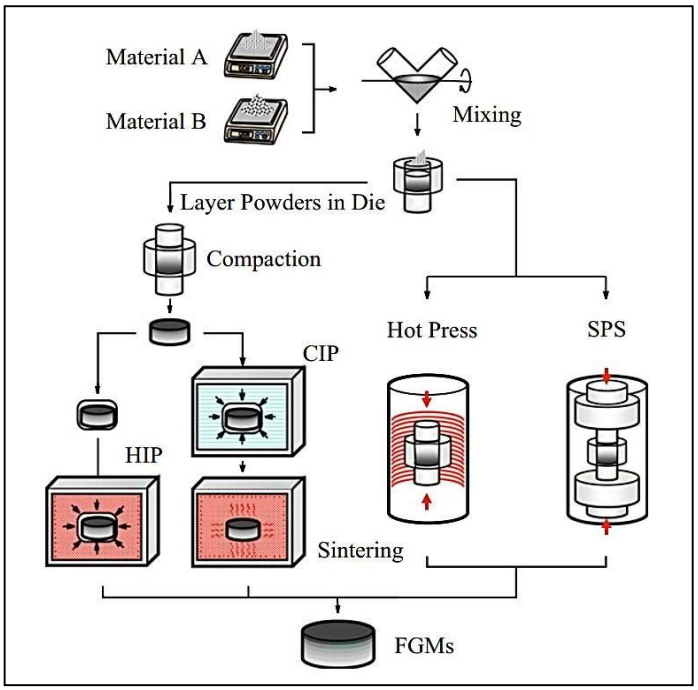


Figure 1.14 Processus de fabrication des FGM par métallurgie des poudres [20].

1.5.3 Méthode de coulage centrifuge (Centrifugal casting method)

La technique de coulée centrifuge consiste à verser un matériau fondu contenant un autre matériau de renforcement, soit à l'état fondu, soit à l'état solide, dans un moule placé à l'intérieur d'une matrice rotative pour produire un matériau fonctionnellement gradué [21]. Une force centrifuge est générée par la rotation de la matrice, ce qui facilite l'attraction du matériau fondu vers le moule. Ce processus engendre également une séparation au sein du matériau en poudre solide en suspension, entraînant la fusion des deux matériaux en raison des différences de densité entre eux. En conséquence, cela permet la création d'un matériau à gradient fonctionnel [14]. La distribution graduelle du matériau à gradient fonctionnel, obtenu par la méthode de coulage centrifuge, serait considérablement affectée par divers paramètres de traitement. Parmi ces paramètres, on peut citer la différence de densité entre les particules de poudre de renforcement et le matériau fondu, ainsi que la taille des particules et leur distribution granulométrique, la viscosité du matériau fondu et le temps de solidification. L'appareil pour la méthode de centrifuge et le mouvement des particules solides sous l'effet de la force centrifuge sont représentés dans la Figure 1.15 [20].

La technique de coulée centrifuge présente un avantage considérable lors de la fabrication des matériaux FG qui réside dans sa capacité à générer un gradient continu. Les principaux inconvénients de la méthode de coulée centrifuge comprennent les éléments suivants :

- Cette méthode ne peut être appliquée que pour la fabrication des sections cylindriques, telles que des tubes, des bagues et des pièces moulées cylindriques ou tubulaires de forme simple.
- La gradation est limitée par l'action de la force centrifuge et par la variation de densité des matériaux composants.

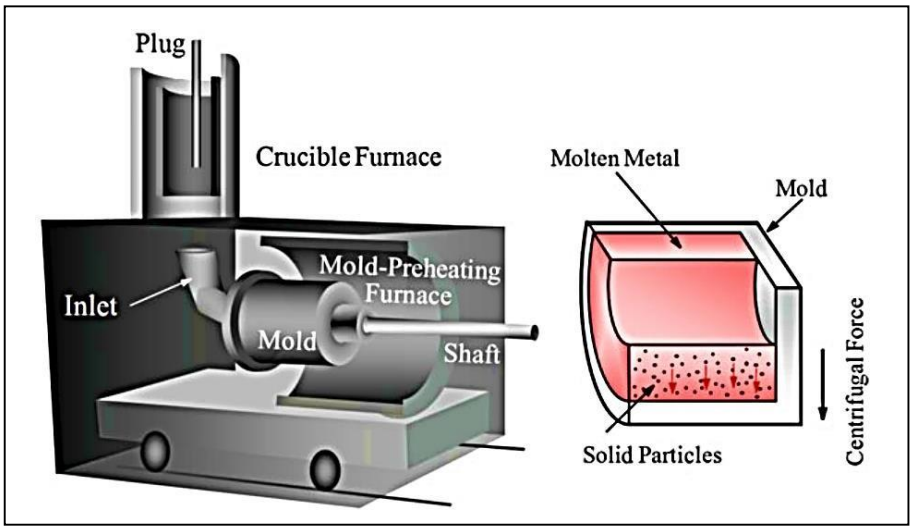


Figure 1.15 Appareil pour la méthode de centrifuge et le mouvement des particules solides sous l'effet de la force centrifuge [20].

1.5.4 Méthode de fabrication additive (Additive manufacturing method)

La fabrication additive (AM), communément désignée sous le terme d'impression 3D, constitue une méthode de fabrication avancée permettant de créer des composants ou des pièces tridimensionnelles. Ce processus s'effectue en superposant des couches de matériau, en se basant sur des données de conception assistée par ordinateur (CAO) [22]. Grâce à cette technique, il est possible de réaliser des formes complexes et des produits sur mesure. La fabrication additive offre une liberté au concepteur pour créer des designs selon ses propres spécifications, avec une considération minimale pour la conception en vue de la fabrication et de l'assemblage. Ce qui permet d'obtenir une vitesse de production plus élevée et une utilisation maximale des matériaux.

La fabrication additive a été envisagée comme une méthode efficace pour la production de matériaux à gradient fonctionnel, présentant des profils de contraintes optimisés et une excellente formabilité. Les techniques reposant sur le laser, la stéréolithographie, le processus de projection de matériaux ainsi que la simulation de dépôt par fusion [13] peuvent être largement catégorisées comme des procédés de fabrication additive destinés à la création de matériaux à gradient fonctionnel avec des gradients discrets. La Figure 1.16 illustre le schéma représentatif de la fabrication additive [13].

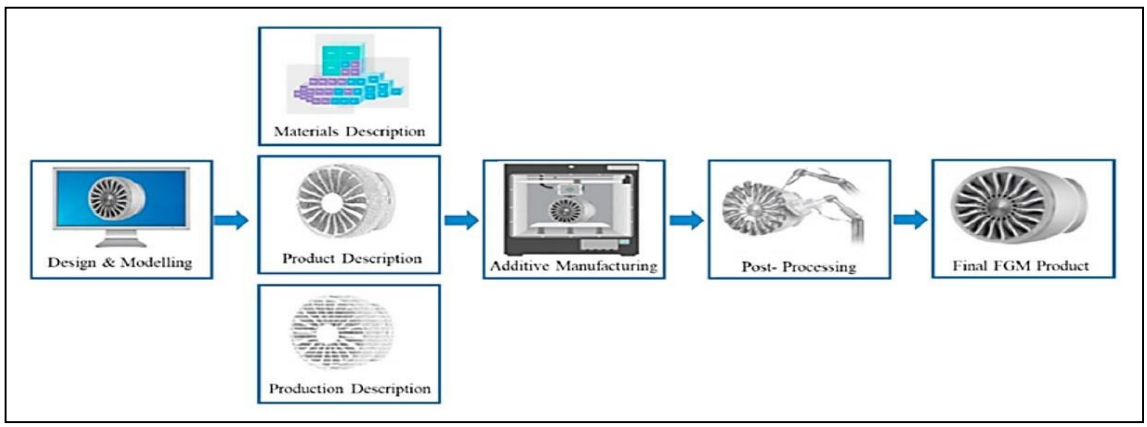


Figure 1.16 Schéma représentatif de la fabrication additive [13].

Une compréhension approfondie des divers processus de fabrication des matériaux FG ainsi que des investissements significatifs en recherche de la part des industries et une capacité de production de masse ont entraîné une augmentation de l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués par rapport aux matériaux conventionnels. Les différents champs d'application des FGM seront abordés dans la section qui suit.

1.6 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

De nos jours, en raison de la flexibilité offerte par la fabrication de matériaux composites pour répondre aux exigences spécifiques des applications et à leur pertinence fonctionnelle, l'utilisation des matériaux FG s'étend de manière exceptionnelle. La Figure 1.17 illustre les différentes zones d'application des FGM. Ces matériaux fonctionnellement gradués présentent de grandes perspectives dans des applications soumises à des conditions de fonctionnement difficiles ou à des exigences très sensibles [19]. Parmi ces applications figurent des secteurs tels que le biomédical, l'automobile, l'aérospatiale, la défense et le secteur militaire, l'énergie, l'industrie marine, le génie civil et le sport, qui seront détaillés dans les sous-sections suivantes.

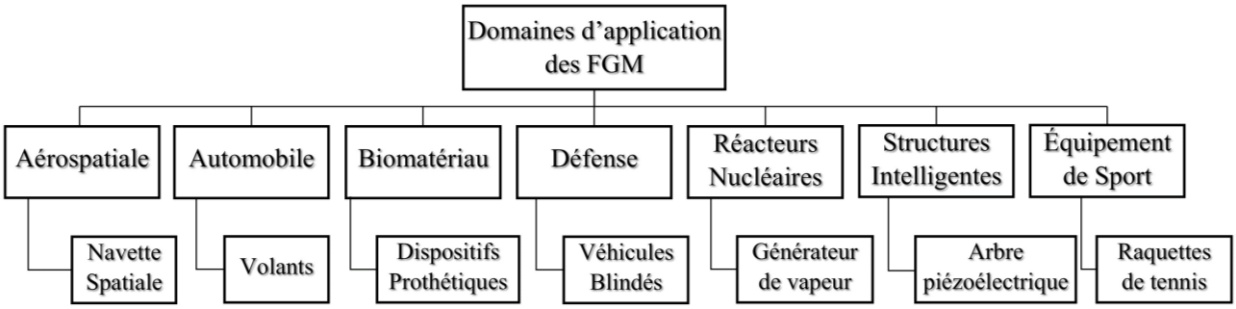


Figure 1.17 Les principaux domaines d'application des FGM [19].

1.6.1 Applications aérospatiales

Les matériaux FG ont été initialement utilisés dans l'industrie aérospatiale afin de réduire les contraintes thermiques entre les surfaces externes et internes. Au fil des années, leur utilisation s'est élargie à diverses applications dans le domaine aérospatial. Actuellement, une grande partie des composants des avions et des engins spatiaux est fabriquée à partir de FGM. Parmi ces composants, on trouve des panneaux d'échange thermique, des réflecteurs, le nez des avions spatiaux, des panneaux solaires, des roues de turbine, la couche de protection des chambres de combustion, ainsi que des éléments de structure, des composants de moteurs de fusée, des boîtiers de caméra, ainsi que le bord d'attaque des missiles et des navettes spatiales [23], comme le démontre la Figure 1.18 [13]. Les matériaux fonctionnellement gradués sont également employés pour concevoir une barrière thermique au niveau de la paroi d'un avion (structure d'engin spatial), afin de faire face à la chaleur produite à la surface extérieure de l'avion due à la friction de l'air.

1.6.2 Applications automobiles

Comme les matériaux fonctionnellement gradués ont un coût important, leur utilisation dans l'automobile se limite aux pièces vraiment nécessaires. Ils apparaissent surtout dans des pièces telles que les pistons, les chemises des cylindres pour moteurs diesel, les chambres où se produit la combustion, les systèmes de freinage des voitures de compétition, puis dans les arbres de

transmission et les volants, comme montré dans la Figure 1.19. En plus, ces matériaux offrent une option pour recouvrir la carrosserie des automobiles [13].

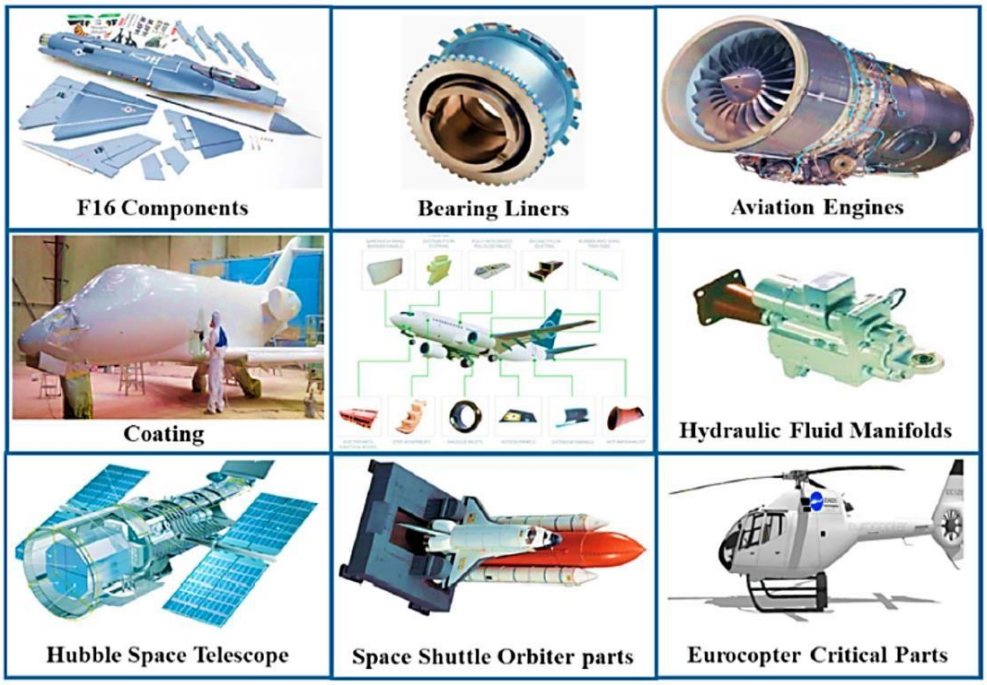


Figure 1.18 Pièces en FGM dans les applications aérospatiales [13].

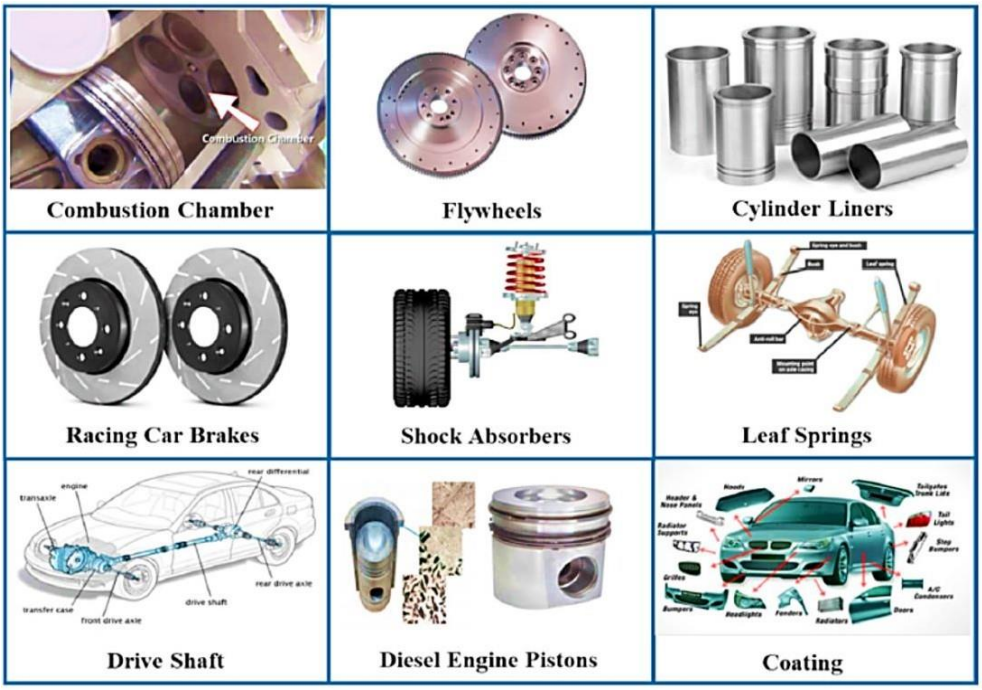


Figure 1.19 Pièces en FGM dans les applications automobiles [13].

1.6.3 Applications biomédicales

En biologie, les tissus humains tels que les os et les dents sont des exemples naturels de matériaux FG. Malheureusement, ces tissus peuvent parfois subir des dommages irréparables, rendant nécessaire leur remplacement. Pour ce faire, il est essentiel d'utiliser un matériau compatible capable de remplir la fonction du tissu biologique d'origine. Dans cette situation, les

matériaux FG se présentent comme des candidats idéaux pour cette utilisation. Les FGM ont été largement utilisées dans divers domaines tels que la dentisterie et l'orthopédie, notamment pour la substitution des dents et des os. La figure 1.20 présente une vue schématique d'un implant dentaire à gradients de fonctionnalité avec une composition de matériaux graduée [24].

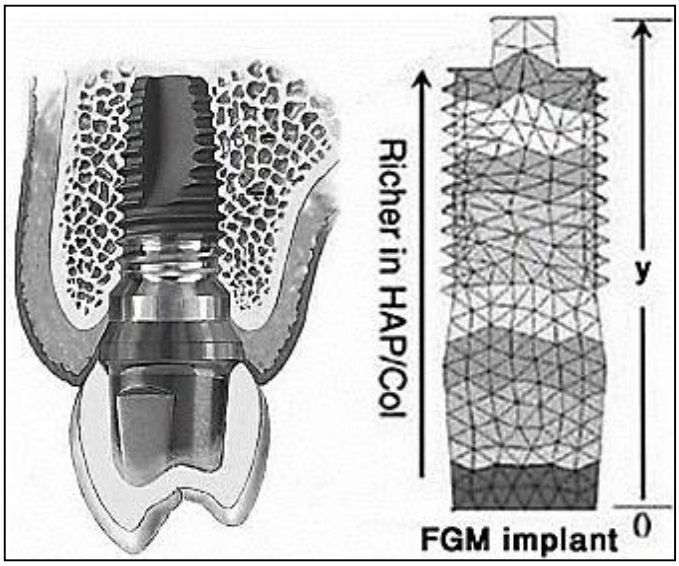


Figure 1.20 Vue schématique de l'implant dentaire FGM avec une composition de matériau graduée [24].

1.6.4 Applications de défense

Les matériaux à gradient de fonctionnalité possèdent une capacité notable à limiter l'avancée des fissures, ce qui les rend particulièrement adaptés aux usages dans la défense et le secteur militaire. On les utilise souvent comme protection contre la pénétration, notamment pour fabriquer des plaques de blindage et des gilets pare-balles, comme indiqué dans [25]. Ces matériaux sont également précieux pour réaliser les carrosseries des véhicules blindés.

1.6.5 Applications énergétiques

Dans le secteur de l'énergie, les matériaux fonctionnellement gradués servent à fabriquer des barrières thermiques efficaces et à protéger les pales des turbines dans les moteurs à gaz avec des revêtements résistants. Ces matériaux interviennent également dans des équipements tels que les dispositifs de conversion d'énergie, les capteurs, les cellules solaires, et les générateurs thermoélectriques [26].

1.6.6 Applications électriques / électroniques

Les matériaux fonctionnellement gradués trouvent une application variée dans l'industrie électrique et électronique, notamment en ce qui concerne la relaxation des contraintes de champ à l'interface entre l'électrode et l'espaceur, ainsi que dans les diodes, les dispositifs semi-conducteurs et les isolants qui sont utilisés dans la production de capteurs. Par ailleurs, on explore l'utilisation de matériaux fonctionnellement gradués à base de nanotubes de carbone pour développer des systèmes de protection thermique [4].

1.6.7 Applications marines

Dans les domaines maritime et sous-marin, les matériaux à gradient fonctionnel jouent un rôle important pour réaliser des composants comme les arbres de transmission des hélices, les réservoirs pour fabriquer des équipements tels que les tuyauteries composites, les enveloppes cylindriques supportant la pression, les dispositifs acoustiques des sonars (dômes), et les cuves de plongée [4].

1.6.8 Applications opto-électroniques

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans les dispositifs optoélectroniques en raison des gradients d'indice de réfraction qu'ils permettent d'obtenir. Plusieurs applications illustrent leur usage, comme les lasers, les systèmes de stockage magnétique, les capteurs, les fibres optiques, les cellules photovoltaïques, les circuits électroniques, et un ensemble de technologies semi-conductrices [4].

1.6.9 Applications sportifs

Les matériaux à gradient fonctionnel, notamment ceux produits par des techniques de fabrication additive, trouvent des applications dans la conception des équipements sportifs de haute performance, comme les raquettes de tennis, les skis, et les clubs de golf. Cela est principalement attribué aux caractéristiques graduées obtenues, permettant ainsi une réduction du poids et du frottement, une amélioration de la durabilité, un rapport résistance-poids plus élevé, une dureté accrue, une résistance à l'usure et plusieurs autres propriétés souhaitables [4].

1.6.10 Applications en génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton offre la possibilité d'optimiser la composition interne des composants structurels en fonction d'exigences particulières relatives aux performances structurelles et thermiques. Cet ajustement est réalisable en raison d'une modification continue des caractéristiques du matériau, notamment sa porosité, sa résistance ou sa rigidité, dans un maximum de trois dimensions spatiales. Ce principe peut être appliqué pour diminuer la masse de l'élément et engendrer des propriétés multifonctionnelles. La diminution de la porosité joue un rôle essentiel dans l'amélioration des propriétés structurelles du béton, alors que l'accroissement de la porosité renforce ses capacités d'isolation thermique. La figure 1.21 présente les courbes des caractéristiques du béton durci en relation avec une augmentation graduelle de la porosité [27].

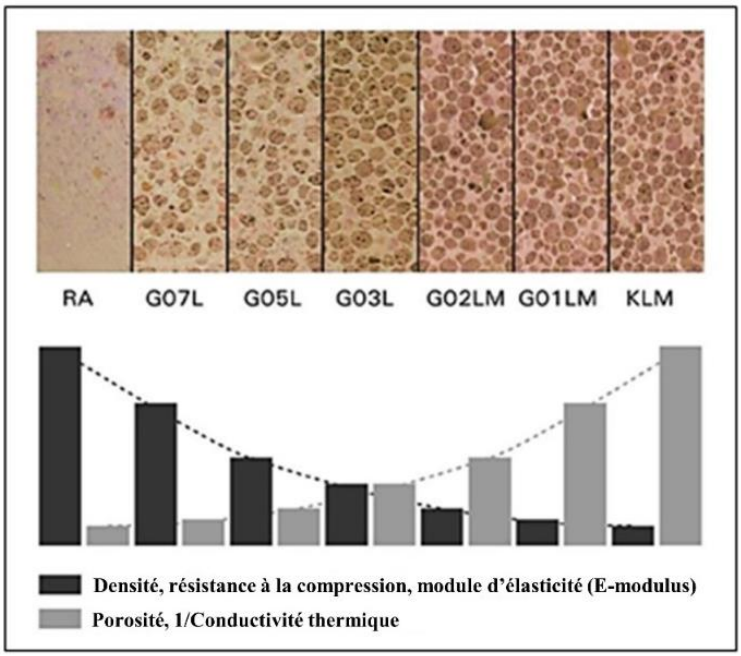


Figure 1.21 Courbes des caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [27].

1.6.11 Autres applications diverses

D'autres applications des matériaux FG comprennent le revêtement des inserts d'outils de coupe, la tribologie, les échangeurs de chaleur, la fabrication de portes ignifuges, ainsi que la conception de tampons de défense destinés à prévenir la propagation des fissures.

Le champ d'application des matériaux fonctionnellement gradués devrait s'élargir, sous réserve d'une diminution des coûts de production de ces matériaux dans un avenir proche.

1.7 Propriétés physiques et mécaniques des matériaux FG

Dans la majorité des recherches et des applications structurelles, ces matériaux à gradient fonctionnel sont couramment élaborés par un combinant deux phase, typiquement de nature céramique et métallique. En tenant compte de leurs avantages respectifs. Pour tirer pleinement parti de cette classe de FGM, il est essentiel de sélectionner les composants en fonction des exigences spécifiques : D'une part, afin d'assurer une résistance optimale aux températures élevées ou aux dégradations, il est recommandé d'augmenter la proportion de céramique. D'autre part, pour obtenir des propriétés mécaniques telles qu'une dureté élevée et une résistance à la contrainte, il est conseillé d'augmenter la proportion de métal. Une comparaison des caractéristiques des métaux et des céramiques est présentée dans le tableau ci-dessous :

Tableau 1.1 Propriétés physiques et mécaniques des matériaux Céramiques et Métalliques.

Type de Matériau	Conditions Thermiques	Propriétés Principales
Céramique	Températures élevées à la surface inférieure	• Une résistance thermique exceptionnelle • Excellente résistance à l'oxydation • Faible conductivité thermique
FGM **(Céramique/Métal)**	Transition progressive du matériau	• Suppression des contraintes d'interface • Réduction des contraintes thermiques
Métal	Température a été diminuée à la surface supérieure	• Une résistance mécanique élevée • conductivité thermique élevée • Excellente ténacité

1.8 Modélisation des propriétés matérielles effectives des FGM

1.8.1 Modèles micromécaniques (homogénéisation)

Les matériaux à gradient fonctionnel sont fréquemment composés d'une combinaison de deux phases matérielles présentant des propriétés hétérogènes. Leur particularité vient de l'évolution progressive de la proportion de chaque phase dans une direction précise, appelée "gradation". Cette structure ajustée fait varier les caractéristiques mécaniques du matériau — telles que le module d'Young, le module de cisaillement, ou la masse volumique — en fonction de l'emplacement le long de cet axe. Un objectif clé en mécanique des matériaux est de prédire comment ces matériaux se comportent. Pour cela, on détermine les propriétés globales, dites effectives, de cette combinaison à deux phases, une méthode généralement appelée homogénéisation. En réalité, les informations précises sur la taille, la forme, ou la disposition des particules font souvent défaut. Il devient alors essentiel d'étudier les propriétés effectives des microstructures graduées en considérant la répartition des proportions et une estimation de la forme des phases dispersées. Au fil du temps, plusieurs modèles micromécaniques ont été développés pour estimer les propriétés effectives des composites, vus comme uniformes à grande échelle. Ces approches peuvent être adaptées pour évaluer les propriétés des matériaux FG sur toute la plage de variation de leurs proportions, comme détaillé dans [28, 29].

Dans la littérature, certains modèles micromécaniques utilisés pour modéliser les matériaux FG peuvent être mentionnés, tels que les règles des mélanges (Voigt [30] et Reuss [31]), qui sont les plus simples parmi eux. Les limites de Hashin-Shtrikman [32], également appelées modèle d'assemblage de sphères composites, déterminent les limites supérieure et inférieure des propriétés effectives du matériau en appliquant le principe variationnel. Le modèle de Mori-Tanaka [33] ainsi que le modèle auto-consistant [34] évaluent les propriétés matérielles effectives en se basant sur les champs moyens de contraintes et de déformations locaux des constituants du composite. Le modèle triphasé [35], également appelé méthode auto-consistante généralisée, suit la méthode auto-consistante originale. Les modèles de Wakashima–Tsukamoto [36], Halpin–Tsai [37],

Tamura [38], et les éléments volumiques représentatifs locaux cubiques (LRVE) [39], sont également utilisés pour déterminer les propriétés matérielles effectives des FGM. Tous ces modèles ont été discutés en détail dans les références [28, 29], et une comparaison des propriétés estimées obtenues à partir de ces modèles a été réalisée.

Selon les études disponibles, la majorité des recherches sur les matériaux FG utilisent le modèle de Mori-Tanaka ainsi que la loi des mélanges (modèle de Voigt) afin d'analyser les propriétés effectives de ces matériaux. Ces deux modèles seront brièvement présentés dans les sections suivantes.

1.8.1.1 Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka sert à déterminer les modules effectifs d'un matériau en prenant en compte, de façon simplifiée, les interactions entre les inclusions proches. Il est surtout adapté aux parties de la microstructure graduée où une matrice continue, bien distincte (indice 1), coexiste avec une phase particulaire discontinue (indice 2), formée de particules sphériques, comme illustré dans la figure 1.22 [10].

Mori et Tanaka [33] ont mis au point une technique pour estimer la contrainte moyenne à l'intérieur de la matrice, technique que Benveniste [40] a ensuite adaptée pour évaluer les propriétés globales des composites. Avec ce modèle, les valeurs des modules de compressibilité (K) et de cisaillement (G) sont calculées selon les expressions présentées ci-après.

$$G = G_1 + \frac{V}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)(1-V)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \tag{1.1}$$

$$K = K_1 + \frac{V}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-V)}{(3K_1 + 4G_1)}} \tag{1.2}$$

V désigne la fraction volumique des particules. Le module d'Young effectif (E) et le coefficient de Poisson (v) sont ensuite exprimés à partir des modules de cisaillement et de compressibilité, selon les formulations suivantes.

$$E = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \tag{1.3}$$

$$\nu = \frac{9GK}{G + 3K} \tag{1.4}$$

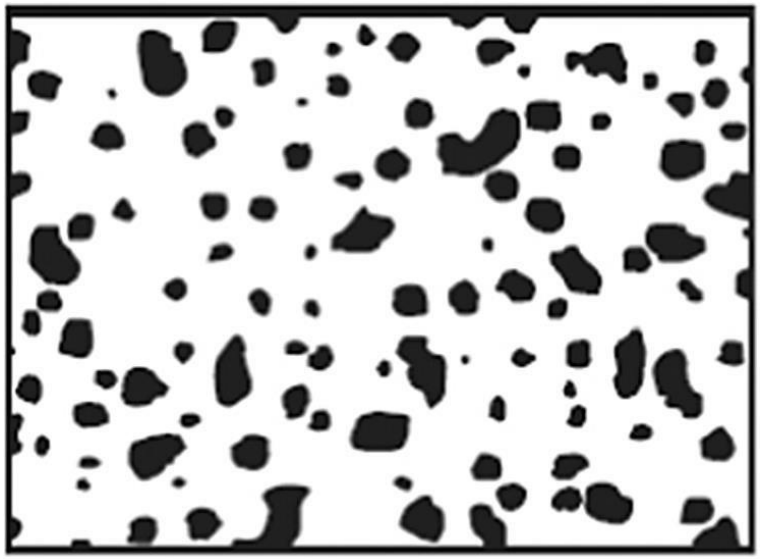


Figure 1.22 Matériau FG à deux phases avec microstructure particulaire [10].

1.8.1.2 Règle des mélanges (modèle de Voigt)

Le modèle de Voigt, introduit par Voigt en 1889 [30], est un outil d'homogénéisation reconnu, couramment appliqué pour calculer les propriétés élastiques effectives des composites. Voigt a basé son approche sur une moyenne des contraintes à travers les phases, en supposant que les déformations restent uniformes [29].

Sa facilité d'utilisation en fait une méthode privilégiée pour analyser les propriétés des matériaux fonctionnellement gradués. Dans ce cadre, une propriété ***P*** du FGM varie progressivement le long d'un axe précis, généralement l'épaisseur, selon les proportions volumiques et les caractéristiques des matériaux qui le composent. Cette relation s'exprime par la formule suivante :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i * V_i \tag{1.5}$$

Le paramètre ***P*** représente différentes propriétés fondamentales comme le module d'Young (E), le coefficient de Poisson (ν), ou la densité (ρ). Les notations ***Pi*** et ***Vi*** indiquent, pour chaque constituant i des FGM, sa propriété spécifique et sa proportion volumique. Pour respecter la conservation de la masse, l'ensemble des fractions volumiques des composants doit égaler 1, une condition traduite par l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 1 \tag{1.6}$$

1.8.2 Lois régissantes la variation des propriétés matérielles des FGM

Le changement de la caractéristique désirée d'un matériau FG dans une direction spécifique peut être adapté en fonction des exigences particulières, en prenant en compte différentes lois de gradation. Les lois de puissance, les lois exponentielles ainsi que les lois sigmoïdes sont couramment utilisées par les chercheurs pour définir les fractions volumiques, et elles seront présentées dans les sections qui suivent.

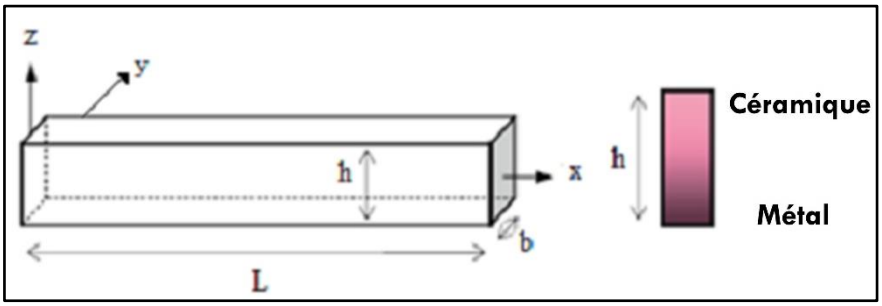


Figure 1.23 Géométrie d'une poutre FGM [41].

Dans un système cartésien, les coordonnées (*x*) et (*y*) sont utilisées pour définir le plan de la poutre, tandis que l'axe (*z*) est conforme avec son épaisseur (voir Figure 1.23). Les propriétés du matériau constitutif, notamment le module d'Young et le coefficient de Poisson, présentent des différences entre les surfaces supérieure et inférieure, se manifestant par une variation continue en fonction de la coordonnée *z*.

$$E=E(z) \text{ et } \quad \nu=\nu(z) \tag{1.7}$$

Une recherche réalisée par Ziou et ses collègues [41] a souligné l'importance du module de Young par rapport au coefficient de Poisson pour son impact sur les déformations. Cela permet d'envisager le coefficient de Poisson comme une constante dans l'analyse. Il est essentiel de souligner que le module de Young, notamment dans la direction de l'épaisseur d'une poutre FG, présente une variabilité importante qui est déterminée par les lois de gradation des matériaux constitutifs.

1.8.2.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La loi de puissance concernant la gradation des matériaux a été introduite pour la première fois par Wakashima et ses collaborateurs [42]. De plus, cette loi est largement utilisée par de nombreux chercheurs et est plus courante dans l'analyse des contraintes des FGM. Si une poutre FG d'épaisseur uniforme *'h'*, comme illustré dans la Figure 1.23, est utilisée pour l'analyse, alors selon cette loi, la propriété matérielle effective *P(z)* dans une direction spécifique (le long de z) peut être déterminée par :

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V(z) \tag{1.8}$$

P représente chaque propriété matérielle effective (*E*, α et β). Les paramètres P_1 et P_2 correspondent aux propriétés fondamentales du matériau formant la poutre, évaluées aux frontières de son épaisseur, c'est-à-dire la face supérieure et la face inférieure (définie par la coordonnée $z = \pm h/2$). Il est observable que les propriétés matérielles dépendent de la fraction volumique V des matériaux FG, laquelle est régie par une loi de puissance formulée de la manière suivante :

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^K \tag{1.9}$$

k ($0 \le k \le \infty$) représente le paramètre du matériau, également désigné comme l'indice de la loi de puissance.

La variation de la fraction volumique en fonction de l'épaisseur de la poutre est représentée dans la figure 1.24. Il est observable sur la figure que la fraction volumique diminue rapidement

près de la surface inférieure lorsque $k < 1$, tandis qu'elle augmente rapidement près de la surface supérieure lorsque $k > 1$.

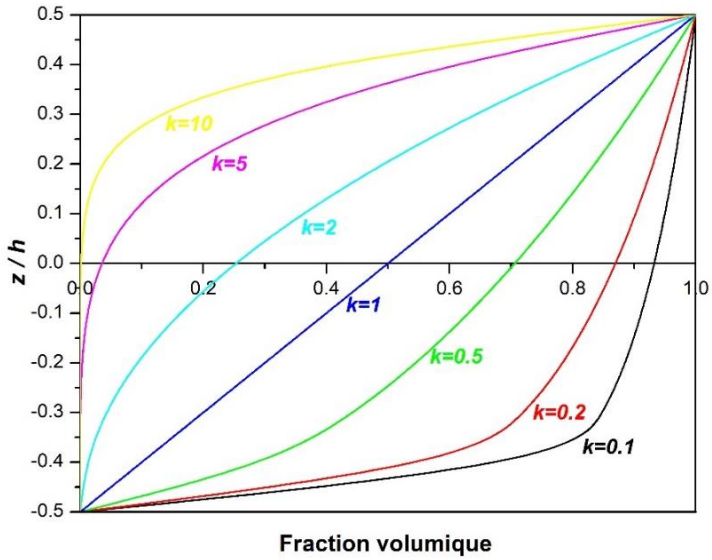


Figure 1.24 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.

1.8.2.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Lorsqu'une seule fonction de loi de puissance est intégrée au sein du composite multicouche, des concentrations de contraintes se manifestent aux interfaces où le matériau reste continu tout en subissant des variations rapides. En conséquence, Chung et Chi (43) ont proposé une nouvelle loi nommée loi sigmoïde, qui est le résultat de la combinaison de deux fonctions de loi de puissance. Cette approche vise à garantir une répartition uniforme des contraintes à travers toutes les interfaces. Cette loi est également employée pour diminuer les facteurs d'intensité des contraintes au sein des structures présentant des fissures. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies de la manière suivante :

$$V_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^K \qquad \text{Pour} \quad -h/2 \le z \le 0 \qquad (1.10a)$$

$$V_2(z) = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^K \qquad \text{Pour} \quad 0 \le z \le h/2 \qquad (1.10b)$$

En se basant sur la loi des mélanges, il est possible de calculer les propriétés effectives du S-FGM en utilisant la formule suivante :

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^K\right) \qquad \text{Pour} \quad -h/2 \le z \le 0 \qquad (1.11a)$$

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^K\right) \qquad \text{Pour} \quad 0 \le z \le h/2 \qquad (1.11b)$$

La variation de la fraction volumique, définie par les équations (1.10a) et (1.10b) qui décrivent des distributions sigmoïdes, est illustrée dans la figure 1.25. La poutre FG est communément appelée Poutre S-FGM.

1.8.2.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

La loi exponentielle est couramment utilisée pour traiter les problématiques associées au mécanisme de rupture des FGM, Elle a été proposée par Kim et Paulino [44]. La répartition des caractéristiques des poutres FG à travers leur épaisseur, selon une distribution exponentielle, est la suivante.

$$P(z) = p_2 e^{\frac{1}{h}\left(\ln\frac{p_1}{p_2}\right)\left(z+\frac{h}{2}\right)} \tag{1.12}$$

La figure 1.26 illustre la répartition des matériaux, notamment le module d'Young E, à travers la direction de l'épaisseur des poutres E-FGM.

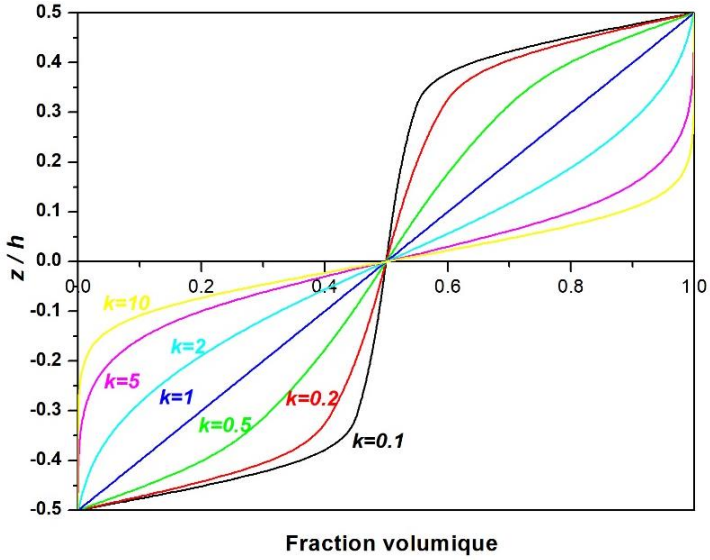


Figure 1.25 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur S-FGM.

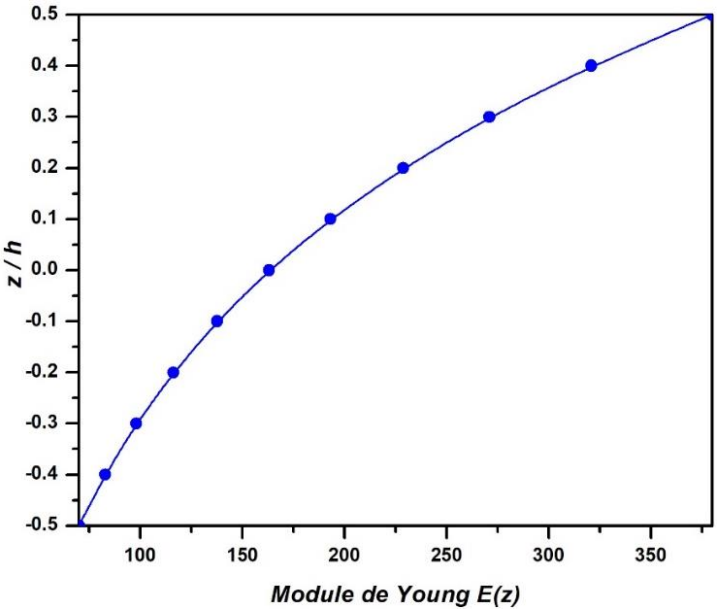


Figure 1.26 Variation du module d'Young E à travers l'épaisseur E-FGM.

1.8.2.4 Propriétés matérielles des poutre sandwichs en FGM

Le modèle mathématique a été élaboré dans le but de résoudre le problème d'une poutre sandwich constituée de trois couches. On considère une structure ayant une épaisseur totale *h*. Un système de coordonnées cartésiennes (*x*, *y*, *z*) est établi, où le plan *z=0* est associé sur le plan médian de la structure. Les surfaces supérieure et inférieure de la poutre se situent à $z = \pm h/2$. Les hauteurs verticales des diverses interfaces et des surfaces externes sont désignées par $h_0=-h/2$, h_1, h_2 et $h_3=h/2$ (voir Figure 1.27). En général, on identifie deux configurations de structures sandwich :

Les sandwichs en FGM se caractérisent par des propriétés matérielles variant selon une loi de puissance en fonction de l'épaisseur des couches de surface (peaux), avec un cœur en céramique homogène. De même, les structures sandwichs FGM présentent des propriétés matérielles homogènes dans les couches de surface (métallique sur une face et céramique sur l'autre), avec un noyau central en P-FGM.

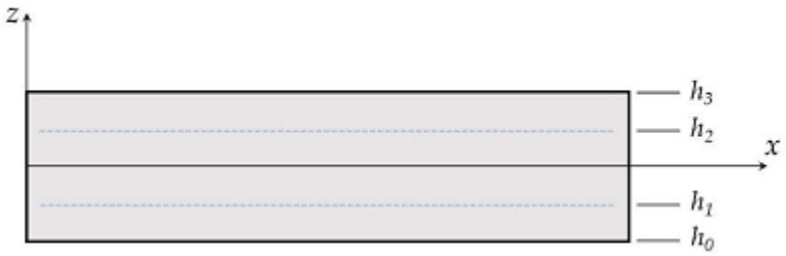


Figure 1.27 Configuration d'une poutre sandwich FG.

Dans le cadre de cette thèse, l'étude se concentrera seulement sur les poutres sandwich caractérisées par des couches externes (peaux) en matériaux fonctionnellement gradués (P-FGM) et un noyau homogène en céramique.

1.9 Conclusion

Les Matériaux à Gradient Fonctionnel ont été présentés dans ce chapitre. Les chercheurs japonais ont été confrontés au problème de la rupture des composites par délamination lorsqu'ils ont essayé de développer un matériau composite adapté à un environnement de travail difficile dans un projet spatial. Les FGM se distinguent de manière différente des composites conventionnels. Certaines caractéristiques fondamentales des FGM ont donc été mises en évidence. Un bref historique de la recherche et du développement des FGM a également été présenté. Les FGM sont utilisées comme revêtements de surface (revêtements minces) et comme matériaux en bloc (massifs) en fonction de l'application prévue. Les techniques de fabrication des FGM pour le revêtement mince et les matériaux en bloc ont été discutées. Les FGM ont évolué depuis leur application thermique initiale, pour laquelle elles ont été développées, et sont actuellement utilisées pour d'autres applications. Certaines de ces applications ont été présentées. à la conclusion du chapitre, une analyse détaillée est consacrée à l'exposé des modèles de micromécanique ainsi qu'aux lois de gradation utilisées pour décrire les propriétés effectives des matériaux FG.

En raison de l'applicabilité plus large des FGM, il est nécessaire d'étudier leur comportement. Ainsi, pour prédire avec précision le comportement des structures FG, plusieurs théories et méthodes analytiques et numériques sont rapportées dans la littérature. Le chapitre suivant présente les différentes théories utilisées pour l'analyse des poutres FG et résume les recherches portant sur le comportement statique, vibratoire et de flambage des poutres FG.

Chapitre 2

Théories et Recherches Réalisées sur les Poutres FG

2.1 Introduction

L'adoption croissante des Matériaux Fonctionnellement Gradués en ingénierie structurelle est motivée par leur aptitude à optimiser les caractéristiques mécaniques des composants tels que plaques, coques, et poutres. Ces matériaux composites, obtenus par une variation graduelle de la composition entre deux matériaux (par exemple, une céramique et un métal), permettent de gérer les contraintes thermiques, de résister aux environnements à haute température et de limiter la corrosion.

Une modélisation exacte du comportement mécanique des poutres sandwich FG, incluant leur réponse dynamique, de flexion et de flambage, est indispensable pour leur conception, indépendamment de la configuration du noyau ou des faces graduées.

La modélisation bidimensionnelle des poutres, un principe fondamental en mécanique des structures, s'appuie sur des théories qui décrivent les contraintes et les déformations. Ces théories comprennent :

- La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT), bien que simplifiée, demeure applicable aux poutres fines, en dépit de son omission des effets de cisaillement transversal.
- La théorie de Timoshenko (FSDT), appropriée aux poutres de moyenne épaisseur, qui prend en compte le cisaillement transversal.
- Pour une modélisation fidèle du comportement des poutres épaisses, il est impératif d'utiliser les théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT), en raison de leur capacité à capturer les effets de cisaillement.

Ces modèles, basés sur des hypothèses relatives à la distribution des contraintes et des déformations dans l'épaisseur de la poutre, permettent de simplifier un problème tridimensionnel en une représentation bidimensionnelle.

Dans le cadre de cette investigation, une analyse approfondie de ces théories sera présentée, en mettant l'accent sur leur application à la modélisation des poutres FG. Afin de contextualiser les innovations de cette étude, une analyse critique des recherches actuelles sur le comportement dynamique, en flambage et au flexion des poutres FG sera présentée.

2.2 Les théories des poutres

Le terme « poutre » désigne un élément dont la longueur est considérablement supérieure aux dimensions transversales, se distinguant par une section fine. lui confère un rôle primordial en tant que composant porteur dans des secteurs d'ingénierie variés. On les retrouve dans la réalisation de machines, la conception de véhicules terrestres et maritimes, la construction de bâtiments, ou encore la fabrication navale. Cependant, le modèle de la poutre peut s'appliquer à une variété de pièces, sous réserve du respect de certaines normes. Il est important de noter que cet élément est désigné par le terme "barre" lorsque les forces extérieures agissent selon son axe, et par le terme "arbre" lorsqu'il est soumis à un moment de torsion ou à un mouvement de rotation. Les fondements théoriques de l'analyse des poutres reposent sur deux principes essentiels, à savoir le principe de Saint-Venant et le principe généralisé de Navier-Bernoulli.

Pour construire un modèle théorique permettant d'étudier les poutres, il est indispensable de recourir à des hypothèses simplifiées, perçues comme des estimations fiables du comportement effectif. La distinction entre ces modèles réside dans l'intégration, ou l'exclusion, de l'effet de la déformation due au cisaillement transversal. Les modèles les plus courants et référencés dans les publications scientifiques seront examinés en détail dans la section suivante.

2.2.1 La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT Théorie classique des poutres)

Le modèle traditionnel d'analyse des poutres, connu sous l'acronyme CBT, repose sur les principes théoriques établis par les postulats d'Euler-Bernoulli. La méthodologie a été initialement formulée par Love en 1888 [45], une version qui se distingue par sa simplicité et son ancienneté, et qui prend racine dans les principes établis par Kirchhoff en 1850 [46]. Ces derniers ont également servi de base aux postulats de Kirchhoff concernant les plaques, communément appelées « théorie des plaques minces ».

Le modèle, dont la base est la théorie d'Euler-Bernoulli, examine la flexion des poutres, tout en négligeant les déformations causées par le cisaillement. Il est important de souligner que cette théorie est particulièrement adaptée aux poutres minces. Elle postule une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur de la poutre.

Les principes de base de cette méthodologie (CBT) sont :

- Les plans de coupe, initialement orthogonaux à l'axe neutre, demeurent planes et orthogonaux après déformation, tel qu'indiqué dans la Figure 2.1 [47]. Cette hypothèse implique que l'effet des déformations liées au cisaillement transversal sont considérées comme négligeables, ce qui signifie que la déformation de la poutre est principalement due aux contraintes de flexion.
- De ce fait, la déformation normale transversale ε_z, produite par les charges transversales, est jugée non significative.
- La contrainte normale transversale σ_z, ayant une valeur plus faible que les autres contraintes existantes dans la poutre, peut être négligée.
- La fonction qui décrit la distribution des déplacements à travers l'épaisseur de la poutre est considérée comme nulle :

$$f(z) = 0 \tag{2.1}$$

Dans la majorité des contextes d'application, la méthode d'analyse classique des poutres (CBT) offre une précision remarquable, ne présentant que des écarts négligeables par rapport aux calculs issus de la théorie de l'élasticité. Concernant les poutres élancées, et en accord avec les principes de la théorie classique, tout en tenant compte des hypothèses précitées, le mouvement d'un point M est défini par deux composantes différentes [47] :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ w(x,z) &= w_0(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans cette formulation, u, w représentent respectivement les composantes de déplacement le long des axes x et z ; u_0, w_0 désignent les composantes de déplacement le long de ces mêmes axes au niveau de la fibre neutre ($z=0$) ; et $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ la rotation engendrée par la flexion.

Ces hypothèses impliquent l'absence de tout glissement entre les diverses sections transversales de la poutre :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

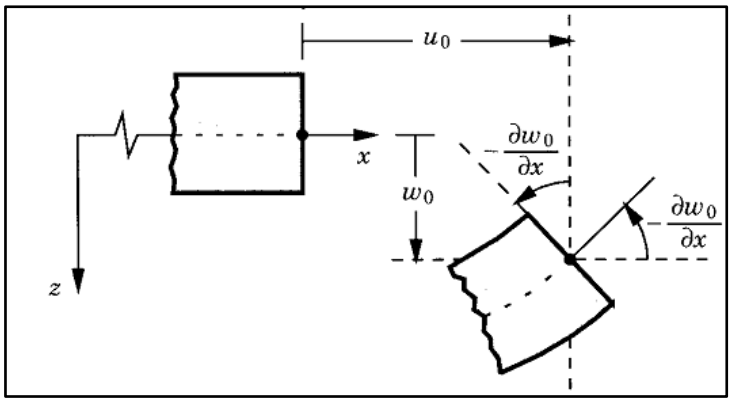


Figure 2.1 Géométrie non déformée et déformée d'une poutre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli (CBT) [47].

Puisque l'effet du cisaillement transversal n'est pas inclus dans cette théorie, les résultats concernant les poutres, et plus particulièrement celles constituées de matériaux composites avancés, seront imprécis. Dans cette optique, la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre a été développée.

2.2.2 Modèle de Timoshenko (Théorie des poutres de premier ordre FSDBT)

Une approche plus sophistiquée et générale pour l'analyse des poutres courtes est fournie par la théorie de Timoshenko (Timoshenko, 1972), également connue sous le nom de théorie de déformation par cisaillement du premier ordre [48]. Contrairement à la théorie classique des poutres, elle intègre un paramètre supplémentaire.

On peut établir des parallèles entre ce modèle et celui de Mindlin-Reissner (Reissner, 1945 [49] ; Mindlin, 1951 [50]), qui est fréquemment appelé la théorie des plaques de Mindlin.

L'incorporation de l'effet du cisaillement transversal constitue une amélioration majeure par rapport au modèle traditionnel des poutres.

Bien que la planéité des sections transversales soit maintenue, leur orthogonalité par rapport à l'axe neutre de la poutre varie en raison du cisaillement transversal observé par Timoshenko à travers l'épaisseur, comme illustré dans la figure 2.2 [47]. De ce fait, les déformations dues au cisaillement transversal sont constantes à travers l'épaisseur, où la fonction ***f(z)*** est définie par ***z***. De plus, cette théorie suppose que la contrainte normale transversale σ_z est nulle.

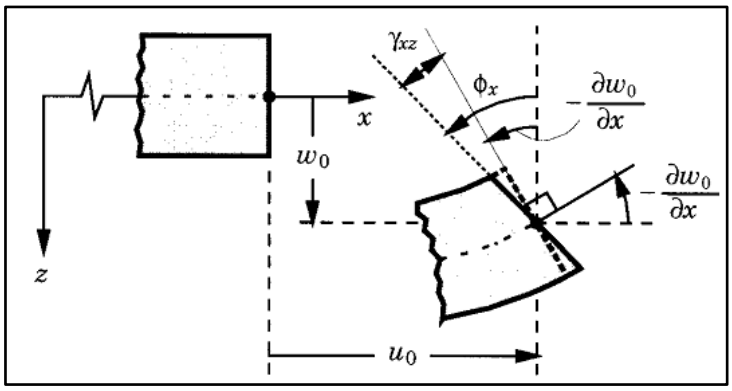


Figure 2.2 Illustration comparative de la géométrie d'une poutre de Timoshenko, avant et après déformation [47].

Le champ de déplacement d'un point M, situé à (x, z), est exprimé en fonction de paramètres spécifiques selon la relation suivante [47] :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) + z\phi_x \\ w(x,z) &= w_0(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les paramètres (u_0, w_0) et (ϕ_X) représentent respectivement les déplacements dans le plan médian (*z=0*) et la rotation autour de l'axe y.

La contrainte de cisaillement est calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz}.G \tag{2.5}$$

Où G : représente le module de cisaillement transverse.

Le modèle de Timoshenko, également désigné comme la théorie du premier ordre, étend la cinématique de la théorie classique des poutres. Le modèle cinématique, dans cette extension, intègre la déformation résultant du cisaillement transversal, illustrée dans la figure 2.3.

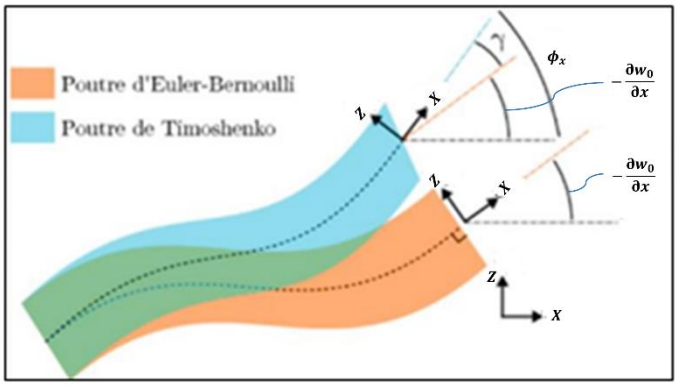


Figure 2.3 Représentation simplifiée d'une poutre selon deux théories des poutres.

L'hypothèse selon laquelle les déformations de cisaillement transversal sont uniformes à travers toute l'épaisseur d'une poutre implique que la contrainte de cisaillement transversal reste constante. En réalité, cette contrainte suit une variation parabolique le long de la section transversale. Par conséquent, l'intégration d'un **facteur de correction de cisaillement** dans le modèle de Timoshenko se révèle indispensable. Cette correction rend possible une représentation précise de la variation réelle de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant les conditions aux limites. Ces dernières exigent que la contrainte de cisaillement disparaisse en surface, c'est-à-dire qu'elle soit égale à zéro sur les faces externes de la poutre.

2.2.2.1 Facteur de correction du cisaillement

L'ajustement de la rigidité s'effectue au moyen du facteur de correction du cisaillement en ce qui concerne le cisaillement transversal et, par conséquent, l'exactitude des résultats de la FSDT dépendra significativement du coefficient de correction « ks» [51]. Afin d'améliorer la FSDT, de nombreuses études ont été menées par de nombreux chercheurs en utilisant différentes approches pour calculer les coefficients pour des plaques homogènes et composites, de manière analogue aux poutres. Le concept initial de ce coefficient pour des plaques homogènes isotropes a été introduit par Reissner [49]. Il a proposé une valeur de 5/6 en s'appuyant sur une méthode de calcul basée sur l'équilibre statique ainsi que sur des considérations relatives à l'équivalence énergétique. Mindlin [50] a été le premier à prédire le facteur de correction basé sur l'analyse dynamique, où il a proposé une valeur de $\pi^2/12$ en égalant la fréquence approximative de la première vibration asymétrique d'épaisseur - cisaillement à la solution exacte. Lorsqu'on applique la FSDT aux poutres - plaques composites. Yu [52] a donné une analyse précise du coefficient de correction de cisaillement en procédant à une comparaison des fréquences fondamentales obtenues à partir de la théorie de l'élasticité avec les résultats obtenus par la comparaison des fréquences fondamentales issues de la théorie de l'élasticité avec celles du modèle de Timoshenko ont révélé que, pour une plaque sandwich typique, ce L'analyse comparative des énergies de déformation de cisaillement, dans le but de déterminer le coefficient de correction de cisaillement d'un stratifié orthotrope symétrique, a été réalisée par Chow [53]. Cette procédure a été étendue par Whitney [54] aux matériaux stratifiés orthotropes non symétriques, et la précision de cette méthode a été établie par la comparaison des solutions de flexion statique pour différentes plaques stratifiées avec celles obtenues en respectant la théorie exacte de l'élasticité pour chaque couche, ainsi que de conditions de continuité à l'interface. De plus, Whitney [55] a formulé une équation pour le coefficient en tenant compte de la flexion cylindrique en fonction des dimensions longitudinales et transversales

de la plaque. Des valeurs discrètes du facteur de correction ont été déterminées pour les plaques stratifiées et sandwich, qu'elles soient symétriques ou asymétriques. L'étude de la variation du facteur de correction en fonction du nombre de couches a mis en évidence un écart par rapport à la valeur standard pour les plaques homogènes lorsque le nombre de couches augmente. Des procédures de prédiction ont été proposées par Noor et al [56] pour ajuster les coefficients. Les facteurs de correction du cisaillement, résultant de cette approche, sont influencés par les conditions aux limites, la géométrie de la plaque et les types de chargement appliqués. Par conséquent, leur application directe à d'autres configurations de plaques n'est pas possible.

L'application des matériaux à gradient fonctionnel dans les structures de poutres-plaques a souvent reposé sur l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement constant, typiquement fixé à 5/6. Cependant, cette simplification s'avère inadéquate pour l'analyse précise des plaques FG, en raison de la variation continue de leurs propriétés matérielles [57]. Afin de mieux cerner cette complexité, Efraim et Eisenberger [58] ont élaboré une formulation qui prend en compte le coefficient de Poisson et les fractions volumiques des gradients présents. Une approche méthodologique a été déployée par Nguyen et al [59] afin de quantifier les coefficients de correction propres aux matériaux à gradient fonctionnel. Il a été établi que ce facteur dépend directement du rapport entre les modules d'élasticité des composants et de la répartition des matériaux dans les modèles. Cette méthode s'appuie sur une analyse comparant l'énergie de déformation liée aux contraintes de cisaillement moyennes à celle obtenue par les équations d'équilibre. Ils ont analysé une flexion cylindrique autour de l'axe y, en ignorant les effets secondaires sur les contraintes de cisaillement, révélant des écarts marqués entre les coefficients de correction des plaques FG et ceux des matériaux homogènes. Une nouvelle expression de ces coefficients, adaptée à la théorie des plaques de Mindlin, a été introduite par Hosseini-Hashemi et ses collaborateurs [61]. Dans un autre travail, Nguyen et son équipe [60] ont évalué les facteurs de correction pour les modèles FG en utilisant la théorie de déformation de premier ordre. Pour éviter les difficultés associées à la correction du cisaillement, des théories avancées de déformation par cisaillement d'ordre élevé ont été mises au point, offrant des solutions plus raffinées.

2.2.3 La Théorie de déformation en cisaillement d'Ordre Elevé (HSDTs –High Ordre deformation Theory)

Pour surmonter les limites des modèles classiques de poutres (CBT) et des théories de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), et pour reproduire fidèlement la variation des contraintes et déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une poutre sans dépendre de facteurs de correction, plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur ont été développées [62]. Ces approches considèrent une évolution non linéaire des contraintes à travers l'épaisseur, entraînant un profil non linéaire des déplacements dans cette direction. Cette méthode se révèle plus exacte que la théorie de premier ordre, grâce à l'ajout d'une fonction capturant le "gauchissement", un effet qui déforme la planéité de la section transversale de la poutre, tel que montré dans la figure 2.4 [47]. La fonction *f(z)* traduit ce gauchissement, et sa dérivée *f'(z)* reflète le comportement en cisaillement. Ces théories se montrent surtout performantes pour simuler le comportement des poutres ou plaques épaisses, où la déformation transversale joue un rôle majeur. L'analyse repose sur un développement en série de Taylor des déplacements, offrant une représentation proche de la théorie en trois dimensions [63]. Le déplacement est alors donné par l'expression suivante :

$$\Delta_i(x,y,z) = \Delta_i(x,y) + z\Theta_i^{(1)}(x,y) + z^2\Theta_i^{(2)}(x,y) + ... + z^j\Theta_i^{(j)}(x,y) \tag{2.6}$$

Où, *j* définit l'ordre utilisé dans la théorie et *i* = 1, 2,3.

Le modèle de Timoshenko, souvent désigné sous les appellations de théorie du premier ordre ou de Reissner-Mindlin, résulte d'une troncature du développement en série de Taylor à l'ordre *j* =1 et $\Theta_3^{(1)} = 0$. Si un problème spécifique se révèle insuffisamment résolu par un modèle de premier ordre, l'adoption d'un modèle d'ordre supérieur (deuxième, troisième, etc.) devient impérative, ce qui implique une extension du développement en série des déplacements.

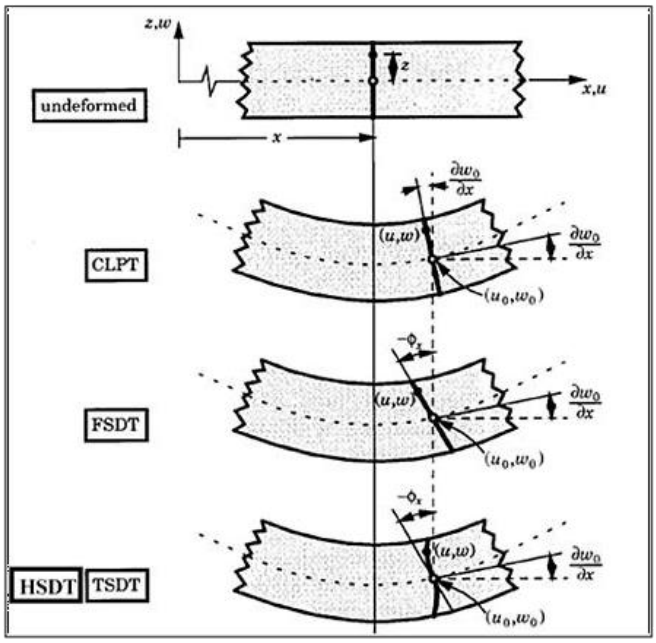


Figure 2.4 Géométrie non déformée et déformée d'une poutre selon le CBT, FSDT et HSDT [47].

Bien que les formulations de déformation de cisaillement du second ordre (SSDT) [64] produisent des résultats légèrement plus précis que leurs prédécesseurs FSDT, elles héritent de limitations similaires, notamment la persistance de l'exigence des facteurs de correction. Le maintien de la nécessité d'une modélisation classique du champ de déplacement pour ces théories se traduit par la formulation suivante :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x,z) + z\phi_x(x,z) + z^2\psi_x(x,z) \\ w(x,z) &= w_0(x,z) + z\phi_z(x,z) + z^2\psi_z(x,z) \end{aligned} \tag{2.7}$$

les paramètres ψ_x , ψ_z se présentent comme des fonctions de second ordre.

Des travaux variés sur les modèles de déformation par cisaillement d'ordre trois (TSDT), parfois qualifiés de schémas paraboliques pour le cisaillement, ont été réalisés par de multiples experts [62]. La formulation du champ de déplacement selon le TSDT de Reddy [62] se présente ainsi :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x,z) + z\phi_x(x,z) + z^2\psi_x(x,z) + z^3\zeta_x(x,z) \\ w(x,z) &= w_0(x,z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

les paramètres ψ_x , ζ_x sont des fonctions d'ordre élevé.

Plus l'ordre de l'expansion augmente, plus le nombre de variables supplémentaires s'accroît, rendant leur analyse souvent ardue. Pour réduire la complexité des facteurs liés au déplacement, des transformations ont été appliquées. Ces ajustements cherchent à retirer les termes de degré supérieur dans l'expansion de Taylor, tout en ajoutant une 'fonction propre au cisaillement'. Après ces adaptations, la représentation du champ de déplacement se formule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) - z\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x) \\ w(x,z) &= w_0(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

La fonction *f*(*z*) illustre la nature du cisaillement, facilitant ainsi l'examen de la distribution des efforts internes et des altérations de forme provoquées par le cisaillement transversal le long de la profondeur de la poutre. D'autre part, une formulation mathématique, donnée par $\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$, avec ϕ_x désignant la rotation autour de l'axe *y*.

D'après l'équation (2.9), si l'on impose *f*(*z*) = *0*, on déduit le champ de déplacement propre à la théorie classique des poutres (CBT). Cependant, lorsque la valeur de *f(z)* est fixée à *z*, cela révèle le schéma de déplacement propre à la théorie de cisaillement d'ordre initial (FSDT). Enfin, une approche plus élaborée, développée par Reddy dans le cadre de la théorie de déformation par cisaillement de troisième ordre (TSDT) [47, 62], repose sur une fonction *f(z)* spécifique pour représenter ce champ.

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2} \tag{2.10}$$

Cette théorie révèle une répartition en forme de parabole des tensions dues au cisaillement transversal, respectant les exigences aux frontières qui fixent une tension de cisaillement inexistante sur les faces externe et interne de la poutre (valeur nulle à $z = \mp h/2$). Elle procure ainsi une estimation convaincante du paysage des tensions transversales, se rapprochant des résultats issus des calculs d'élasticité en trois dimensions. L'élaboration d'une représentation algébrique de la fonction *f(z)*, qui définit les effets du cisaillement transversal, a permis de concevoir divers cadres théoriques sophistiqués, largement étudiés dans les recherches existantes. Par ailleurs, une autre méthode sophistiquée, introduite par Touratier [65], repose sur une fonction basée sur une courbe sinusoïdale. Connue sous le nom de **théorie du cisaillement à déformation sinusoïdale** (**SSDT**), cette méthode se distingue comme un exemple marquant des approches HSDT s'appuyant sur des concepts trigonométriques, et elle repose sur la formulation présentée ci-après:

$$f(z) = \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{2.11}$$

Dans ce cadre théorique, les tensions liées au cisaillement transversal adoptent un motif cosinusoïdal le long de la hauteur de la poutre, découlant d'un modèle bâti sur une fonction sinusoïdale. Une étude croisée révèle que cette approche offre un niveau de finesse supérieur à celui fourni par la méthode de Reddy. Par ailleurs, Soldatos [66] a introduit **une théorie de déformation par cisaillement de type hyperbolique** (**HSDT**), élaborée en s'appuyant sur les bases suivantes :

$$f(z) = h\sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z\cosh\frac{1}{2} \tag{2.12}$$

La théorie de la déformation par cisaillement exponentiel (**ESDT**) mise au point par Karama et son équipe [67], s'appuie sur les principes suivants :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \tag{2.13}$$

Les schémas suivants illustrent l'évolution de la fonction de forme *f(z)* à travers l'épaisseur pour différents modèles, ainsi que la dérivée *f'(z)* associée à l'épaisseur de la poutre.

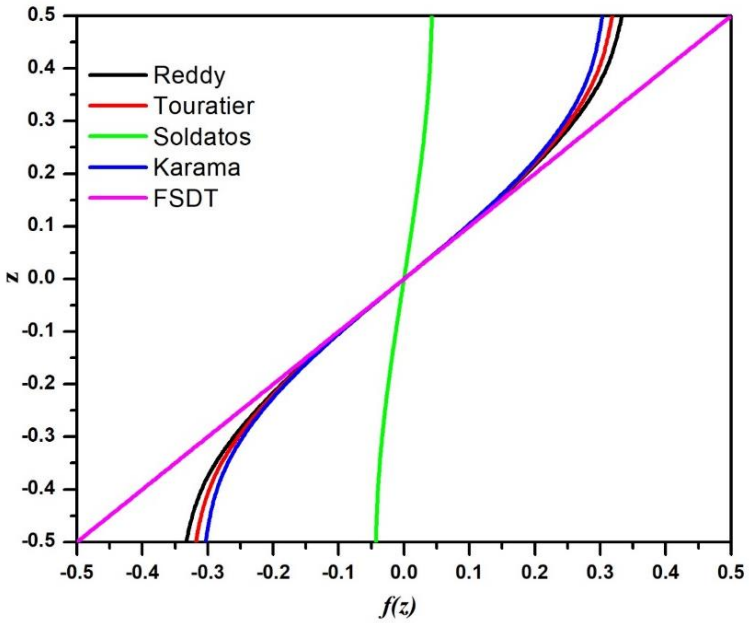


Figure 2.5 Variation de la fonction de forme ***f(z)*** à travers différents modèles en fonction de l'épaisseur.

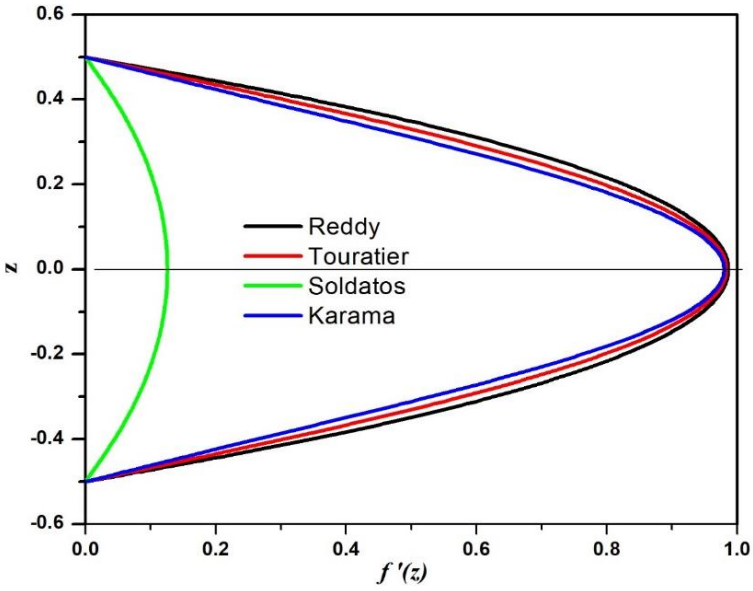


Figure 2.6 Variation de la dérivée de la fonction de forme ***f '(z)*** à travers différents modèles en fonction de l'épaisseur.

Bien qu'elles n'utilisent pas de coefficient ajusté pour le cisaillement, les théories sophistiquées d'ordre élevé (HSDT) se singularisent par des formules de mouvement plus complexes que celles de la théorie initiale de cisaillement (FSDT). Pour surmonter cet obstacle, Shimpi [68] a introduit une théorie affinée des plaques (RPT) qui sépare le déplacement vertical en effets distincts de flexion et de cisaillement. Le point fort de cette méthode réside dans son économie de variables (quatre inconnues seulement) ainsi que d'équations régissant par rapport au FSDT. En outre, cette théorie ne nécessite pas de facteur de correction du cisaillement et offre une distribution parabolique du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Elle présente également de nombreuses analogies avec le CBT en ce qui concerne les équations du mouvement, les conditions aux limites ainsi que les formulations des contraintes résultantes. Le champ d'application de cette théorie s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) - z\frac{\partial w_b(x)}{\partial x} + f(z)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \\ w(x,z) &= w_b(x) + w_s(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ici, w_b et w_s désignent les parts du déplacement vertical attribuées respectivement à l'effet de flexion et à celui du cisaillement. Il est utile de souligner que les théories des poutres évoquées plus tôt omettent de prendre en compte l'allongement selon l'épaisseur ou la déformation normale (soit $\varepsilon z = 0$), en imaginant une constance du mouvement transversal à travers la profondeur. Cette particularité prend une importance majeure pour les poutres épaisses ou modérément épaisses, exigeant une considération spécifique. **Les théories quasi-3D**, classées parmi les modèles avancés (HSDTs), intègrent cette considération en adoptant une déformation verticale stable à travers l'épaisseur [69]. Leur pertinence se manifeste surtout dans l'analyse des poutres épaisses ou modérément épaisses, où elles jouent un rôle clé :

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) - z\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x) \\ w(x,z) &= w_0(x) + g(z)\varphi_z(x) \end{aligned} \tag{2.15}$$

"Les quatre variables de déplacements au niveau du plan central de la poutre sont nommées par u_0, w_0, φ_x et φ_z. Les fonctions $g(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions définissant le cisaillement.

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{2.16}$$

Les concepts théoriques mentionnés précédemment ont été largement mobilisés par de nombreux experts pour prévoir de manière précise les performances des poutres FG. Dans ce travail de thèse, nous suggérons d'exploiter cette approche pour étudier le comportement statique des poutres sandwiches FG. La partie qui suit condense les investigations relatives aux propriétés statiques, dynamiques et de stabilité des poutres FG.

2.3 Études de recherche rapportées sur les poutres FG

En raison de leurs qualités structurelles remarquables, les ouvrages conçus avec des matériaux composites à gradient fonctionnel ont éveillé un intérêt prononcé pour une investigation poussée. Dans cette section, nous nous sommes attachés à offrir un aperçu détaillé des études effectuées à ce jour sur les poutres FG. La priorité est donnée à l'analyse des caractéristiques

statiques, dynamiques et de tenue au flambage des poutres FG, qu'elles soient simples ou en sandwich. Cette exploration vise à révéler toute la richesse du domaine de recherche entourant les matériaux FG.

2.3.1 Analyse statique des poutres FG

Saisir les spécificités du comportement statique des poutres FG représente un enjeu clé pour concevoir ce genre de constructions. De ce fait, un grand nombre de chercheurs ont investi ce champ en examinant les poutres FG, qu'elles soient monocouches ou de type sandwich, à travers un éventail de modèles théoriques et d'outils de calcul variés. Ce passage vise à exposer quelques avancées notables issues des publications existantes. Chandrashekhara et Bangera [70] ont examiné la flexion des poutres composites, qu'elles soient isotropes ou multicouches. Leur recherche a donné lieu à une modélisation mathématique s'appuyant sur une théorie avancée de déformation par cisaillement, adaptée à des analyses linéaires et non linéaires sur le plan géométrique. Ils ont scruté les facteurs affectant les déplacements non linéaires grâce à la technique des éléments finis. Smith et Bank [71] ont mis en parallèle des résultats issus de calculs et d'essais sur la déformation et la torsion des poutres composites à profil ouvert. Concernant la flexion des poutres FG, Sankar [72] a imaginé une méthode ancrée dans les lois de l'élasticité pour estimer les efforts normaux et tangentiels, ainsi que le moment fléchissant des poutres FG sous charges verticales. Il a choisi une variation exponentielle pour traduire les changements des attributs matériels sur la profondeur, en s'appuyant sur les bases de la théorie d'Euler-Bernoulli. Chakraborty et ses collègues [73] ont inventé un système original de poutre, inspiré de la théorie de Timoshenko au premier degré, pour explorer l'élasticité des poutres FG. Ils ont fusionné une règle de puissance avec une fonction exponentielle afin de décrire l'évolution des propriétés des matériaux FGM. Kutis et al. [74] ont proposé une simulation par éléments finis pour dépeindre une poutre FG dont les attributs matériels varient dans l'espace. Pindera et Dunn [75] ont scruté la pertinence d'une théorie avancée en menant une exploration poussée par éléments finis sur les FGM, observant une harmonie frappante entre les estimations de cette méthode et les résultats précis obtenus à partir des simulations détaillées par éléments finis. Par ailleurs, Reddy [76] a imaginé un outil d'élément fini à convergence rapide, conçu pour résoudre les défis statiques des poutres de Timoshenko. Ying et son équipe [77] ont forgé une réponse analytique rigoureuse pour décrypter la flexion et les oscillations libres des poutres FG posées sur une base élastique de style Winkler-Pasternak, en intégrant des éléments décisifs tels que le niveau de gradient, les dimensions de la poutre et les particularités du support. Lu et al. [78] ont envisagé des poutres FG bidirectionnelles, dont les qualités matérielles évoluent exponentiellement à la fois en hauteur et en longueur, pour explorer leur flexion dans un cadre thermique en s'appuyant sur une technique numérique sophistiquée exploitant l'espace d'état, mettant en lumière qu'une sélection méticuleuse de matériaux dotés d'une faible sensibilité thermique et d'une répartition homogène peut significativement réduire les tensions engendrées par les variations de température. Benatta et al. [79] ont minutieusement exploré les conséquences du gauchissement ainsi que des altérations dues au cisaillement sur des poutres FG courtes soumises à une flexion en trois points, en s'appuyant sur des modèles avancés de flexion pour établir les lois directrices via le principe du travail virtuel. Sous des sollicitations puissantes, les poutres peuvent manifester des réponses non linéaires découlant de leur géométrie et de leurs matériaux, un aspect que Kang et Li [80] ont

analysé en étudiant une poutre en porte-à-faux FG non linéaire sous une force terminale, en mobilisant des théories couvrant les déformations faibles et fortes.

D'après l'examen des travaux antérieurs cité plus tôt, la plupart des spécialistes ont privilégié des cadres analytiques pour examiner les réactions des poutres sandwich à gradient fonctionnel. Cependant, les solutions analytiques en deux ou trois dimensions restent souvent confinées à des formes géométriques basiques, à des modèles prédéfinis de variation des propriétés des matériaux comme une montée exponentielle ou une loi de puissance, et à des situations spécifiques de charges ou de conditions aux limites. Frostig et al. [81] ont façonné une approche inédite d'ordre supérieur, ancrée dans des concepts variationnels, pour sonder la flexion d'une poutre sandwich dotée d'un cœur souple en direction transversale. Venkataraman et Sankar [82] ont examiné la flexion d'une poutre sandwich à noyau FG en se fondant sur une solution tirée des lois élastiques, en supposant une augmentation exponentielle de la fermeté du noyau à travers sa hauteur. Daouadji et al. [83] ont appliqué une équation différentielle partielle pour étudier la résistance statique d'une poutre FG en porte-à-faux soumise à une charge répartie linéairement. Thai et Vo [84] ont exploité la méthode de Navier pour dégager une solution exacte concernant une poutre FG à appuis simples. Kim et Lee [85] ont décrypté la flexion de poutres sandwich FG à épaisseur variable en s'inspirant de la théorie d'Euler-Bernoulli adaptée aux éléments finis. Simsek et Al-Shujairi [86] ont révélé des singularités dans le comportement d'une poutre sandwich FG sous l'effet d'une charge en mouvement. Apetre et al. [87] ont conduit une analyse croisée pour jauger les mérites de la théorie du cisaillement transverse de premier ordre face à une version plus avancée dans l'étude de la flexion des poutres sandwich FG. Nguyen et Nguyen [88] ont dévoilé une théorie de cisaillement à déformation hyperbolique inversée, taillée pour l'examen statique des poutres sandwich FG suivant une distribution en puissance. Li et al. [89] ont introduit une théorie novatrice de cisaillement d'ordre élevé, fondée sur des équilibres, couplée à un élément poutre hybride pour analyser la statique des poutres sandwich FG, qu'elles soient simplement appuyées, encastrées ou en porte-à-faux. Kurtaran [90] a employé la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM) pour analyser la flexion et les réactions transitoires d'une poutre courbée FG d'épaisseur modérée, en se basant sur une approche itérative variationnelle. Eroglu [91] s'est penché sur les grandes déformations des poutres planes courbes en matériaux FG. Thurnherr et al. [92] ont analysé la réaction à la flexion d'une poutre multicouche courbée à courbure fixe en adoptant un modèle poutre d'ordre supérieur. Plus récemment, Sayyad et Avhad [93] ont étudié les poutres sandwich FG en appliquant une théorie hyperbolique de déformation par cisaillement (HSDT), mettant de côté les effets de déformation transversale. Koutoati et son équipe [94] ont examiné les poutres sandwich FG à travers une théorie avancée, en omettant la contrainte normale transversale dans leur modèle, et ont mis en place une technique éléments finis à deux nœuds offrant huit degrés de liberté par nœud pour effectuer leur étude. Avhad et Sayyad [95], ainsi que Sayyad et Ghugal [96], ont investigué la flexion des poutres courbées sandwich FG via la méthode de Navier. De nombreux chercheurs ont scruté la flexion des structures FG sous des charges thermo-mécaniques non linéaires. Ching et Chen [97] ont exploré la réponse thermo-mécanique d'une poutre FG élastique linéaire face à des sollicitations thermiques, en utilisant une approche locale Petrov-Galerkin sans maillage, et ont examiné les attributs changeant avec la température à travers des modèles micromécaniques, analysant leur influence sur ces propriétés et les comportements thermo-mécaniques des poutres. Ma et Lee [98] ont exposé le comportement statique des poutres FGM sous charges thermo-mécaniques dans le plan, en s'appuyant sur une théorie classique non

linéaire des poutres, proposant des solutions claires qui dessinent les chemins d'équilibre non linéaires, alignées sur des calculs numériques. Esfahani et al. [99] ont réalisé des études thermiques sur les poutres FG en utilisant la théorie de Timoshenko, explorant les impacts d'une montée uniforme de température et de la conduction thermique sous différentes configurations aux limites, comme des appuis simples, des encastrements ou des supports sur rouleaux, avec des caractéristiques évoluant selon la température. Arbind et son équipe [100] ont élaboré une théorie révisée englobant celles de Reddy (troisième ordre), d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, développant une méthode non linéaire basée sur la microstructure et les déformations de Von Kármán pour estimer le déplacement transversal maximal des poutres FG. Zhou et al. [101] ont proposé une analyse thermique bidimensionnelle des poutres FG avec source de température interne, via une méthode sans maillage, en utilisant Mori-Tanaka pour évaluer les propriétés matérielles indépendantes de la température. Enfin, Akbas [102] a étudié la réponse dynamique d'une poutre FG sous charge mobile et montée en température, en s'appuyant sur la première théorie de cisaillement, avec des matériaux à propriétés thermosensibles variant axialement, étudiant l'impact de la température, des variations matérielles et de la vitesse de la charge.

D'autres études sur l'analyse vibratoire des poutres FG monocouches et sandwich sont présentées dans la section suivante.

2.3.2 Analyse vibratoire des poutre FG

Cette section offre un examen minutieux des multiples théories de déformation par cisaillement et des méthodes employées pour analyser les vibrations des poutres FG. Le modèle le plus ancien, connu sous le nom de théorie d'Euler-Bernoulli (CBT), sert de point de départ. À partir de ce fondement, divers experts ont étudié les vibrations des poutres FG en utilisant un éventail de techniques analytiques et numériques. Alshorbagy et son équipe [103] ont étudié la vibration libre d'une poutre FG par la méthode des éléments finis, montrant son aptitude à comparer les poutres coniques à changement linéaire de dimensions avec celles marquées par une non-homogénéité polynomiale particulière. Şimşek et Kocatürk [104] ont examiné la réponse dynamique d'une poutre FG sous une charge ponctuelle, en étudiant l'influence du gradient matériel, de la vitesse d'une charge harmonique mobile et de la fréquence d'excitation. Khalili et al. [105] ont exploré ce même problème en combinant les techniques Ritz et de quadrature différentielle. Pradhan et Murmu [106] ont conduit une étude numérique sur les vibrations thermomécaniques d'une poutre sandwich simplement appuyée, composée de deux couches FGM, reposant sur une fondation élastique variable axialement et exposée à une température non uniforme en travers, via la méthode de quadrature différentielle. Li et ses collègues [107] ont étudié la vibration libre des poutres FG dotées de couches piézoélectriques dans un cadre thermique, en utilisant une approche numérique. Huang et Li [108] ont présenté une approche novatrice reposant sur les équations intégrales de Fredholm pour déterminer les fréquences propres des poutres FG à section transversale irrégulière, en considérant la rigidité en flexion, la densité de masse et le gradient axial, produisant des données utiles pour la conception de poutres non uniformes. Plus récemment, Shahba et Rajasekaran [109] ont employé les méthodes DTEM et DQEM de faible degré pour calculer les fréquences transversales et longitudinales des poutres FGM d'Euler-Bernoulli, notant que la DTEM se distingue par sa rapidité et sa précision supérieure par rapport à la DTM. Liu et Shu [110] ont fourni une solution analytique pour les vibrations libres des poutres à variation exponentielle continue des propriétés (E-FGM) à travers l'épaisseur, en considérant

une délamination simple. Pour dépasser les faiblesses de la théorie classique, diverses formulations ont vu le jour afin d'intégrer les effets de la déformation par cisaillement. Parmi elles, la théorie de Timoshenko, souvent désignée comme la théorie de poutre du premier ordre, se pose comme une étape initiale prenant en compte le cisaillement transverse, attirant l'attention des chercheurs. Aydogdu et al. [111] ont présenté une solution de Navier pour déterminer les fréquences naturelles des poutres FG. Su et Banerjee [112] ont conçu une technique de rigidité dynamique pour explorer les vibrations libres des poutres FG en s'appuyant sur la théorie du premier ordre. Sina et son équipe [113] ont proposé une approche originale pour les vibrations libres des poutres FG, s'écartant de la théorie classique du premier ordre en introduisant une fonction inédite pour séparer les équations directrices. Pradhan et Chakraverty [114] ont analysé le comportement vibratoire des poutres d'Euler et de Timoshenko en matériaux FG à l'aide de la méthode Rayleigh-Ritz, en étudiant les effets des fractions volumiques, des rapports d'élancement et des théories appliquées sur les fréquences propres. Huang et al. [115] ont mis au point une méthode pour analyser les vibrations des poutres de Timoshenko à densité variable axialement et section non homogène, visant à identifier précisément les fréquences propres de différents ordres. Plus récemment, Rajasekaran et Tochaei [116] ont adopté une approche mixte, mêlant transformation différentielle élémentaire et éléments différentiels en quadrature, pour l'analyse modale des poutres FG axiales. Li et ses collègues [117] ont également analysé la vibration libre des poutres FG en se fondant sur les théories classiques et du premier ordre. Enfin, pour pallier certaines insuffisances des modèles traditionnels, une approche fondée sur la théorie des poutres d'ordre supérieur a été conçue, améliorant la précision de l'analyse vibratoire sans recourir à des corrections de cisaillement.

Pour mieux représenter l'effet du cisaillement transverse, des études sur les vibrations libres ont été menées sur des poutres à gradient de propriétés en adoptant une théorie avancée de déformation par cisaillement. Cette démarche vise à capturer avec plus de précision le comportement dynamique des structures composites, en intégrant une répartition non linéaire des déformations de cisaillement sur leur hauteur. Aydogdu et Taskin [118] ont exploré la vibration libre d'une poutre FG simplement appuyée, calculant ses fréquences naturelles grâce à la méthode de Navier, basée sur des modèles paraboliques et exponentiels de déformation par cisaillement. Mahi et son équipe [119] ont analysé les vibrations libres des poutres FG, en considérant comment les propriétés des matériaux varient avec la température et comment les contraintes thermiques initiales influencent les fréquences naturelles. Thai et Vo [120] ont proposé une solution analytique utilisant des séries trigonométriques pour analyser la flexion statique et les vibrations libres des poutres FG simplement appuyées, en s'appuyant sur différentes théories avancées de déformation par cisaillement et en présentant des résultats numériques pour évaluer l'impact de ces modèles sur les comportements statiques et dynamiques. Mashat et al. [121] ont exploré les vibrations libres des poutres FG avec la formulation unifiée de Carrera et d'autres méthodes, montrant que des théories d'ordre supérieur sont essentielles pour déterminer précisément les fréquences de flexion et de torsion, que les poutres soient épaisses ou minces. Vo et al. [122] ont réalisé une étude numérique sur la flexion statique, la stabilité au flambement et les vibrations libres des poutres FG, en combinant une théorie de cisaillement avancée avec la méthode des éléments finis. Shen et Wang [123] ont examiné les vibrations, la flexion et le flambement thermique des poutres FG posées sur une fondation élastique dans un environnement thermique, en utilisant une analyse géométrique non linéaire fondée sur une approche d'ordre élevé. Hadji et ses collègues [124] ont conçu plusieurs modèles avancés de déformation par cisaillement pour examiner la manière dont

les ondes se propagent dans les poutres FG, en évaluant précisément comment les distributions de fractions volumiques influencent ce phénomène. Fang et son équipe [125] ont révélé que la déformation des micropoutres FGM en rotation est largement conditionnée par les variations du gradient matériel et le paramètre d'échelle de longueur, selon leurs dimensions. Eltaher et Akbas [126] ont analysé la réponse dynamique d'une poutre multicouche FG épaisse soumise à une sollicitation dynamique générale. Gupta et Chalak [127] ont étudié les comportements de flexion et de vibration libre de différentes poutres sandwich FG, en utilisant la théorie en zigzag d'ordre supérieur et la méthode des éléments finis, avec des lois sigmoïdales et de puissance pour modéliser la variation des propriétés à travers l'épaisseur. Du et ses collègues [128] ont développé une approche des éléments finis à frontière échelonnée pour étudier les vibrations libres, la flexion et le flambement des poutres FG, en améliorant l'efficacité des calculs avec un élément spectral d'ordre supérieur discrétisé.

2.3.3 Analyse du flambage des poutres FG

Le flambement est un problème important pour les poutres qui subissent des forces de compression, car il peut faire perdre leur stabilité d'un coup. Une foule d'études ont scruté ce comportement, qu'il s'agisse de poutres isotropes ou de poutres sandwichs en matériaux fonctionnellement gradués, dans le but de prédire les points de rupture quand elles sont soumises à différentes charges et fixations. Les matériaux à gradation fonctionnelle suscitent un vif engouement en ingénierie grâce à leur souplesse et à leurs possibilités d'innovation. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur le flambement thermique des poutres FG, un sujet brûlant au propre comme au figuré. Shahsiah et al. [129] ont développé une approche analytique pour évaluer la résistance des poutres à gradient fonctionnel sous une température uniforme et une charge axiale, s'appuyant sur la méthode variationnelle et la théorie d'Euler-Bernoulli. Kiani et Eslami [130] ont, eux, proposé une solution théorique pour le flambement thermique des poutres FG, en considérant trois formes de sollicitations thermiques, tout en exploitant la théorie de Timoshenko pour voir comment les charges thermomécaniques agissent avec divers types de supports. Kiani et al. [131] ont ajouté des couches piézoélectriques aux poutres FGM et ont étudié leur résistance à la température et à une tension fixe, en utilisant Euler-Bernoulli. Ils ont aussi abordé le flambement thermique des poutres FG, avec ou sans piézoélectricité, sous des charges combinées, en s'appuyant sur Timoshenko. Wattanasakulpong et son équipe [132] ont adopté une théorie de déformation de cisaillement d'ordre trois pour décrypter le flambement thermique et les vibrations des poutres FG, en tenant compte des extrémités verrouillées et des caractéristiques matérielles qui fluctuent—ou non—avec la température. Kargani et al. [133] ont fourni une réponse exacte à la stabilité non linéaire des poutres FGM hybrides, simplement appuyées ou encastrées, sous des sollicitations thermiques et électriques. Komijani et al. [134] ont regardé comment les effets piézoélectriques, l'épaisseur et les conditions d'appui affectent une poutre FG monomorphe sous des charges thermiques et électriques. Ghiasian et al. [135] ont analysé le flambement statique et dynamique des poutres FG reposant sur un milieu élastique, en intégrant une imperfection initiale sous un champ thermique uniforme et une compression égale. Ce même chercheur [136] s'est ensuite attaqué au flambement dynamique non linéaire et à la vulnérabilité aux défauts d'une poutre FG posée sur une base élastique, maintenue à température fixe. Tounsi et al. [137] ont élaboré une théorie avancée des poutres pour le flambement thermique des nanopoutres. Vosoughi et al. [138] ont disséqué le flambement thermique des poutres FG sous une température constante,

mariant la théorie du premier ordre à la technique de quadrature différentielle. Ebrahimi et Salari [139] ont examiné le flambement thermique et les vibrations libres des nanopoutres FG sous charge thermique, en s'appuyant sur l'élasticité non locale d'Eringen et la théorie de Timoshenko. She et al. [140] ont présenté des solutions approximatives pour le flambement thermique des poutres FG avec actionneurs piézoélectriques, basées sur la surface neutre physique et des théories de déformation avancées. She [141] a étudié le flambement thermique d'une poutre FG à température constante avec une méthode de perturbation en deux étapes. Enfin, Ebrahimi et Barati [142] ont utilisé des théories avancées et l'élasticité non locale d'Eringen pour analyser le flambement thermique des poutres FGM magnéto-électro-thermo-élastiques sous différents types de charges thermiques, en s'inspirant d'Euler-Bernoulli, Timoshenko et d'autres modèles avancés.

Vo et al. [143] ont mis en place une simulation par éléments finis pour analyser les poutres sandwich FG, en utilisant une approche quasi-3D pour la déformation de cisaillement et des éléments possédant six degrés de liberté par nœud pour refléter fidèlement leur comportement structurel. Nguyen et ses collaborateurs [144] ont développé une nouvelle théorie sur la déformation par cisaillement, étudiant la répartition des contraintes transverses dans les poutres sandwich FG selon un modèle hyperbolique, et leurs résultats sur la charge critique de flambement prennent en compte l'indice de loi de puissance, le rapport longueur/épaisseur, l'épaisseur peau-âme, tout en restant cohérents avec les théories précédentes. Fazzolari [145] a examiné le flambage des poutres sandwich FG reposant sur une fondation élastique, en s'appuyant sur des théories trigonométrique, exponentielle et polynomiale pour évaluer leur stabilité. Liu et ses collègues [146] ont modélisé le flambage des poutres sandwich poreuses en composites FG sous charges thermomécaniques, en s'appuyant sur une méthode avancée du cisaillement transverse et en adoptant le plan neutre physique pour éviter les effets de couplage liés à la flexion. Al-Shujairi et Mollamahmutoglu [147] ont combiné la méthode de quadrature différentielle avec une théorie de cisaillement d'ordre supérieur, en y ajoutant une expression non locale du gradient de contrainte pour mieux comprendre comment les poutres sandwich FG réagissent sous différentes conditions. Lanc et ses collaborateurs [148] ont étudié le flambage des poutres sandwich FGM sous diverses conditions aux limites, montrant que la charge critique diminue en fonction du rapport d'épaisseur peau-cœur-peau, et prouvant que la façon dont les matériaux sont placés dans le volume change la valeur de cette charge. Nguyen et al. [149] ont analysé le flambage des poutres sandwich FG avec une méthode basée sur l'approximation de la déformation de cisaillement, en étudiant comment l'exposant de la loi de puissance, le rapport d'épaisseur peau-noyau et le rapport d'élancement influencent la charge critique. Shafiei et Kazemi [150] ont observé que la variation de l'indice de puissance dans les poutres poreuses FGM impacte davantage leur comportement le long de l'axe que dans l'épaisseur, soulignant que la charge critique sans dimension diminue quand la fraction volumique augmente, comme une poutre qui plie plus facilement avec plus de vide à l'intérieur. Li et ses collègues [151] ont exploré le flambage des poutres FG sous compression axiale avec une approche non locale fondée sur le gradient de déformation, montrant que la charge critique augmente avec un paramètre lié à la longueur du matériau, baisse avec un effet non local, et que la taille peut modifier la résistance de la poutre. Nguyen et al. [152] ont analysé le flambage latéral des poutres composites à sections ouvertes, montrant que la variation de l'indice de fraction volumique affecte les paramètres de flambage, et que le rapport entre le moment final et le noyau céramique joue un grand rôle dans la résistance. Babaei et ses collaborateurs [153] ont étudié le flambage thermique et le post-flambage des poutres P-FGM avec des imperfections géométriques,

en s'appuyant sur une approche de cisaillement d'ordre trois, le concept du plan neutre physique et une méthode de perturbation en deux étapes pour mener leur analyse. Ziane et al. [154] ont prédit le flambage thermique des poutres caisson P-FGM par une méthode analytique basée sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Aria et al. [155] ont proposé un modèle Timoshenko non local par éléments finis pour analyser le flambage thermo-élastique et les vibrations des nanopoutres P-FGM posées sur une fondation Pasternak, en étudiant leurs réponses à très petite échelle.

2.4 Différents modèles de distributions hygrothermiques

Les poutres fonctionnellement graduées sont conçues pour supporter au mieux les efforts mécaniques et les conditions extérieures, même dans des situations difficiles. Dans ce cadre, examiner leur comportement sous l'effet combiné de la température et de l'humidité une analyse hygrothermique devient crucial pour anticiper comment elles réagissent aux différences. Les FGM se distinguent par la façon dont leurs caractéristiques, comme la solidité ou la transmission de la température, changent progressivement d'un côté à l'autre de leur épaisseur, tout en restant constantes dans le plan horizontal, ce qui fait que les variations de température et d'humidité se limitent à la direction de l'épaisseur, selon les analyses des chercheurs. Ces évolutions sont représentées par des modèles hygrothermiques variés, conçus pour suivre les modifications graduelles des propriétés matérielles, telles que la rigidité, la dilatation sous la chaleur, ou la capacité à conduire la température. L'objectif est de maîtriser les tensions générées par les différences de température et d'humidité, en analysant des aspects comme la dilatation thermique, la quantité d'humidité retenue, ou la conductivité thermique à travers ces modèles.

Pour faire ces calculs avec précision, les chercheurs ont mis au point diverses méthodes, allant de formules mathématiques pures à des simulations sur ordinateur. Quand il s'agit d'évaluer le comportement des matériaux FG à des températures élevées, Touloukian [156] propose d'adopter des propriétés matérielles ajustées selon les niveaux de température, comme on le verra ci-après :

$$P_i(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \tag{2.17}$$

Où

$$T = T_0 + \Delta T(\mathrm{z}) \tag{2.18}$$

Le symbole i désigne les composants du matériau FG, comme le métal ou la céramique. $\Delta T(z)$ indique l'écart de température par rapport à une valeur de base appelée T_0. les coefficients $P_j\,(j = -1,1,0,1,2,3)$ servent à mesurer la réaction du matériau face aux variations de température.

La formule mathématique suivante montre comment cette température se répartit dans l'espace.

$$\Delta T(x, y, z) = T(z)T_\Omega(x, z) \tag{2.19}$$

$T_\Omega(x, z)$ Représente la distribution de température le long du domaine de surface Ω.

Plusieurs modèles fréquemment employés dans la littérature seront exposés dans les sections suivantes:

2.4.1 Modèles de distribution polynomiale

Les travaux récents ont déterminé comment la température et la concentration d'humidité varient selon l'épaisseur, en se basant sur une méthode qui ajuste progressivement le champ de déplacement. Pour les distributions non linéaires, il est essentiel d'étudier les composantes avancées du champ de déplacement, qui vont plus loin que les changements élémentaires. Zenkour et al. [157] fournissent une formule polynomiale qui décrit les changements de température et d'humidité à travers l'épaisseur de la plaque.

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T_1(x,y) + \frac{z}{h}T_2(x,y) + \frac{1}{h}\Psi(z)T_3(x,y) \\ C(x,y,z) &= C_1(x,y) + \frac{z}{h}C_2(x,y) + \frac{1}{h}\Psi(z)C_3(x,y) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dans cette formulation, T_1, T_2 et T_3 désignent les termes relatifs aux charges thermiques, tandis que C_1, C_2 et C_3 se réfèrent aux termes associés à la variation de concentration en humidité. Les termes T_1 se rapportent à une température constante, tandis que les termes T_2 sont liés à une température linéaire, et les termes T_3 à une température non linéaire. Des notations analogues sont utilisées pour indiquer la concentration en humidité.

$\Psi(z)$ C'est une fonction représentant le profil de cisaillement transverse :

- Pour un champ de température sinusoïdale, On a :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$$

- Dans le cadre d'un domaine de température caractérisé par une fonction cubique, il est établi que :

$$\Psi(z) = \frac{z}{h}\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

- Pour un cas champ distribution de température de nature exponentielle, On a :

$$\Psi(z) = \frac{z}{h}e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

Dans le cadre d'une étude thermique approfondie, Akbarzadeh et ses collègues [158] ont utilisé un modèle polynomial pour décrire le champ de température, lequel est défini par quatre paramètres thermiques distincts. On a combiné cette approche avec la théorie de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour rendre plus exacte l'étude du comportement thermique de la structure.

$$T(x,y,z) = T_1(x,y) + \frac{z}{h}T_2(x,y) + \left(\frac{z}{h}\right)^2 T_3(x,y) + \left(\frac{z}{h}\right)^3 T_4(x,y) \tag{2.21}$$

2.4.2 Modèles de distribution d'élévation hygrothermique

Les matériaux fonctionnellement gradués sont fabriqués pour supporter des montées importantes en température et en humidité, provoquant ainsi des différences marquées de ces paramètres d'un côté à l'autre de la structure. Ce type d'effets liés à l'élévation hygrothermique a été utilisé par de nombreux chercheurs en considérant différentes distributions hygrothermiques, uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Chaque type de distribution hygrothermique est décrit avec précision ci-dessous :

❖ **Distribution hygrothermique uniforme (UHR)**

Dans le premier type, La température et l'humidité sont supposées uniformes dans la poutre et augmentent à partir d'une référence T_0 et C_0. Ainsi, leurs valeurs actuelles d'humidité et de température sont les suivantes:

$$\begin{aligned} C &= C_0 + \Delta C \\ T &= T_0 + \Delta T \end{aligned} \tag{2.22}$$

C_0 et T_0 représentent respectivement aux valeurs de référence pour l'humidité et la température, qui sont supposées se situer à la surface inférieure de la poutre.

❖ **Distribution hygrothermique linéaire (LHR)**

Le deuxième type de distribution hygrothermique est linéaire et peut être présenté sous la forme suivante (Kiani et Eslami [159]) :

$$\begin{aligned} T(z) &= (T_t - T_b)\left(\frac{2z+h}{2h}\right) + T_b \\ C(z) &= (C_t - C_b)\left(\frac{2z+h}{2h}\right) + C_b \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dans cette formulation, T_t et T_b désignent respectivement les températures, tandis que C_t et C_b se réfèrent aux teneurs en humidité aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre.

❖ **Distribution hygrothermique non linéaire (NHR)**

Dans cette situation, la répartition de la température et de l'humidité à travers l'épaisseur a été exposée grâce à les approches suivantes :

- Dans un premier cas, les conditions hygrothermiques à la surface supérieure de la plaque sont caractérisées par un couple (T_t, C_t). On postule une transition progressive de ces paramètres, allant de (T_t, C_t) à (T_b, C_b) à travers l'épaisseur de la plaque. Cette variation entraîne une déformation dans la plaque, qui dépend d'une distribution de type loi de puissance des champs de température et d'humidité à travers son épaisseur, jusqu'à ce qu'elle atteigne les conditions hygrothermiques de la surface inférieure, définies par le couple (T_b, C_b), provoquant ainsi la déformation de la plaque. Ainsi, l'augmentation de l'hygrothermique à travers l'épaisseur est donnée par Zenkour [160] :

$$T(z)=\Delta T\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{\gamma}+T_b$$
$$C(z)=\Delta C\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{\gamma}+C_b \tag{2.24}$$

Où γ est l'exposant hygrothermique, $1\prec\gamma\prec\infty$. L'élévation d'hygrothermique linéaire est obtenue comme un cas particulier dans lequel γ fixé à 1.

- Dans le second cas, il est nécessaire de résoudre l'équation de Fourier unidimensionnelle relative à la conduction thermique, comme l'indique Zhang [161] :

$$-\frac{d}{dz}\left[k(z,T)\frac{dT(z)}{dz}\right]=0 \tag{2.25}$$

En se basant sur les conditions thermiques continues entre les surfaces supérieure et inférieure, cela conduit à :

$$T(z)=T_m+(T_c-T_m)\frac{\int_{-h/2}^{z}\frac{1}{k(z,T)}dz}{\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{k(z,T)}dz},\qquad -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \tag{2.26}$$

L'équation (2.26) est résolue à l'aide d'une approche d'expansion en série polynomiale :

$$T(z)=T_m+(T_c-T_m)\frac{D_1(z)}{D_0(z)},\qquad -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}$$
$$D_j(z)=\sum_{i=0}^{r}\left(\frac{k_m-k_c}{k_m}\right)^{i}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{(in+1)\,j}}{in+1} \tag{2.27}$$

Où *r* représente le numéro des termes de la série.

- Dans le troisième cas, la température ainsi que l'humidité varient de manière non linéaire selon une loi sinusoïdale [162] comme suit :

$$T(z)=(T_t-T_b)\left[1-\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)\right]+T_b \tag{2.28a}$$

$$C(z)=(C_t-C_b)\left[1-\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)\right]+C_b \tag{2.28b}$$

2.5 Conclusion

Ce chapitre a mis en lumière les principales approches théoriques pour analyser et modéliser les poutres fonctionnellement graduées. La théorie classique, ou CBT, est la plus ancienne et directe, mais elle ignore les impacts du cisaillement sur la déformation transversale, limitant ainsi son usage aux poutres très minces. De son côté, la théorie de cisaillement d'ordre un (FSDBT) imagine un déplacement transversal uniforme à travers l'épaisseur, produisant des contraintes de cisaillement constantes, alors qu'en réalité elles suivent une courbe parabolique. Pour obtenir une vision précise des contraintes transversales, il faut intégrer un coefficient de correction, qui dépend

de facteurs comme les supports aux extrémités, les caractéristiques des matériaux, ou la forme de l'épaisseur. Enfin, les approches avancées de cisaillement d'ordre supérieur (HSDBT), telles que PSDBT, SSDBT, et ESDBT, représentent le déplacement dans le plan par une suite de termes liés à l'épaisseur. L'analyse s'est orientée vers la théorie quasi-3D de déformation par cisaillement, en considérant l'effet d'allongement dans l'épaisseur, pour étudier la flexion des poutres sandwich FG.

Nous avons présenté une revue des différentes recherches menées dans la littérature existante sur l'analyse statique, vibratoire et de flambage des poutres FG. Plusieurs théories et différentes méthodes analytiques et numériques ont été utilisées pour décrire le comportement des poutres FG, ainsi que différents modèles de distributions hygrothermiques (la température et l'humidité).

Suite à cette revue, on constate que les études réalisées à l'aide des méthodes numériques sur ce sujet sont encore moins nombreuses que celles menées analytiquement. La motivation derrière cette thèse est d'étudier les comportements statiques des poutres sandwich FG dans un environnement hygro-thermo-mécanique, en appliquant une approche analytique établie sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Chapitre 3

Modélisation du Comportement Hygro-Thermo-Mécanique des Poutres Sandwich Fonctionnellement Graduées ‘FGSBs’

3.1 Introduction

Les poutres sandwich composites, fabriquées à partir de matériaux fonctionnellement gradués (FGSBs), représentent des éléments structuraux composés de deux matériaux différents. En raison de leur faible poids et de leur grande rigidité, ces éléments ont joué un rôle important dans l'avancement des technologies de conception en génie civil et mécanique, même dans des environnements extrêmes de température et d'humidité. Par conséquent, connaître leur caractéristique statique est essentiel pour les scientifiques et les ingénieurs.

Les deux matériaux constitutifs des poutres sandwich composites classiques sont solidaires, Ce qui augmente le risque de délaminage. Plus précisément, la progression graduelle des caractéristiques mécaniques de la partie inférieure à la partie supérieure supprime l'interface entre les couches, zone d'accumulation et la concentration de contraintes. De plus, les structures FG possèdent deux caractéristiques essentielles : la résistance au chargement mécanique à travers la face métallique et le chargement thermique le long du côté céramique. Par conséquent, ces caractéristiques attirent de nombreux chercheurs pour étudier et analyser la réponse mécanique de ces structures matérielles sous différentes sollicitations. Des études récentes ont également montré qu'en gérant certains paramètres de fabrication lors de la production des FGM, différents schémas peuvent être obtenus pour améliorer davantage les caractéristiques de réponse des structures composites en FGM.

Les poutres FG sont souvent soumises à des chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) dans plusieurs domaines d'ingénierie. Sont mieux adaptées pour résister aux contraintes thermiques générées au sein des structures à très haute température ainsi qu'aux contraintes hygrothermiques couramment développées dans les constructions marines placées dans des conditions humides. Cependant, l'analyse statique et le comportement dynamique des poutres FG sont peu étudiés dans des conditions hygrothermiques. Giunta et al [163] ont amélioré certains modèles pour les analyses thermiques sur les poutres FG via la formulation unifiée précédemment proposée par d'autres chercheurs. L'équation de conduction thermique de Fourier a été résolue pour obtenir le champ de température. De plus, El-Megharbel [164] a présenté une nouvelle approche mathématique pour examiner les poutres dans l'état stable de conduction

thermique. Les effets des paramètres physico-mécaniques ont été examinés et discutés. Sankar et Tzeng [165] ont analysé une poutre en FGM exposée à un gradient thermique supposé apparaître à travers l'épaisseur de la poutre. S'appuyant sur une théorie analogue à celle des poutres d'Euler-Bernoulli, les champs de déplacement et de contrainte ont été déterminés avec précision par la résolution des équations de thermo-élasticité planes. Thanh et al. [166] ont étudié l'effet dépendant de la taille sur la flexion statique d'une microplaque poreuse en matériau à gradient de fonctionnel (P-FGM) sous un comportement géométriquement non linéaire en utilisant l'analyse isogéométrique et la théorie des contraintes modifiées. Il a été conclu que l'augmentation du rapport longueur/épaisseur (a/h) entraîne une rigidité plus élevée en ce qui concerne la flexion statique, la vibration libre et le flambement de deux configurations de nanoplaques à gradient fonctionnel sigmoïdal, incluant un noyau isotrope et un noyau à gradient fonctionnel, qui ont été analysées par Cuong-Le et al [167].

Par ailleurs, des études sont menées pour examiner l'impact des paramètres géométriques de la structure, des propriétés intrinsèques des matériaux constitutifs ainsi que des contraintes appliquées aux extrémités sur le comportement mécanique des poutres à gradient fonctionnel. Soumises à différentes charges. Le comportement vibratoire des tubes nanométriques poreux à gradient fonctionnel avec différentes conditions aux limites a été analysé par Huang et al [168]. Azandariani et al [169] ont analysé l'analyse statique non-linéaire des nano-poutres de Timoshenko à gradient fonctionnel bidirectionnel. Les équations différentielles partielles gouvernantes ont été formulées en s'appuyant sur le principe d'Hamilton ainsi que sur la théorie non locale. L'incidence du gradient des caractéristiques du matériau, de la longueur de la poutre et des effets non locaux sur le fléchissement des nano-poutres a été présentée. Ces paramètres possèdent une importance cruciale dans le calcul du déplacement statique non linéaire de la nano-poutre. Polat et Kaya [170] ont étudié le problème du contact discontinu dans deux couches fonctionnellement gradées en appliquant la méthode des éléments finis. Une analyse bidimensionnelle du problème a été effectuée par la méthode des éléments finis, en utilisant une macro spéciale ajoutée au programme ANSYS. Plusieurs graphiques et tableaux ont été utilisés pour afficher l'évolution de différents facteurs. Cette technique produit des résultats efficaces en un temps concis.

De nombreux chercheurs ont expliqué le comportement en flexion des structures FG exposées à des charges thermomécaniques non linéaires (Shen [171] ; Sator et al [172] ; Zhang et al [173]). À titre d'illustration, Shen [171] a analysé des plaques FGM dans des conditions thermiques avec deux matériaux constituants sous différentes sollicitations. Une dépendance à la température a été postulée pour ces matériaux en se basant sur une distribution de lois de puissance. De plus, les développements thermiques ont été incorporées en se basant sur la théorie de Reddy. La réponse non linéaire en flexion des plaques FG sous diverses conditions environnementales a été établie sur la base de l'approche hybride Galerkin-perturbation. La théorie de la thermo-élasticité a été mise en œuvre par Sator et ses collaborateurs [172] afin d'examiner le comportement en flexion des plaques minces et épaisses en matériaux FG sous l'effet de charges thermiques. Les équations sont analysées en les décomposant en équations différentielles partielles du second ordre, afin de simplifier la résolution mathématique des problèmes de valeur limite associés à des équations gouvernantes relativement complexes. Les résultats relatifs à divers paramètres de gradation des coefficients des matériaux en ce qui concerne la flexion de la plaque ont été l'objet

de discussions approfondies. Zhang et al. [173] ont investigué le comportement vibratoire libre de plaques annulaires sandwich en matériaux à gradient fonctionnel, supportées par une fondation de Kerr, en milieu thermique. L'analyse a été menée via deux formalismes théoriques : la théorie de plaques de Reddy, qui considère les effets de cisaillement transverse, et une théorie de plaques d'ordre supérieur, qui affine la modélisation de ces effets. La méthode de quadrature différentielle généralisée, appliquée dans le domaine spatial, a été employée pour résoudre les équations régissant, en tenant compte des conditions aux limites correspondantes. Les impacts de différents paramètres relatifs aux coefficients de matériaux gradués sur la flexion de la plaque ont été l'objet de discussions approfondies. La recherche menée a permis d'évaluer de manière quantitative l'influence de différents paramètres tels que les gradients thermiques, les propriétés de fondation élastique basées sur le modèle de Kerr, le taux de porosité interne et la densité volumique des composants sur les caractéristiques vibratoires intrinsèques des plaques sandwich annulaires.

D'autre part, plusieurs théories d'ordre supérieur et approches mathématiques sont utilisées pour l'étude de l'analyse hygro-thermo-mécanique (HTM) des plaques FG. Zenkour et ses collaborateurs [157] ont trouvé des solutions systématiques pour les plaques FG afin d'examiner leur réponse aux changements HTM. Ces changements ont été supposés être distribués selon une forme sinusoïdale. Les impacts des caractéristiques matérielles et mécaniques sur la réponse HTM des plaques rectangulaires FG sont inspectés. Daouadji et Benferhat [174] ont utilisé une théorie des plaques améliorée afin d'examiner les déplacements des plaques FG poreuses sous l'effet de chargements hygro-thermo-mécaniques. Sayyad et Ghugal [175] ont étudié le comportement en flexion des plaques FG sous chargement HTM basé sur une théorie exponentielle simple. Les contraintes et les déplacements sont comparables à ceux obtenus par d'autres chercheurs. Zenkour et Radwan [176] ont pris en compte les conditions HT pour analyser le comportement au flambement 3D des plaques fonctionnellement graduées en utilisant un modèle quasi-3D amélioré. Karami ses collaborateurs [177] ont mené une étude sur la réponse à la vibration libre des nanoplaques poreuses soumises à des conditions HTM. Les impacts du type de porosité, de la température ainsi que des variations d'humidité ont été examinés. Récemment, Ghumare et Sayyad [178] sont les seuls chercheurs à avoir étudié le comportement en flexion des poutres FG soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et non linéaire sur la base d'une nouvelle théorie du cinquième ordre. Enfin, les investigations précédentes limitées ont spécifié qu'aucun article n'a estimé l'effet du couplage des charges combinées non linéaires sur le comportement en flexion des poutres sandwich fonctionnellement graduées.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche tridimensionnelle visant à analyser les effets des chargements combinés d'humidité et de température sur la flexion des poutres sandwiches en matériaux FG. Ce modèle considère l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la poutre, tout en prenant une formulation simplifiée à quatre variables. Les surfaces de la poutre sandwich sont représentées comme des composites à gradient de propriétés, composés de deux matériaux isotropes (métal et céramique) Les variations du module d'Young, du coefficient de dilatation thermique et des coefficients de concentration d'humidité suivent une loi de puissance en relation avec la fraction volumique des constituants. Le noyau de la poutre reste homogène et est composé d'un matériau céramique isotrope. Les équations fondamentales régissant l'analyse de la flexion sont établies par l'application du principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques de type Navier sont par la

suite appliquées aux poutres sandwichs FG, soumises à un chargement combiné, dans des conditions aux limites simplement appuyées.

3.2 Formulation du problème

Considérons une poutre FG de dimensions $a \times b$ et une épaisseur uniforme h, soumise aux conditions environnementales. Le système de coordonnées cartésiennes x, y, z est défini comme coïncidant avec le plan médian de la poutre, tandis que l'axe (z) est conforme avec l'épaisseur de la poutre.

Deux types de poutres FG sont étudiés : le type (A) poutres sandwich, sans couche de noyau, et le type (B) poutres sandwich avec des faces externes (peaux) en matériau fonctionnellement gradué, et un noyau (cœur) homogène constitué d'un matériau purement céramique isotrope.

3.2.1 Configuration géométrique

La poutre sandwich simplement appuyée considérée, de longueur (a), largeur (b) et épaisseur (h), est constituée d'un matériau composite à gradient fonctionnel et soumise à des charges couplées hygro-thermo-mécaniques non linéaires (NL-HTMCL), voir Figure 3.1. Les propriétés mécaniques changent de façon continue et progressive de la partie inférieure à la partie supérieure à travers l'épaisseur ($z = \pm h/2$).

La poutre sandwich se compose de trois couches (métal-céramique, céramique pure et céramique-métal) : deux couches de surface (peaux) en matériau FG et une couche centrale homogène en céramique. Le noyau céramique homogène est également utilisé dans d'autres domaines, tels que le contrôle ou les environnements thermiques. Les constituants matériels de la peau inférieure subissent une transition graduelle, passant d'une prédominance de composants métalliques à l'interface ($z = h_0$) à une augmentation de la concentration en composants céramiques à l'interface ($z = h_1$), De manière opposée, on observe une composition inverse qui forme un gradient dans la peau supérieure, allant d'une concentration élevée en céramique à ($z = h_2$) à une prédominance métallique ($z = h_3$), comme illustré à la Figure 3.1.

Les coordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces entre les couches, ainsi que de la surface supérieure sont définies comme suit : $h_0 = -h/2$, h_1, h_2 et $h_3 = h/2$

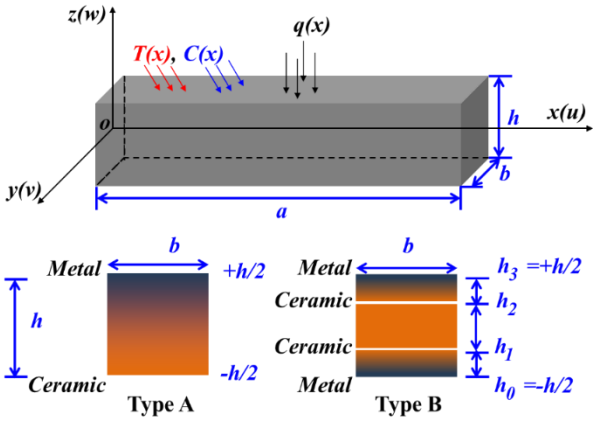


Figure 3.1 Géométrie et système de coordonnées d'une poutre sandwich fonctionnellement graduée (FGSBs).

Le rapport d'épaisseur de chaque couche, du bas vers le haut, est représenté par une combinaison de trois nombres, à savoir (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1), (2-1-1) et (2-2-1).

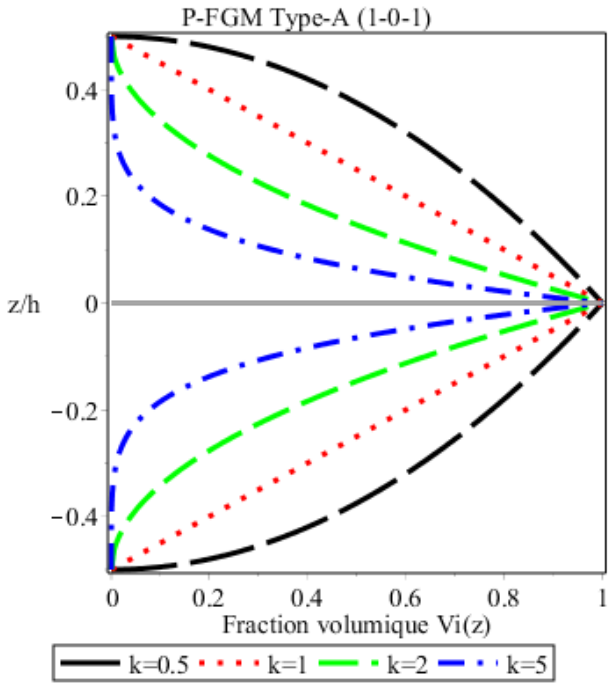
Dans le présent travail, nous avons considéré différents schémas de sandwich donnés par :

➢ Pour les sandwichs symétriques :

- Poutre sandwich FG (1-0-1) : la poutre est symétrique et contient deux couches FG (il n'y a pas de couche de noyau). Dans ce cas, nous avons : $h_1=h_2=0$.
- Poutre sandwich FG (1-1-1) : Ici, la poutre est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons : $h_1= -h/6$, $h_2=h/6$.
- Poutre sandwich FG (1-2-1) : la poutre est symétrique, avec une épaisseur de noyau égale à la somme des épaisseurs des faces. Ainsi, on obtient que : $h_1=-h/4$, $h_2=h/4$.

➢ Pour les sandwichs asymétriques (non-symétriques) :

- Poutre sandwich FG (2-2-1) : la poutre présente une asymétrie, dans laquelle l'épaisseur du noyau est égale à celle de la couche inférieure et est deux fois celle de la couche supérieure. Par conséquent, on obtient : $h_1=-h/10$, $h_2=3*h/10$.
- Poutre sandwich FG (2-1-1) : la poutre est asymétrique, dans laquelle l'épaisseur du noyau est égale à l'épaisseur de la couche supérieure. Ainsi, on obtient : $h_1=0$, $h_2= h/4$.



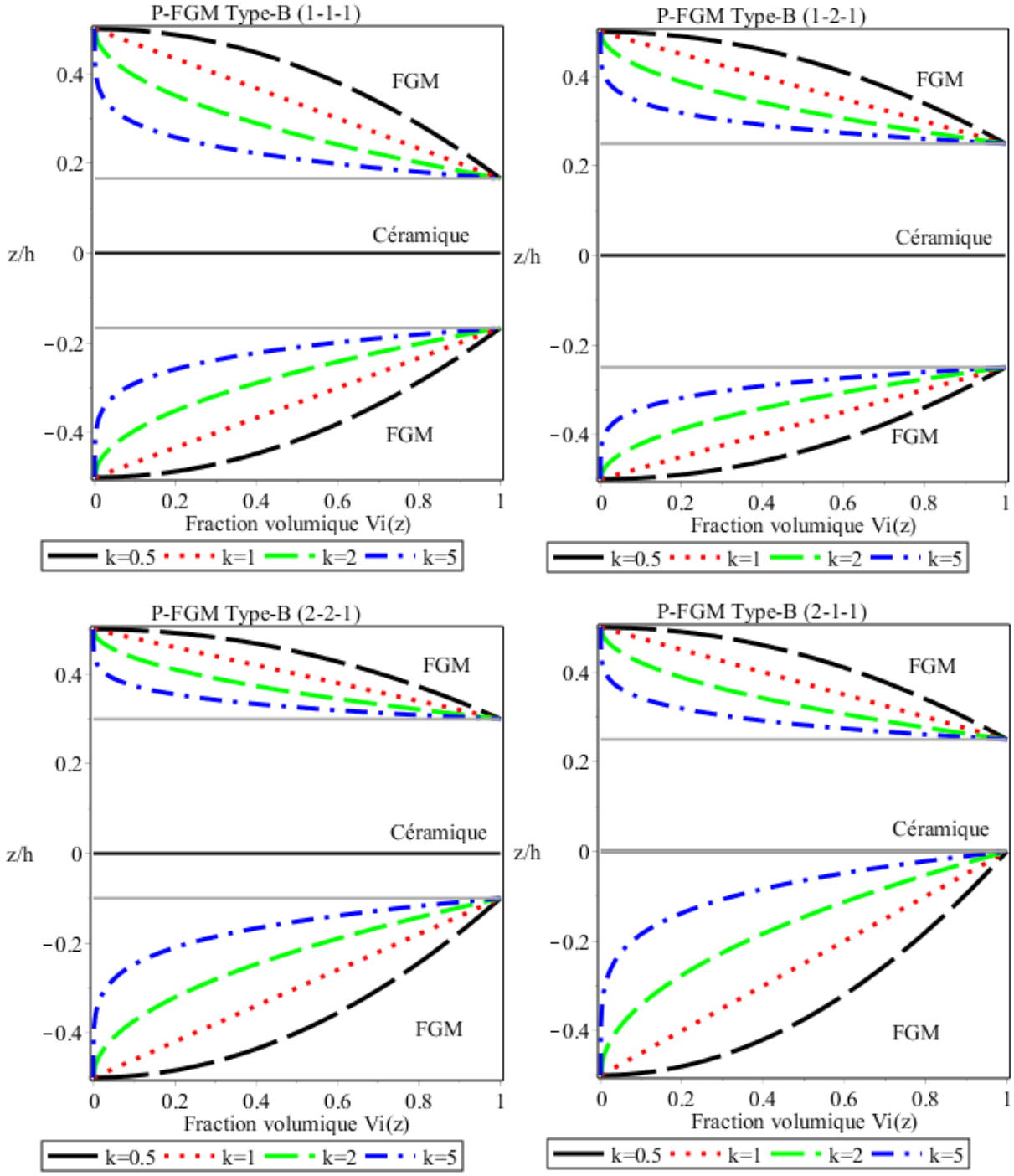


Figure 3.2 Variation de la fraction volumique *Vi(z)* en fonction de l'indice de la loi de puissance *k* pour différentes poutres sandwich FG : Type-A (1-0-1), Type-B (1-1-1, 1-2-1, 2-2-1, 2-1-1).

3.2.2 Propriétés matérielles

La poutre FG est soumise à un chargement mécanique transversal *q (x, z)*, à un champ de température *T (x, z)*, ainsi qu'à une concentration d'humidité *C (x, z)*. Les matériaux FG se caractérisent par une variation graduelle de leurs propriétés, due à une modification progressive de la fraction volumique des composants constitutifs. Cette variation est généralement déterminée

en fonction de l'épaisseur. La modélisation de cette évolution des propriétés du matériau est souvent réalisée à l'aide d'une loi de puissance :

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \left(\dfrac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^k & h_0 \le z \le h_1 \\ V^{(2)}(z) = 1 & h_1 \le z \le h_2 \\ V^{(3)}(z) = \left(\dfrac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^k & h_2 \le z \le h_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

La fonction de fraction volumique $V^{(n)}$, avec ($n=1, 2,3$) est utilisée pour définir la poutre sandwich FG dans chaque couche. L'indice k représente le paramètre de la loi de puissance qui régit la variation de la fraction volumique et définir comme étant supérieur ou égales à zéro ($k \geq 0$). La valeur de ($k=0$) correspond à une poutre entièrement composée de céramique, alors que ($k=\infty$) désigne une poutre entièrement constituée de métal.

Les propriétés mécaniques et hygrothermiques effectives de chaque couche, parmi lesquelles le module d'élasticité longitudinal $E(z)$, le coefficient de dilatation thermique $\alpha(z)$, et le coefficient de concentration d'humidité $\beta(z)$, sont définies comme des fonctions continues à travers l'épaisseur. Ces variations sont modélisées par une loi de puissance, en accord avec l'approche de Voigt, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &P(z)^{(n)} = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \\ &P = E, \alpha, \beta \end{aligned} \tag{3.2}$$

La fonction $P(z)^{(n)}$ caractérise la propriété matérielle effective du FGM de la couche n. les propriétés de la céramique et du métal sont respectivement notées P_c et P_m

Pour simplifier le modèle, le coefficient de Poisson du matériau de la poutre est considéré comme une constante. Cette simplification est basée sur l'observation que l'impact du coefficient de Poisson sur le comportement en termes de déformation de la poutre est clairement moindre que celui du module d'Young.

3.3 Formulation théoriques

La présente étude est développée pour étudier le comportement en flexion de poutres sandwich FG simplement appuyées, soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire, en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé quasi-3D, intégrant l'effet d'étirement d'épaisseur (stretching effect thickness).

3.3.1 Champ de déplacement et déformations

En prenant en compte les hypothèses énoncées, la description cinématique du champ de déplacement est défini comme suit :

$$\begin{cases} u(x,z) = u_0(x) - z\ \dfrac{\partial w_0(x)}{\partial x} + K_a\ f(z) \int \theta(x)\,dx \\ w(x,z) = w_0(x) + g(z)\phi(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans cette formulation, u_0 représente le déplacement axial d'un point situé sur le plan médian de la poutre le long de l'axe *x*, w_0 représente le déplacement transversal, et ϕ correspond à l'effet de l'étirement de l'épaisseur, et $\theta(x)$ indique la rotation de la section transversale autour de l'axe *y*.

La résolution de l'intégrale indéterminée dans l'équation (3.3) doit être réalisée en se basant sur la solution de Navier et peut être exprimée de la façon suivante :

$$\int \theta(x)\, dx = A' \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \tag{3.4}$$

En introduisant l'expression précédente dans l'équation (3.3) :

$$\begin{cases} u(x,z) = u_0(x) - z\ \dfrac{\partial w_0(x)}{\partial x} + K_a A'\, f(z) \dfrac{\partial \theta(x)}{\partial x} \\ w(x,z) = w_0(x) + g(z)\phi(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

Les coefficients K_a et A' sont établis de la manière suivante :

$$K_a = -\lambda^2 \quad \text{et} \quad A' = -\frac{1}{\lambda^2} \tag{3.6}$$

Où $\lambda = \dfrac{m\pi}{a}$

Dans la présente théorie à quatre variables, les nouvelles fonctions de forme *f(z)* et *g(z)* sont proposées comme suit :

$$f(z) = z\left(\frac{5\pi h}{4\pi + 53.25} - \frac{z^2 h}{\pi}\right) \tag{3.7a}$$

$$g(z) = f'(z) \tag{3.7b}$$

La déformation produite par le cisaillement transverse est modélisée par une fonction paire qui est équivalente à la dérivée première de la fonction de gauchissement associée ($g(z) = f'(z)$). Cette formulation assure que la fonction de gauchissement respecte les conditions aux limites imposées aux surfaces externes de la poutre, (voir figure 3.3).

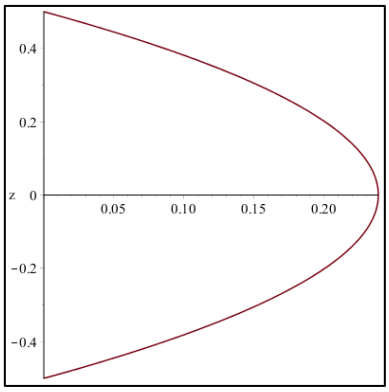


Figure 3.3 Variation de la fonction de cisaillement *f'(z) = g(z)*.

En s'appuyant sur les principes de la théorie de l'élasticité linéaire, les composantes non nulles du tenseur des déformations linéarisées sont déterminées à partir du champ de déplacements défini par l'équation (3.3) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - K_a A' f(z)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{3.8a}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = g'(z)\phi(x) \tag{3.8b}$$

$$\gamma_{xz} = g(z)\left(K_a A'\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{3.8c}$$

Où ε_x et ε_z représentent respectivement les déformations normales et transversales, tandis que γ_{xz} désigne la déformation de cisaillement transverse.

3.3.2 Équations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire et basé sur le champ de déplacement 3D exprimé dans l'équation (3.5), les équations constitutives élastiques linéaires avec l'effet hygrothermique en un point sont formulées de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)T(x,z) - \beta(z)C(x,z) \\ \varepsilon_z - \alpha(z)T(x,z) - \beta(z)C(x,z) \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \tag{3.9}$$

$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$ représentent respectivement des contraintes et des déformations. En se basant sur les propriétés matérielles énoncées dans l'équation (3.2), les coefficients de rigidité élastique $Q_{ij}^{(n)}$ se trouvent exprimés comme suit [47] :

$$Q_{11}^{(n)}(z) = Q_{33}^{(n)}(z) = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\left(\nu^{(n)}\right)^2} \tag{3.10a}$$

$$Q_{13}^{(n)}(z) = \frac{\nu^{(n)} E^{(n)}(z)}{1-\left(\nu^{(n)}\right)^2} \tag{3.10b}$$

$$Q_{55}^{(n)}(z) = \frac{E^{(n)}(z)}{2\left(1+\nu^{(n)}\right)} \tag{3.10c}$$

Dans la présente analyse E , α et β représentent respectivement le module de Young, la dilatation thermique et le coefficient de concentration d'humidité, tandis que *n* correspond au numéro de la couche.

La poutre sandwich FG est soumise à une charge mécanique sinusoïdale *q (x, z)* combinée à un champ thermique externe *T (x, z)* et à une concentration en humidité *C (x, z)*. La distribution de l'humidité ainsi que les champs de température sont supposés de la manière suivante [157] :

$$T(x,z) = T_1(x) + \bar{z}\,T_2(x) + \bar{\psi}(z)T_3(x) \tag{3.11a}$$

$$C(x,z) = C_1(x) + \bar{z}\,C_2(x) + \bar{\psi}(z)C_3(x) \tag{3.11b}$$

Où : $$\bar{z} = z/h \qquad et \quad \bar{\psi}(z) = \frac{\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{h} \tag{3.12}$$

Avec T_1 représente une température constante, T_2 correspond à une température linéaire, et T_3 représente une température non linéaire. La même signification peut être supposée pour les termes d'humidité C_1, C_2 et C_3 comme le montre la Figure 3.4.

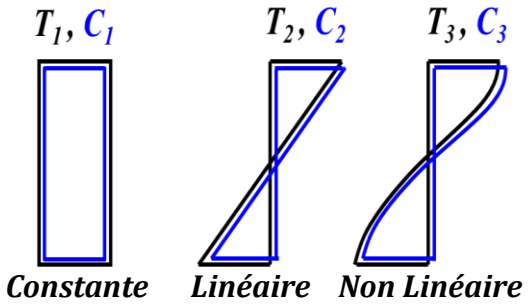


Figure 3.4 Variation de température et d'humidité.

3.3.3 Équations d'équilibres

L'établissement systématique des équations d'équilibre et des conditions aux limites est réalisé via l'application du principe des travaux virtuels. Ce principe, fondamental en mécanique des milieux continus, permet de relier les forces internes et externes à travers un champ de déplacements virtuels. L'application de ce principe au problème spécifique de la flexion hygro-thermomécanique d'une poutre sandwich à gradient fonctionnel se traduit par la formulation mathématique suivante :

$$\delta U + \delta V = 0 \tag{3.13}$$

δU représente l'énergie de déformation virtuelle , tandis que δV désigne le travail virtuel externe engendré par l'application d'une charge externe sur la poutre.

En utilisant le principe du déplacement virtuel, les quatre équations d'équilibre gouvernantes cohérentes variation elles sont développées suivante :

$$\int_0^a \left[\sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} \right) dz \right] dx = \int_0^a \left[q(x)\,\delta w_0 \right] dx \tag{3.14}$$

$$\int_0^a \left[\begin{array}{l} N_{xx} \dfrac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{zz}\delta\phi - M_{xx} \dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \\ + K_a A' P_{xx} \dfrac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x^2} + Q_{xz} \left(K_a A' \dfrac{\partial \delta\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta\phi}{\partial x} \right) \end{array} \right] dx = \int_0^a \left[q(x)\,\delta w_0 \right] dx \tag{3.15}$$

$N_{xx}, M_{xx}, P_{xx}, N_{zz}$ ainsi que Q_{xz} représentent les résultantes de contrainte, exprimées de la manière suivante :

$$\left[N_x, M_{xx}, P_{xx}\right] = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left[1,\ z,\ f(z)\right] \sigma_x \, dz \tag{3.16a}$$

$$N_{zz} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} g'(z) \sigma_z \, dz \tag{3.16b}$$

$$Q_{xz} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(z) \tau_{xz} \, dz \tag{3.16c}$$

h_n et h_{n-1} représentent respectivement les coordonnées en *z* du haut et du bas de la nième couche.

Les équations différentielles déterminantes (3.17a) – (3.17d) sont obtenues en intégrant l'équation (3.15) par parties et en mettant $\delta u_0, \delta w_0, \delta\theta, \delta\phi$ égal à zéro :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \tag{3.17a}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = -Q_n \tag{3.17b}$$

$$\delta\theta : -K_a A' \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + K_a A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = 0 \tag{3.17c}$$

$$\delta\phi : -N_{zz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = 0 \tag{3.17d}$$

Les équations différentielles déterminantes (3.18a) – (3.18d) exprimées en fonction des variables de déplacement inconnues sont obtenues en substituant les équations (3.16a) – (3.16c) dans les équations (3.17a) – (3.17d) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta u_0 :\ & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + K_a A' B_{11}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + L_{13} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(A_{11}^T + A_{13}^T\right) \frac{\partial T_1}{\partial x} - \left({}^a B_{11}^T + {}^a B_{13}^T\right) \frac{\partial T_2}{\partial x} - \\ & \left({}^a B_{s11}^T + {}^a B_{s13}^T\right) \frac{\partial T_3}{\partial x} - \left(A_{11}^C + A_{13}^C\right) \frac{\partial C_1}{\partial x} - \left({}^a B_{11}^C + {}^a B_{13}^C\right) \frac{\partial C_2}{\partial x} - \left({}^a B_{s11}^C + {}^a B_{s13}^C\right) \frac{\partial C_3}{\partial x} = 0\end{aligned} \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}\delta w_0 :\ & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + K_a A' D_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + L_{13}^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left({}^b B_{11}^T + {}^b B_{13}^T\right) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \left(D_{11}^T + D_{13}^T\right) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \\ & \left({}^b D_{s11}^T + {}^b D_{s13}^T\right) \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} - \left({}^b B_{11}^C + {}^b B_{13}^C\right) \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - \left(D_{11}^C + D_{13}^C\right) \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - \left({}^b D_{s11}^C + {}^b D_{s13}^C\right) \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} = -Q_n\end{aligned} \tag{3.18b}$$

$$\begin{aligned}
&\delta\theta: -K_a A' B^s_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+K_a A' D^s_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-\left(K_a A'\right)^2 H^s_{11}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}+\left(K_a A'\right)^2 A^s_{55}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\\
&+\left(K_a A' A^s_{55}-K_a A' R_{13}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+K_a A'\left({}^c B^T_{s11}+{}^c B^T_{s13}\right)\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+K_a A'\left({}^c D^T_{s11}+{}^c D^T_{s13}\right)\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}\\
&+K_a A'\left(H^T_{s11}+H^T_{s13}\right)\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}+K_a A'\left({}^c B^C_{s11}+{}^c B^C_{s13}\right)\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}+K_a A'\left({}^c D^C_{s11}+{}^c D^C_{s13}\right)\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}\\
&+K_a A'\left(H^C_{s11}+H^C_{s13}\right)\frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2}=0
\end{aligned} \tag{3.18c}$$

$$\begin{aligned}
&\delta\phi: \ -L_{13}\frac{\partial u_0}{\partial x}+L^a_{13}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+K_a A'\left(A^s_{55}-R_{13}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+A^s_{55}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-R^a_{33}\phi+\left(L^T_{13}+L^T_{33}\right)T_1\\
&+\left(L^T_{a13}+L^T_{a33}\right)T_2+\left(R^T_{13}+R^T_{33}\right)T_3+\left(L^C_{13}+L^C_{33}\right)C_1+\left(L^C_{a13}+L^C_{a33}\right)C_2+\left(R^C_{13}+R^C_{33}\right)C_3=0
\end{aligned} \tag{3.18d}$$

Les constantes mécaniques, thermiques et de l'humidité mentionnées dans les équations (3.18a) – (3.18d) sont exprimées comme suit :

- *Constantes mécaniques*

$$\left[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\left[1, z, z^2\right]dz \tag{3.19a}$$

$$\left[B_{sij}, D_{sij}, H_{sij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\left[f(z), zf(z), f(z)^2\right]dz \tag{3.19b}$$

$$\left[L_{ij}, L^a_{ij}, R_{ij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)g'(z)\left[1, z, f(z)\right]dz \tag{3.19c}$$

$$\left[R^a_{ij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\left[g'(z)^2\right]dz \tag{3.19d}$$

$$\left[A^s_{55}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\left[g(z)^2\right]dz \tag{3.19e}$$

- *Constantes thermiques*

$$\left[A^T_{ij}, {}^a B^T_{ij}, {}^b B^T_{ij}, D^T_{ij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\alpha(z)^{(n)}\left[1, \bar{z}, z, z\bar{z}\right]dz \tag{3.20a}$$

$$\begin{aligned}
&\left[{}^a B^T_{sij}, {}^c B^T_{sij}, {}^b D^T_{sij}, {}^c D^T_{sij}, H^T_{sij}\right]=\\
&\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\alpha(z)^{(n)}\left[\bar{\psi}(z), f(z), z\bar{\psi}(z), f(z)\bar{z}, f(z)\bar{\psi}(z)\right]dz
\end{aligned} \tag{3.20b}$$

$$\left[L^T_{ij}, L^T_{aij}, R^T_{ij}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n} Q^{(n)}_{ij}(z)\alpha(z)^{(n)}g'(z)\left[1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)\right]dz \tag{3.20c}$$

- ***Constantes de l'humidité***

$$\left[A_{ij}^{C},\ {}^{a}B_{ij}^{C},\ {}^{b}B_{ij}^{C},D_{ij}^{C}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n}Q_{ij}^{(n)}(z)\beta(z)^{(n)}\left[1,\bar{z},z,z\bar{z}\right]dz \tag{3.21a}$$

$$\left[{}^{a}B_{sij}^{C},\ {}^{c}B_{sij}^{C},\ {}^{b}D_{sij}^{C},\ {}^{c}D_{sij}^{C},H_{sij}^{C}\right]= \sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n}Q_{ij}^{(n)}(z)\beta(z)^{(n)}\left[\bar{\psi}(z),f(z),z\bar{\psi}(z),f(z)\bar{z},f(z)\bar{\psi}(z)\right]dz \tag{3.21b}$$

$$\left[L_{ij}^{C},L_{aij}^{C},R_{ij}^{C}\right]=\sum_{n=1}^{3}\int_{h_n-1}^{h_n}Q_{ij}^{(n)}(z)\beta(z)^{(n)}g'(z)\left[1,\bar{z},\bar{\psi}(z)\right]dz \tag{3.21c}$$

Concernant une poutre sandwich FG simplement appuyée à *x=0* et *x=a*, les conditions aux limites sont exprimées comme suit :

$$\text{Soit } N_x=0 \text{ ou } u_0=0 \text{ est prescrit} \tag{3.22a}$$

$$\text{Soit } P_{xx}=0 \text{ ou } \frac{\partial w_0}{\partial x}=0 \text{ est prescrit} \tag{3.22b}$$

$$\text{Soit } M_{xx}=0 \text{ ou } \frac{\partial \theta}{\partial x}=0 \text{ est prescrit} \tag{3.22c}$$

$$\text{Soit } Q_{xz}=0 \text{ ou } \phi=0 \text{ est prescrit} \tag{3.22d}$$

$$\text{Soit } Q_{xz}=0 \text{ ou } \theta=0 \text{ est prescrit} \tag{3.22e}$$

3.3.4 Solution analytique de Navier pour poutre sandwich FG

Nous nous intéressons ici à trouver des solutions exactes pour l'analyse de la flexion de poutre sandwich fonctionnellement graduées, soumises à des condition d'appui simple. Grâce à la technique de solution de Navier, les charges *q*, *T* et *C* sont exprimées en une seule série trigonométrique comme :

$$\begin{Bmatrix}T\\C\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}T_i\\C_i\end{Bmatrix}\sin(\lambda x)\ \ (i=1,2,3) \tag{3.23}$$

Où $\lambda=\dfrac{m\pi}{a}$

T_i, C_i Sont respectivement les charges thermiques et d'humidité. *T*, *C* sont donnés dans les équations (3.11a-3.11b).

La charge transversale q est exprimée par :

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sin\lambda x \tag{3.24}$$

Où Q_n est l'amplitude de charge déterminée comme suit :

$$Q_n = \frac{2}{L}\int_0^L q(x)\sin\lambda x\,dx \tag{3.25}$$

Les coefficients Q_n sont donnés comme suit :

- Pour une charge sinusoïdale q_0 :

$$Q_n = q_0\left(m=1\right) \tag{3.26}$$

- Pour une charge uniforme q_0 :

$$Q_n = \frac{4q_0}{m\pi}\left(m=1,3,5\right) \tag{3.27}$$

Conformément à la technique de résolution de Navier, les variables de déplacement sont formulées sous la forme d'une série trigonométrique unique de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_n\cos(\pi\lambda) \\ W_n\sin(\pi\lambda) \\ \theta_n\sin(\pi\lambda) \\ \phi_n\sin(\pi\lambda) \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

Où U_n, W_n, θ_n et ϕ_n sont les coefficients inconnus à déterminer.

En substituant la forme trigonométrique $q, T, C, u_0, w_0, \theta$ et ϕ des équations (3.23, 3.24, 3.26 et 3.28) dans les équations différentielles gouvernantes (3.18a) à (3.18d), l'équation opérateur résultante se trouve sous la forme :

$$\left[K\right]\left\{\Delta\right\} = \left\{P\right\} \tag{3.29}$$

[*K*] désigne la matrice de rigidité, {Δ} correspond au vecteur des coefficients inconnus et {*P*} représente le vecteur de charge généralisée. Les composantes de [*K*], {Δ} et {*P*} sont formulées de la manière suivante :

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} -A_{11}\lambda^2 & B_{11}\lambda^3 & -K_aA'B_{11}^s\lambda^3 & L_{13}\lambda \\ B_{11}\lambda^3 & -D_{11}\lambda^4 & K_aA'D_{11}^s\lambda^4 & -L_{13}^a\lambda^2 \\ -K_aA'B_{11}^s\lambda^3 & K_aA'D_{11}^s\lambda^4 & -\left(K_aA'\right)^2\left(H_{11}^s\lambda^4 + A_{55}^s\lambda^2\right) & K_aA'\lambda^2\left(R_{13}+A_{55}^s\right) \\ L_{13}\lambda & -L_{13}^a\lambda^2 & K_aA'\lambda^2\left(R_{13}+A_{55}^s\right) & -\left(R_{33}^a + A_{55}^s\lambda^2\right) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$\left\{\Delta\right\} = \left\{U_n, W_n, \theta_n, \phi_n\right\}^T \tag{3.31}$$

$$\left\{P\right\} = \left\{P_1, P_2, P_3, P_4\right\}^T \tag{3.32}$$

Les composantes du vecteur de charge généralisée {P} sont données par :

$$P_1 = \lambda \begin{bmatrix} \left(A_{11}^T + A_{13}^T\right)T_1 + \left({}^a B_{11}^T + {}^a B_{13}^T\right)T_2 + \left({}^a B_{s11}^T + {}^a B_{s13}^T\right)T_3 + \left(A_{11}^C + A_{13}^C\right)C_1 + \\ \left({}^a B_{11}^C + {}^a B_{13}^C\right)C_2 + \left({}^a B_{s11}^C + {}^a B_{s13}^C\right)C_3 \end{bmatrix} \quad (3.33a)$$

$$P_2 = -Q_n - \lambda^2 \begin{bmatrix} \left({}^b B_{11}^T + {}^b B_{13}^T\right)T_1 + \left(D_{11}^T + D_{13}^T\right)T_2 + \left({}^b D_{s11}^T + {}^b D_{s13}^T\right)T_3 + \left({}^b B_{11}^C + {}^b B_{13}^C\right)C_1 + \\ \left(D_{11}^C + D_{13}^C\right)C_2 + \left({}^b D_{s11}^C + {}^b D_{s13}^C\right)C_3 \end{bmatrix} \quad (3.33b)$$

$$P_3 = K_a A' \lambda^2 \begin{bmatrix} \left({}^c B_{s11}^T + {}^c B_{s13}^T\right)T_1 + \left({}^c D_{s11}^T + {}^c D_{s13}^T\right)T_2 + \left(H_{s11}^T + H_{s13}^T\right)T_3 + \left({}^c B_{s11}^C + {}^c B_{s13}^C\right)C_1 + \\ \left({}^c D_{s11}^C + {}^c D_{s13}^C\right)C_2 + \left(H_{s11}^C + H_{s13}^C\right)C_3 \end{bmatrix} \quad (3.33c)$$

$$P_4 = -\begin{bmatrix} \left(L_{13}^T + L_{33}^T\right)T_1 + \left(L_{a13}^T + L_{a33}^T\right)T_2 + \left(R_{13}^T + R_{33}^T\right)T_3 + \left(L_{13}^C + L_{33}^C\right)C_1 + \left(L_{a13}^C + L_{a33}^C\right)C_2 + \\ \left(R_{13}^C + R_{33}^C\right)C_3 \end{bmatrix} \quad (3.33d)$$

3.4 Conclusion

Ce chapitre présente une étude approfondie de la réponse hygro-thermo-mécanique des poutres sandwich à gradient fonctionnel en flexion, s'appuyant sur une théorie de déformation de cisaillement quasi-tridimensionnelle. Cette approche se distingue par la réduction du nombre d'inconnues et d'équations d'équilibre à quatre, optimisant ainsi l'efficacité du modèle.

La variation des propriétés du matériau constitutif de la poutre en fonction de l'épaisseur suit un modèle mathématique simple. La théorie développée permet de simuler avec précision une distribution parabolique des contraintes de cisaillement, tout en respectant les conditions de contrainte de cisaillement nulle aux surfaces supérieure et inférieure.

Les propriétés du matériau, telles que le module d'Young, le coefficient de dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité, sont déterminées par une distribution de type loi de puissance (P-FGM), en fonction des fractions volumiques des composants de la poutre sandwich.

Les équations d'équilibre régissant le comportement des poutres sandwich sont formulées à l'aide du principe des travaux virtuels.

Le chapitre suivant sera consacré à la validation des résultats obtenus et à une étude paramétrique détaillée.

Chapitre 4

Résultats Numériques et Discussions

4.1 Introduction

Ce travail vise à développer une nouvelle théorie de déformation par cisaillement élevé quasi-3D afin d'analyser le comportement en flexion des poutres sandwich symétriques et asymétriques, constituées de peaux en matériau fonctionnellement gradué, simplement appuyées sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire en prenant en compte l'influence de l'étirement. Le modèle développé intègre un nouveau champ de déplacement caractérisé par l'inclusion de variables intégrales à déterminer. Les équations d'équilibre sont formulées en utilisant le principe du travail virtuel. La résolution de ces équations est ensuite effectuée par la technique de Navier. La validité de la théorie actuelle est confirmée par la comparaison des résultats numériques obtenus avec ceux provenant d'autres théories. Enfin, de nombreuses études paramétriques sont fournies et discutées.

La présente théorie est vérifiée à travers différents exemples tridimensionnels de flexion de poutre FG sous des charges hygro-thermo-mécaniques combinées. Des comparaisons sont établies avec diverses théories de poutres présentes dans la littérature.

4.2 Procédure du programme de calcul

Dans ce chapitre, nous exposerons une série de résultats obtenus à la suite de l'exécution du programme de calcul Maple (Maple Soft 2015.1), en mettant en évidence les performances en flexion d'une poutre sandwich FG simplement appuyée, soumise à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

La procédure fonctionnelle du programme numérique est montrée dans la Figure 4.1. Celle-ci repose sur une nouvelle théorie de déformation par cisaillement élevé quasi-3D et après l'introduction des données du problème, c'est-à-dire les propriétés du matériau, les données et la configuration géométriques (symétriques/asymétriques), la graduation matérielle, les charges. Nous procédons au calcul de la fraction volumique ainsi que des propriétés hygro-thermo-mécaniques en fonction de z, conformément à la loi de distribution P-FGM. Par la suite, nous allons procéder à la construction des matrices en calculant les constantes de rigidité mécanique ainsi que les constantes du vecteur de charge généralisé (comprenant les constantes thermiques et d'humidité). Enfin, le système d'équations différentielles (Eq 3.29) sera résolu en utilisant la technique de Navier, permettant ainsi d'obtenir les résultats recherchés.

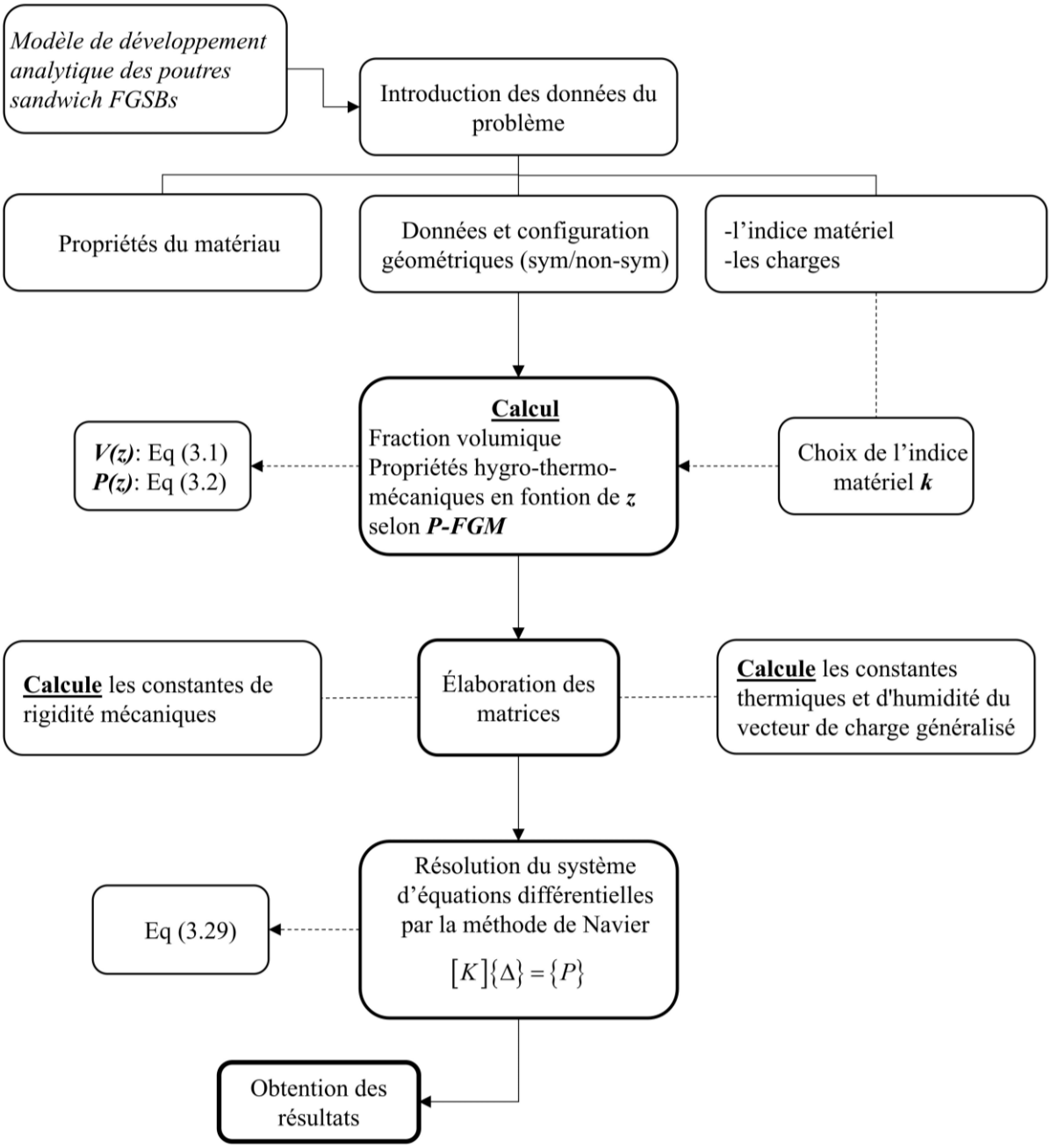


Figure 4.1 Procédure du programme numérique du comportement hygro-thermo-mécanique des poutres sandwiches fonctionnellement graduées.

4.3 Résultats et discussion

Cette section, présente les résultats de l'analyse de la flexion effectuée sous un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire des diverses configurations symétriques et asymétriques de poutres sandwich fonctionnellement graduées. Les résultats actuels sont issus de l'application de la nouvelle théorie de déformation en cisaillement élevé quasi-3D, caractérisée par seulement quatre inconnues. La théorie est formulée de manière à prendre en compte l'influence de l'étirement de l'épaisseur.

L'étude hygro-thermo-mécanique en flexion est réalisée pour des association de matériaux métalliques et de céramique. Le matériau employé est un alliage composé d'aluminium (***Al***) et

d'une céramique de type oxyde d'alumine (***Al_2O_3***). Afin de faciliter les calculs, on introduit l'hypothèse d'un coefficient de Poisson constant à travers toute l'épaisseur de la poutre. Les propriétés matérielles correspondantes sont énumérées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Propriétés matérielles utilisées pour la poutre sandwich FG.

Matériaux	**Propriétés**			
	$E(GPa)$	$\alpha(10^{-6}/°C)$	β	ν
Métal (*aluminium, **Al***)	70	23	0.44	0.3
Céramique (*alumina, **Al_2O_3***)	380	7	0.001	0.3

Les résultats numériques concernant au déplacement axial, à la flèche ainsi qu'aux contraintes sont présentés sous forme de formules non dimensionnelles comme suit [178]:

$$\bar{u}\left(0,-\frac{h}{2}\right)=\frac{100\,E_m h^3 u}{q_0 a^4},\qquad \bar{w}\left(\frac{a}{2},0\right)=\frac{100\,E_m h^3 w}{q_0 a^4}$$

$$\bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)=\frac{h\sigma_x}{q_0 a},\qquad \bar{\sigma}_z\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)=\frac{h\sigma_z}{q_0 a},\qquad \bar{\tau}_{xy}(0,0)=\frac{h\tau_{xy}}{q_0 a}$$

Le Tableau 4.2 illustre les résultats concernant la flèche transversale ainsi que les contraintes adimensionnelles ($\bar{w}, \bar{\sigma}_i$) sous une charge uniformément répartie obtenus par la théorie actuelle, en les comparant à ceux obtenus par Vo et al. **[179]**. On note qu'il y a une bonne corrélation entre les résultats obtenus et ceux de la littérature. Cela illustre que le modèle proposé est en mesure de prédire avec précision le comportement hygro-thermo-mécanique de la poutre sandwich fonctionnellement graduée.

le Tableau 4.3 présente les valeurs des flèches adimensionnelles maximales $\bar{w}$ utilisant des chargements thermomécaniques linéaires et non linéaires pour (*a/h*=10) et l'indice du matériau *k*, obtenues par le modèle proposé et celles obtenues par Ghumarea et Sayyada **[178].** On note qu'il y a une bonne corrélation entre les résultats obtenus et ceux obtenus de la littérature. Ainsi, notre méthode permet de calculer avec succès la réponse en flexion 3D des poutres sandwiches à gradation fonctionnelle, exposées à des chargements hygro-thermo-mécaniques non linéaires (NL-HTM). Il est également évident que l'indice de matériau a une influence importante sur les déplacements maximaux.

Le matériau utilisé dans cette étude est : riche en céramique (Alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380\,GPa$, $\nu = 0.3$, $\alpha_c = 7.11\times10^{-6}/°C$ et $\beta_c = 0$, ainsi que riche en métaux (Aluminium, Al) : $E_m = 70\,GPa$, $\nu = 0.3$, $\alpha_m = 10.33\times10^{-6}/°C$ et $\beta_m = 0.33$.

Le tableau 4.4 présente l'évaluation des déplacements axiaux maximaux adimensionnel $\bar{u}$, des flèche transversales maximales adimensionnelles $\bar{w}$, des contraintes axiales et normales $(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_z)$, ainsi que des contraintes de cisaillement transverses $\bar{\tau}_{xz}$ de diverses poutres sandwich, qu'elles soient symétriques et asymétriques, avec des peaux en matériau FG sous chargement couplé thermomécanique non linéaire (NL-TMCL), les résultats indiquent une corrélation inverse entre l'indice *k* et la rigidité des poutres FG ; une augmentation de *k* entraîne une diminution de la rigidité, se traduisant par une déformation accrue. Les poutres sandwich symétriques (1-1-1) et asymétriques (2-1-1) présentent des déplacements plus importants, avec des valeurs maximales observées pour la configuration asymétrique (2-1-1). De même, les contraintes sont affectées par les variations de l'indice *k*, les valeurs maximales étant toutefois enregistrées pour les poutres sandwich symétriques (1-1-1).

Tableau 4.2 Comparaisons de la flèche maximale $\bar{w}$ et des contraintes σ_i adimensionnelles sous une charge uniformément répartie (a/h=5).

Paramètres non-dimensionnels	***k***	**Théorie** $\varepsilon_z \neq 0$	**Type A**	**Type B**			
			1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
$\bar{w}$	0	Présent	3.1397	3.1397	3.1397	3.1397	3.1397
		Vo et al. **[179]**	3.1397	3.1397	3.1397	3.1397	3.1397
	1	Présent	6.1341	6.2098	5.3611	6.4719	5.7777
		Vo et al. **[179]**	6.1338	6.2098	5.3612	6.4719	5.7777
	2	Présent	7.8606	8.3069	6.6913	8.7703	7.4630
		Vo et al. **[179]**	7.8606	8.3069	6.6913	8.7701	7.4629
	5	Présent	9.6038	11.1175	8.4276	11.6388	9.6462
		Vo et al. **[179]**	9.6037	11.1175	8.4276	11.6384	9.6459
	10	Présent	10.7578	12.4453	9.3099	12.8029	10.6772
		Vo et al. **[179]**	10.7578	12.4453	9.3099	12.8026	10.6769
$\bar{\sigma}_x$	0	Présent	3.8007	3.8007	3.8007	3.8007	3.8007
		Vo et al. **[179]**	3.8005	3.8005	3.8005	3.8005	3.8005
	1	Présent	5.8815	1.4330	1.2314	1.3866	1.2459
		Vo et al. **[179]**	5.8812	1.4330	1.2315	1.3866	1.2459
	2	Présent	6.8820	1.9352	1.5505	1.8446	1.5849
		Vo et al. **[179]**	6.8818	1.9352	1.5505	1.8446	1.5849
	5	Présent	8.1142	2.6080	1.9672	2.4030	2.0161
		Vo et al. **[179]**	8.1140	2.6079	1.9672	2.4030	2.0160

	10	Présent	9.7166	2.9246	2.1788	2.6254	2.2161
		Vo et al. **[179]**	9.7164	2.9245	2.1788	2.6254	2.2161
$\bar{\sigma}_z$	0	Présent	0.1352	0.1352	0.1352	0.1352	0.1352
		Vo et al. **[179]**	0.1352	0.1352	0.1352	0.1352	0.1352
	1	Présent	0.0670	0.0516	0.0447	0.0303	0.0286
		Vo et al. **[179]**	0.0670	0.0516	0.0447	0.0303	0.0286
	2	Présent	0.0926	0.0693	0.0564	0.0389	0.0341
		Vo et al. **[179]**	0.0925	0.0693	0.0564	0.0389	0.0341
	5	Présent	0.0180	0.0916	0.0712	0.0539	0.0454
		Vo et al. **[179]**	0.0180	0.0916	0.0712	0.0539	0.0454
	10	Présent	-0.0182	0.1012	0.0783	0.0589	0.0518
		Vo et al. **[179]**	-0.0181	0.1013	0.0783	0.0589	0.0518
$\bar{\tau}_{xz}$	0	Présent	0.7233	0.7233	0.7233	0.7233	0.7233
		Vo et al. **[179]**	0.7233	0.7233	0.7233	0.7233	0.7233
	1	Présent	0.7233	0.8444	0.7993	0.8940	0.8343
		Vo et al. **[179]**	0.7233	0.8444	0.7993	0.8940	0.8342
	2	Présent	0.6622	0.9084	0.8349	0.9961	0.8920
		Vo et al. **[179]**	0.6622	0.9084	0.8349	0.9961	0.8920
	5	Présent	0.5840	0.9931	0.8763	1.1532	0.9683
		Vo et al. **[179]**	0.5840	0.9931	0.8763	1.1532	0.9683
	10	Présent	0.6397	1.0458	0.8980	1.2646	1.0148
		Vo et al. **[179]**	0.6396	1.0458	0.8980	1.2646	1.0148

Tableau 4.3 Comparaison des flèches maximales adimensionnelles sous chargement thermomécanique linéaire et non linéaire (Type A, a/h=10).

Type de chargement	**Source**	***k***					
		0	**1**	**2**	**5**	**10**	∞
q_0=100 T_2=10 T_3=0	Présent-3D	2.8255	5.5617	6.4538	7.6177	8.4031	13.3384
	Ghumarea et Sayyada-3D **[178]**	2.8214	5.5257	6.5080	7.7374	8.4799	13.3446
q_0=100 T_2=10 T_3=10	Présent-3D	3.2147	5.6421	6.9274	8.1040	8.8984	13.9039
	Ghumarea et Sayyada-3D **[178]**	3.2265	5.6475	6.9469	8.1126	8.8763	13.9323

En ce qui concerne le tableau 4.5, les observations restent identiques pour le chargement thermomécanique non linéaire par rapport à celles présentées dans le tableau 4.4. Cependant, une augmentation importante des valeurs des paramètres non dimensionnels est obtenue en raison du chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire. Par conséquent, la charge d'humidité ne peut être négligée pour examiner correctement le comportement des poutres sandwiches FG.

Le tableau 4.6 présente les valeurs des flèches maximales non-dimensionnelle en 3D sous chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et non linéaire pour différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur (*a/h*) et du type de poutre sandwich FG. On remarque que lorsque le rapport longueur/épaisseur augmente, les valeurs des flèches adimensionnelles diminuent. De plus, l'introduction des termes non linéaires présente les valeurs les plus élevées de la flèche pour *a/h*=5. Cependant, l'effet de la charge hygrothermique non linéaire devient moins critique à mesure que le rapport longueur/épaisseur augmente.

Le Tableau 4.7 présente les valeurs de la flèche maximale non dimensionnelle 3D soumise à un chargement couplé hygro-thermo-mécanique non linéaire, pour diverses valeurs du rapport d'élancement longueur/épaisseur *a/h* ainsi que de l'indice de loi de puissance *k*. Quel que soit le type de poutre sandwich FG, il est observé que les valeurs de la flèche adimensionnelle diminuent avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur, pour une valeur spécifique de l'indice de la loi de puissance. De plus, une augmentation de l'indice de la loi de puissance entraîne une augmentation de la flèche en raison de la réduction de la rigidité des poutres FG.

Tous les résultats obtenus démontrent que les valeurs les plus élevées des déplacements transversaux adimensionnels selon la théorie quasi-3D sont observées dans le cas du chargement Hygro-Thermo-Mécanique Non Linéaire (NL-HTM) comparé aux autres types de chargement (chargement M, L-TM, NL-TM et L-HTM).

Tableau 4.4 Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique non linéaire (a/h=10, q_0=100, T_2=10, T_3=10, C_2 =C_3=0).

Théorie	ε_z	*k*	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\overline{\sigma_x}$	$\overline{\sigma_z}$	$\overline{\tau_{xz}}$
Présent-3D	*≠0*			*1-0-1*			

0	0.4953	3.2009	9.4795	3.4393	0.47582
1	1.1871	6.3117	14.7702	5.4182	0.47224
2	1.5064	7.7352	16.9253	5.9018	0.43114
5	1.7513	9.0777	19.7990	6.7062	0.38051
10	1.8402	9.9952	23.1779	7.4455	0.41756
			1-1-1 sys		
0	0.4953	3.2009	9.4795	3.4393	0.47582
1	1.0318	6.6237	3.6516	1.3672	0.56441
2	1.3296	8.5246	4.6433	1.5542	0.60587
5	1.7113	10.9620	5.8935	1.7245	0.66101
10	1.8881	12.0916	6.4688	1.7910	0.69516
			1-2-1		
0	0.4953	3.2009	9.4795	3.4393	0.47582
1	0.8892	5.7132	3.1501	1.1888	0.53619
2	1.0776	6.9154	3.7768	1.3049	0.55940
5	1.3112	8.4068	4.5391	1.3992	0.58614
10	1.4274	9.1489	4.9152	1.4356	0.60121
			2-1-1 non- sys		
0	0.4953	3.2009	9.4795	3.4393	0.47582
1	1.1500	6.8743	3.5069	1.3098	0.59625
2	1.5279	8.9429	4.3963	1.4519	0.66254
5	1.9860	11.4136	5.4183	1.5668	0.76454
10	2.1676	12.3900	5.8149	1.6041	0.83772
			2-2-1		
0	0.4953	3.2009	9.4795	3.4393	0.47582
1	1.0223	6.1541	3.1669	1.1960	0.55775

	2	1.3004	7.6803	3.8273	1.3028	0.59513
	5	1.6498	9.5703	4.6143	1.3871	0.64200
	10	1.8140	10.449	4.9719	1.4205	0.67510

Tableau 4.5 Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire (a/h=10, q_0=100, T_2=10, T_3=10, C_2 =C_3=100).

Théorie	ε_z	*k*	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_z$	$\bar{\tau}_{xz}$
				1-0-1			
		0	0.4973	3.2134	9.5277	3.4875	0.47580
		1	1.2412	6.5542	15.3443	6.0559	0.47108
		2	1.5683	8.0240	17.6558	6.6744	0.42965
		5	1.8205	9.4222	20.7891	7.7537	0.37910
		10	1.9134	10.3802	24.3900	8.7311	0.41624
				1-1-1			
		0	0.4973	3.2134	9.5277	3.4875	0.47580
		1	1.0761	6.9047	3.8503	1.5658	0.56697
Présent-3D	*≠0*	*2*	1.3844	8.8721	4.8890	1.7997	0.60818
		5	1.7757	11.370	6.1825	2.0132	0.66293
		10	1.9563	12.525	6.7751	2.0970	0.69689
				1-2-1			
		0	0.4973	3.2134	9.5277	3.4875	0.47580
		1	0.9230	5.9278	3.3017	1.3403	0.53918
		2	1.1177	7.1702	3.9568	1.4848	0.56234
		5	1.3564	8.6936	4.7418	1.6018	0.58864
		10	1.4746	9.4482	5.1268	1.6471	0.60400
				2-1-1			

0	0.4973	3.2134	9.5277	3.4875	0.47580
1	1.20441	7.17059	3.68728	1.50258	0.598599
2	1.59627	9.31105	4.61575	1.68363	0.664632
5	2.06714	11.8455	5.66975	1.82872	0.766070
10	2.25335	12.8442	6.07675	1.87640	0.839316
			2-2-1		
0	0.4973	3.2134	9.5277	3.4875	0.47580
1	1.0677	6.4010	3.3171	1.3574	0.56035
2	1.3562	7.9807	4.0064	1.4935	0.59757
5	1.7153	9.9191	4.8173	1.6003	0.64912
10	1.8836	10.8170	5.1838	1.6416	0.67721

Tableau 4.6 Flèches maximales 3D adimensionnelles utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et hygro-thermo-mécanique non linéaire (k=10).

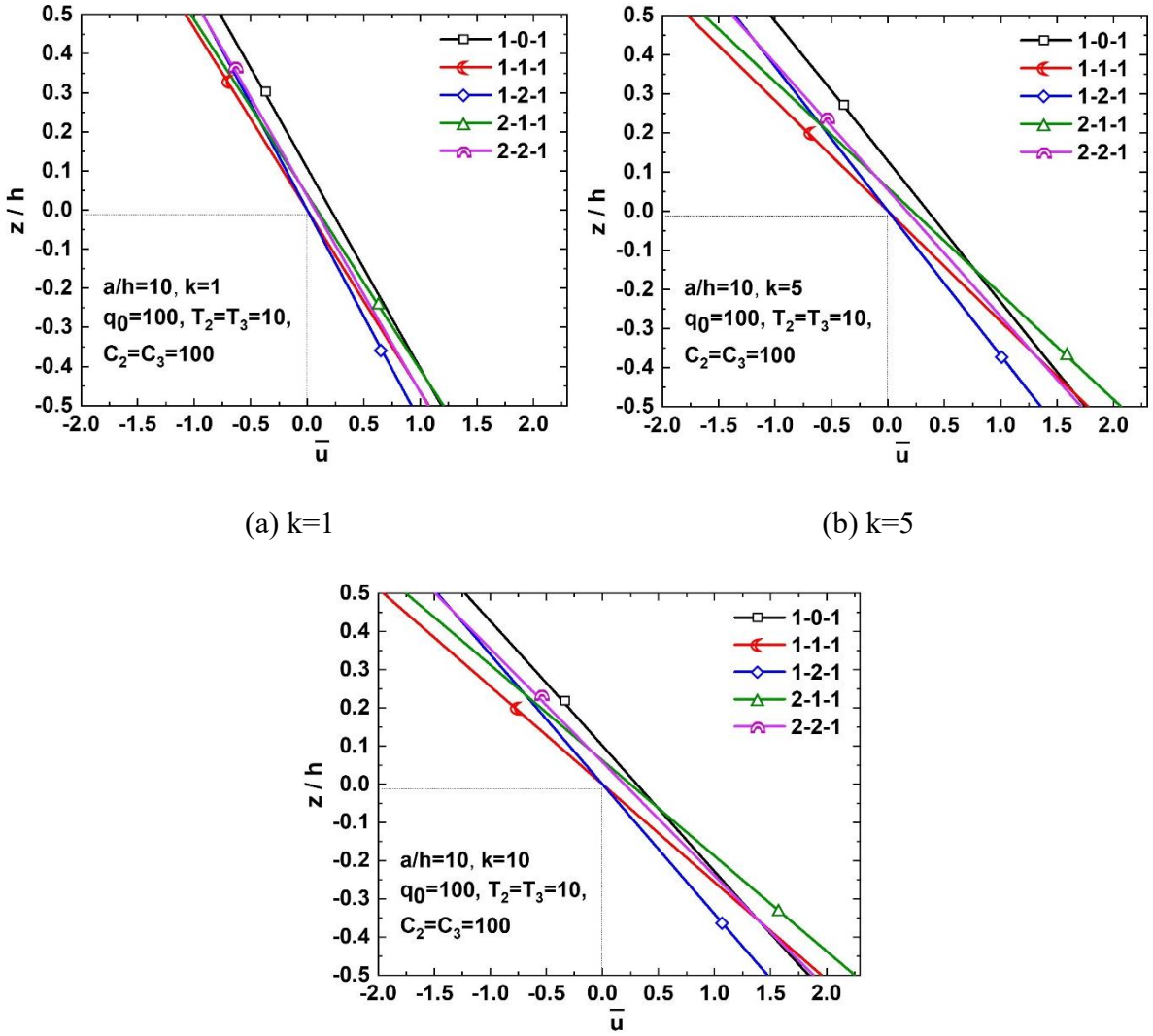
a/h	q_0=100, T_2=10, T_3=0 et C_2=100, C_3=0					q_0=100, T_2=T_3=10 et C_2=C_3=100				
	1-0-1	*1-1-1*	*1-2-1*	*2-1-1*	*2-2-1*	*1-0-1*	*1-1-1*	*1-2-1*	*2-1-1*	*2-2-1*
5	14.4134	16.2712	12.4168	16.7816	14.2043	19.0098	21.3371	16.4142	21.9936	18.7370
10	9.23643	11.2510	8.44473	11.5340	9.67862	10.4427	12.5246	9.44818	12.8442	10.8170
20	7.92525	9.98731	7.44712	10.2138	8.54100	8.29219	10.3061	7.69819	10.5417	8.82594
40	7.68169	9.67090	7.19742	9.88316	8.25621	7.75402	9.75062	7.26020	9.96516	8.32750
60	7.53542	9.61227	7.15113	9.82191	8.20347	7.65436	9.64769	7.17905	9.85841	8.23519
80	7.51411	9.59172	7.13499	9.80046	8.18501	7.61946	9.61167	7.15068	9.82097	8.20283
100	7.50421	9.58223	7.12747	9.79055	8.17649	7.60333	9.59497	7.13755	9.80371	8.18790

Tableau 4.7 Flèches maximales 3D non dimensionnelles sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

Type de chargement	*Schéma*	*k*	*Rapport d'épaisseur (a/h)*

			5	*10*	*20*	*40*	*80*
		0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.28413
		1	12.6884	6.55418	5.00557	4.61746	4.52041
	1-0-1	*2*	14.8830	8.02403	6.28944	5.85461	5.74580
		5	17.2672	9.42221	7.43325	6.93434	6.80947
		10	18.9275	10.3802	8.21212	7.66816	7.53208
		0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.28413
		1	13.5817	6.90473	5.22624	4.80609	4.70100
	1-1-1	*2*	16.5027	8.87208	6.95369	6.47340	6.35330
		5	19.8517	11.3704	9.23669	8.70238	8.56875
		10	21.3371	12.5246	10.3061	9.75062	9.61167
		0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.28413
Hygro-Thermo-Mécanique Non Linéaire : (NHTM) $q_0=100$ $T_2=T_3=10$ $C_2=C_3=100$		*1*	11.6672	5.92778	4.48621	4.12539	4.03516
	1-2-1	*2*	13.4991	7.17017	5.58071	5.18297	5.08350
		5	15.4842	8.69358	6.98781	6.56086	6.45408
		10	16.4142	9.44818	7.69819	7.26020	7.15068
		0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.28413
		1	14.0673	7.17059	5.43672	5.00266	4.89412
	2-1-1	*2*	17.2419	9.31105	7.31712	6.81789	6.69307
		5	20.6765	11.8455	9.62388	9.06758	8.92842
		10	21.9936	12.8442	10.5417	9.96516	9.82097
		0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.28413
		1	12.5944	6.40096	4.84457	4.45492	4.35752
	2-2-1	*2*	14.9495	7.98070	6.22965	5.79133	5.68171
		5	17.5610	9.92019	7.99756	7.51656	7.39629
		10	18.7370	10.8170	8.82594	8.32750	8.20283

Les Figures 4.2a–c montrent l'évolution du déplacement axial non dimensionnel $\bar{u}$ à travers l'épaisseur de poutres sandwich FG soumises à un chargement non linéaire hygro-thermo-mécanique combiné (NL-HTMCL), pour diverses valeurs de l'indice de loi de puissance (*k)* ainsi que de différents types de poutres sandwich FG. Pour la valeur de *k* qui est égale à 10, on observe une augmentation légèrement plus significative des déplacements axiaux.



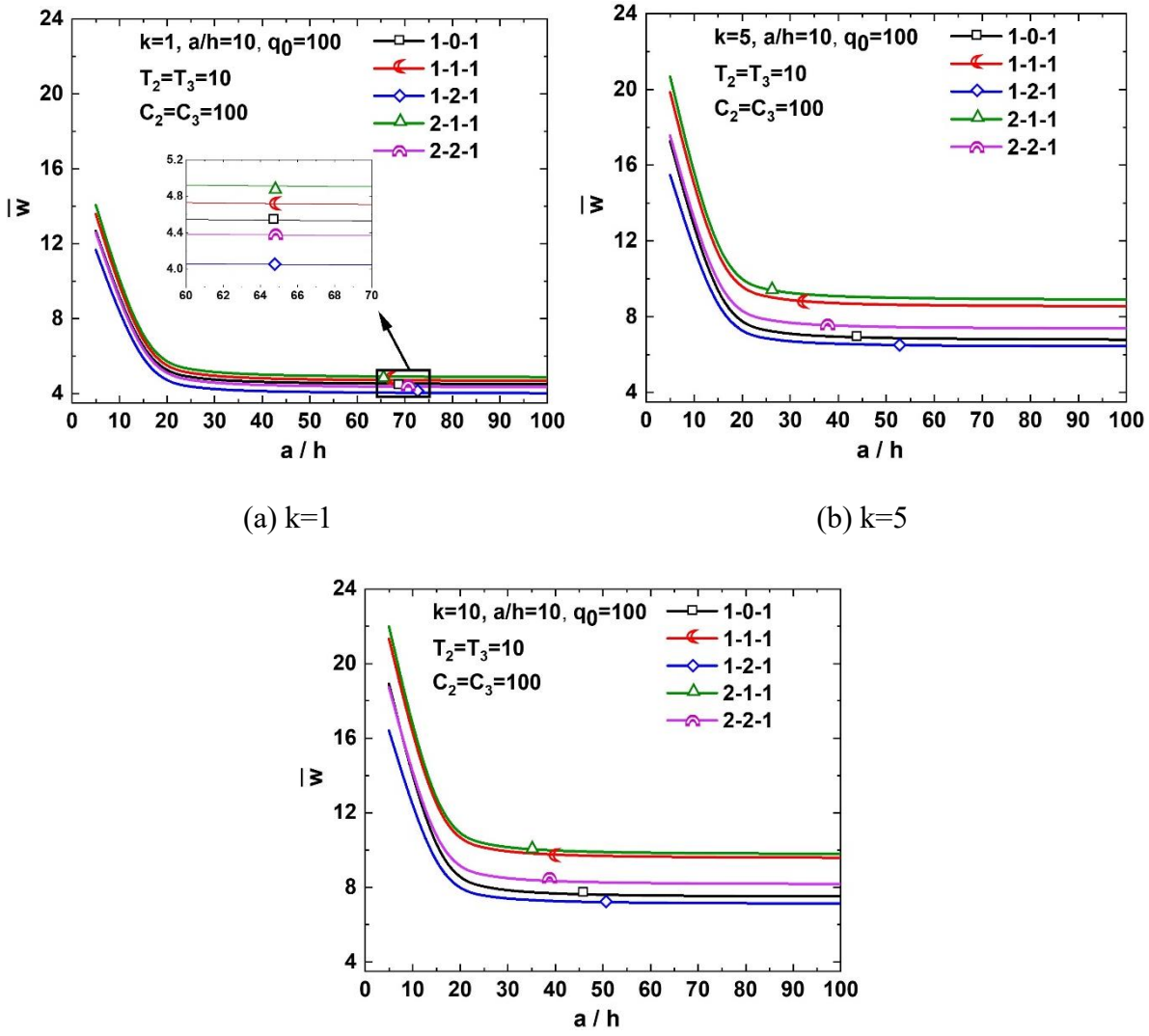
(a) k=1 (b) k=5

(c) k=10

Figure 4.2 Évolution du déplacement axial adimensionnel $\bar{u}$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10

Les Figures 4.3a–c montrent l'influence du rapport longueur/épaisseur (*a/h*) sur la flèche maximale de différentes configurations (symétriques et asymétriques) de poutres sandwich FG, soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire pour diverses valeurs de l'indice de loi de puissance *k*. Il est observé que la flèche maximale est la plus élevée pour une valeur de a/h=5, correspondant aux poutres épaisses, puis diminue progressivement jusqu'à se stabiliser à *a/h*=25, ce qui correspond aux poutres moyennement épaisses ($10 \le a/h \le 25$). De plus, pour les configurations (1-1-1) et (2-1-1) avec un indice *k*=10, la flèche maximale est presque le double par rapport à *k*=1. Ce résultat est attendu, car les poutres sandwich FG avec *k*=10 ont une rigidité

inférieure à celles avec un indice *k*=1. Par conséquent, il est essentiel de prendre en compte l'impact du chargement Hygro-Thermo-Mécanique Non Linéaire (NL-HTM) sur les poutres épaisses *a/h*=5 et moyennement épaisses $10 \le a/h \le 25$ lorsque la valeur de l'indice de loi de puissance *k* est située entre 5 et ∞.



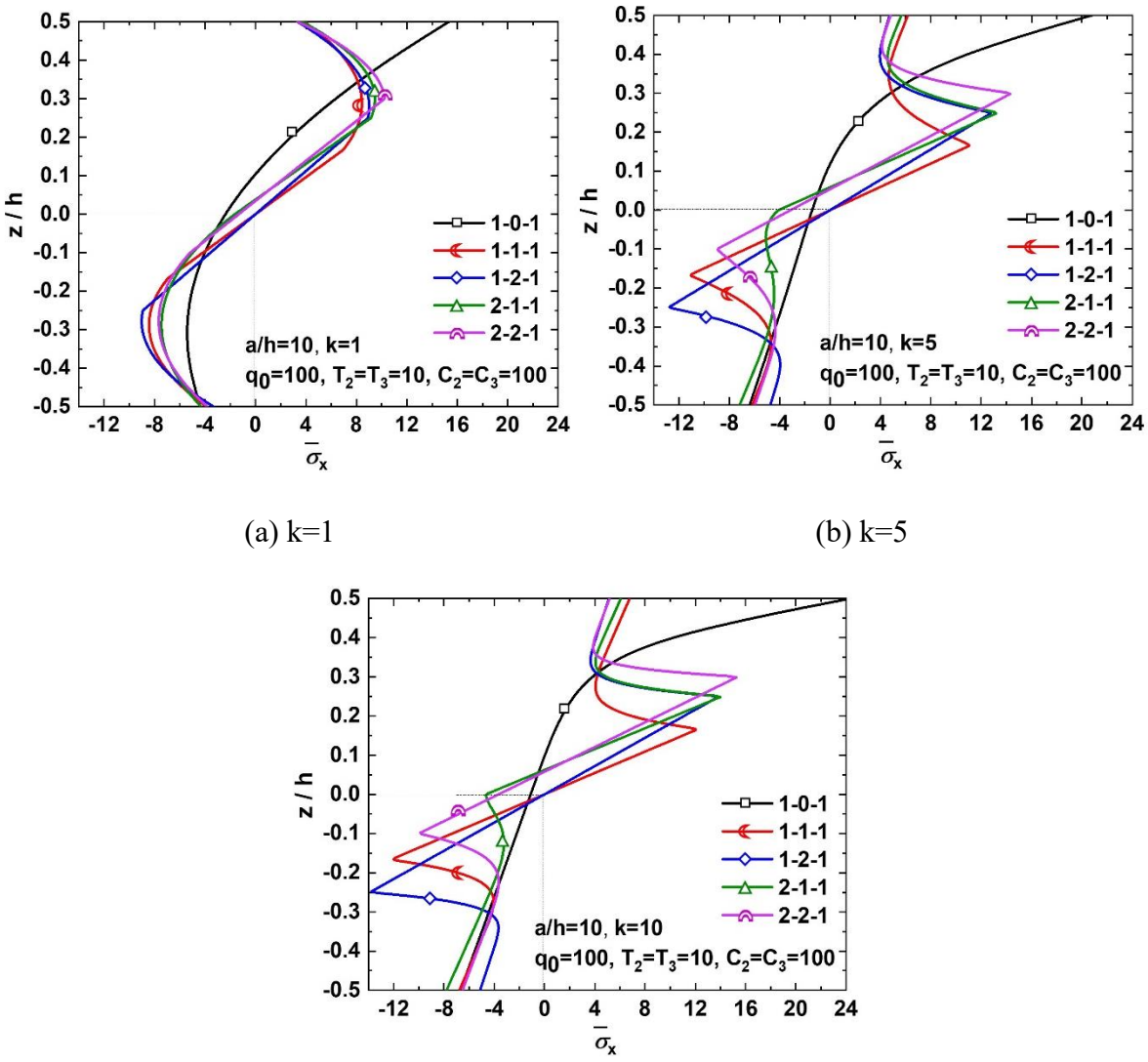
(a) k=1 (b) k=5

(c) k=10

Figure 4.3 Évolution de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h) en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10

L'évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des poutres sandwich FG, soumises à une sollicitation complexe combinant des effets hygrothermiques et mécaniques non-linéaires, est illustrée dans les Figures 4.4a-c pour diverses valeurs de l'indice de loi de puissance *k*. La contrainte axiale adimensionnelle se caractérise par une distribution parabolique dans la poutre FG (1-0-1), sans présence de noyau. Dans cette situation, les valeurs de contrainte maximale en compression sont plus élevées que celles des poutres sandwich FG des configurations (1-2-1), (2-1-1) et (2-2-1). En augmentant l'indice (*k*), ces observations restent les mêmes. Cependant, dans la poutre sandwich FG de configuration (2-2-1), on remarque que la contrainte de compression locale extrême se situe entre la face et le noyau. Quant à la poutre

sandwich FG de configuration (1-2-1), elle montre la contrainte de traction locale extrême la plus élevée, qui se produit également entre la face et le noyau.

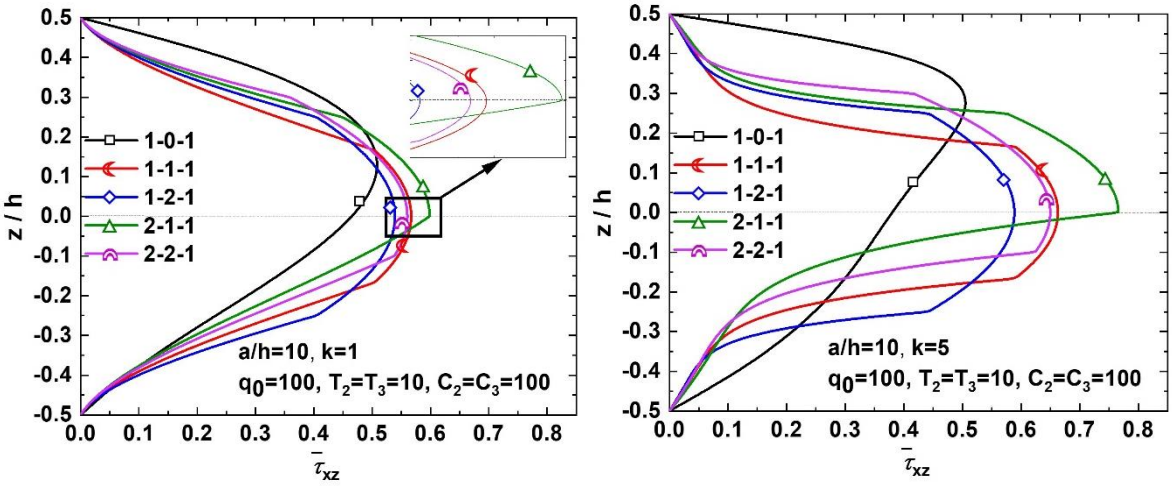


(a) k=1 (b) k=5

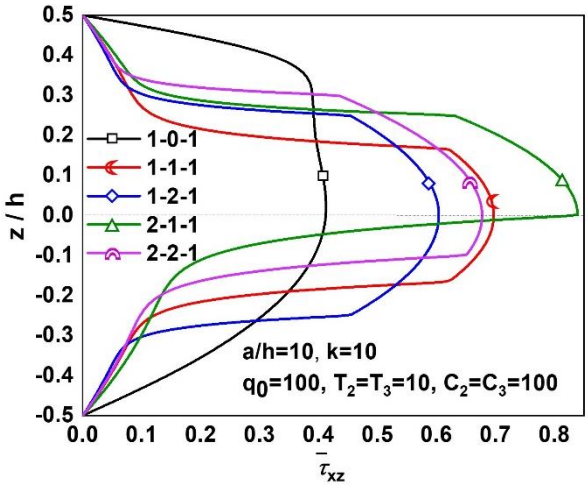
(c) k=10

Figure 4.4 Évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10

Les Figures 4.5a–c illustrent les distributions de contrainte de cisaillement transversale adimensionnelles $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour diverses configurations de poutres sandwich FG et diverses valeurs de l'indice de loi de puissance *k*, sous l'effet d'un combiné chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire. On remarque que ces contraintes de cisaillement ne sont pas symétriques par rapport au plan médian des poutres sandwich FG. En outre, les valeurs des contraintes de cisaillement adimensionnelles varient en fonction du type de poutre sandwich FG, et leurs valeurs maximales sont observées dans la phase métallique. Ainsi, il est notable que l'indice de la loi de puissance exerce une influence significative sur la distribution des contraintes de cisaillement.



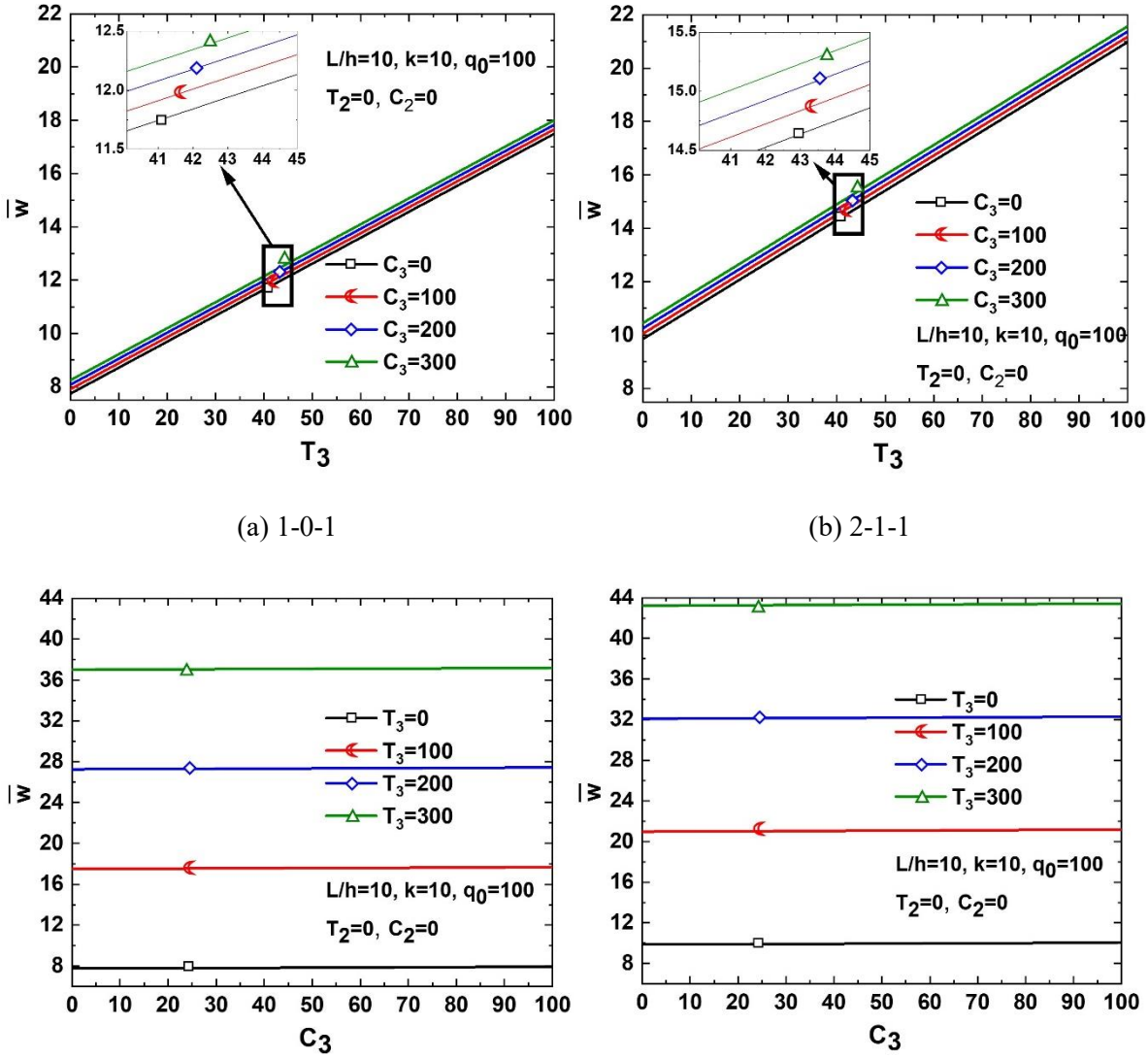
(a) k=1 (b) k=5



(c) k=10

Figure 4.5 Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) k=1, (b) k=5, et (c) k=10

Les Figures 4.6a–d présentent l'évolution de la flèche adimensionnelle ($\bar{w}$) sous différentes charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3). D'une part, la flèche augmente considérablement à mesure que la charge thermique non linéaire induite ($T3$) augmente, Fig. 4.6a–b. D'autre part, l'introduction de la charge d'humidité non linéaire a un léger effet sur la flèche lorsque cette charge est inférieure à 10. Au-dessus de cette valeur, la flèche reste constante (voir Fig.4.6c-d).



(a) 1-0-1 (b) 2-1-1

(c) 1-0-1 (d) 2-1-1

Figure 4.6 Évolution de la flèche maximale adimensionnelle $\bar{w}$ pour différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) : (a-c) Schéma 1-0-1 et (b-d) Schéma 2-1-1

Les figures 4.7a-c illustrent la variation de la flèche adimensionnelle pour diverses configurations de poutres sandwich FG des modèles (1-0-1) et (2-1-1), en fonction des paramètres suivants: la charge non linéaire de température (T_3) et d'humidité (C_3), le rapport longueur/épaisseur (a/h) ainsi que l'indice de loi de puissance k. Il est observable sur ces figures que la flèche augmente en fonction de l'augmentation non linéaire de la charge thermique (T_3) et d'humidité (C_3). Cela démontre que l'interaction des charges thermiques et d'humidité engendre un effet cumulatif sur la déformation de la poutre sandwich. Ainsi, la flèche subit une augmentation significative en fonction de l'augmentation de l'indice de loi de puissance (voir Fig. 4.7a-b). De la même manière, l'augmentation du rapport (a/h) provoque une réduction de la flèche adimensionnelle. De plus, l'introduction des termes non linéaires présente les valeurs les plus élevées de la flèche pour a/h = 5 et 10. Cependant, l'effet de la charge hygrothermique non linéaire devient moins critique à mesure que le rapport longueur/épaisseur augmente (voir Fig. 4.7c). Le

graphique démontre clairement que le comportement de configuration (1-0-1) présente des déformations plus faibles. Tandis que, la configuration (2-1-1) génère des déformations plus élevées, suggérant une sensibilité accrue ou une rigidité réduite par rapport à la configuration (1-0-1).

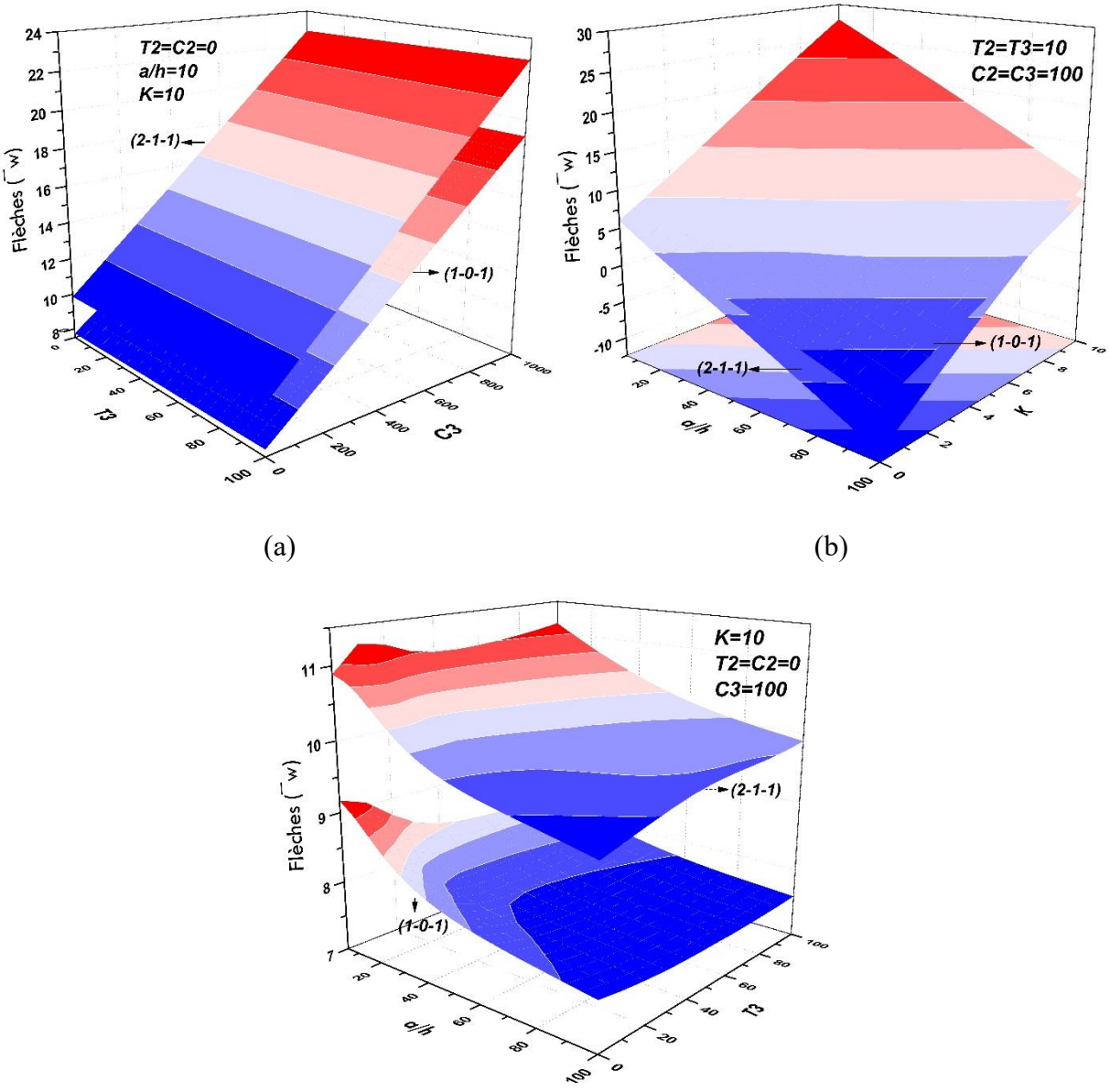
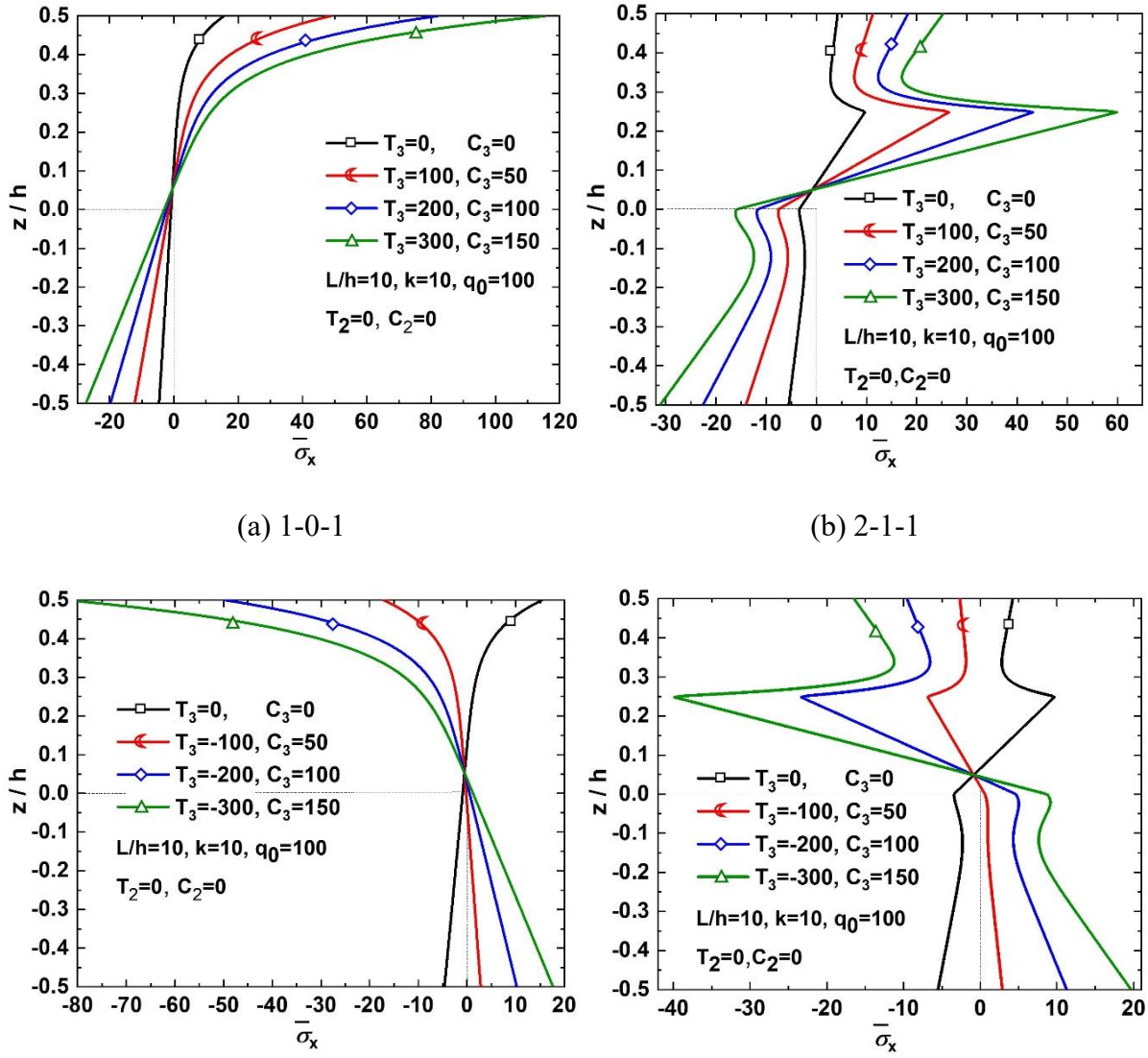


Figure 4.7 Représentation en 3D de l'évolution de la flèche adimensionnelle pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, a/h, k : (a) Flèche en fonction de T_3, C_3, (b) Flèche dépend de : a/h, k, (c) Flèche varie en fonction de : a/h, T_3.

Les Figures 4.8a–d démontrent l'évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur, pour diverses valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3). Dans les Figures 4.8a-b, il est constaté que les contraintes de compression maximales se trouvent en surface supérieure, alors que les contraintes de traction maximales sont observées en surface inférieure à des températures positives. En revanche, pour les températures négatives, les

contraintes de compression maximales se trouvent à la surface inférieure, alors que les contraintes de traction maximales se manifestent à la surface supérieure (voir Figure 4.8c-d). Ces observations sont valables, quel que soit le type de poutre sandwich FG.



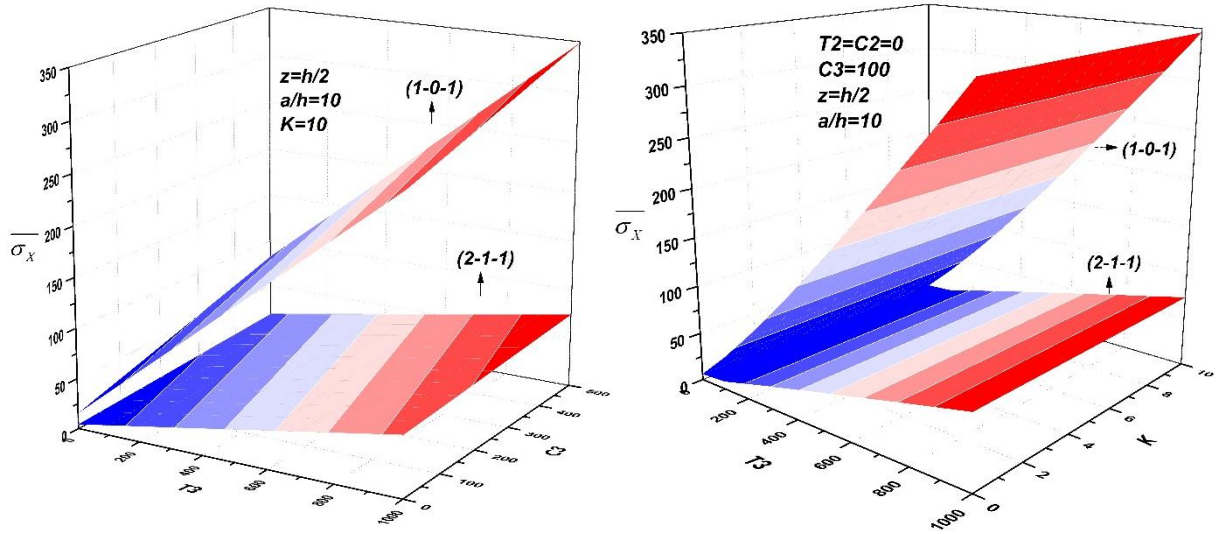
(a) 1-0-1 (b) 2-1-1

(c) 1-0-1 (d) 2-1-1

Figure 4.8 Évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) : (a-c) Schéma 1-0-1 et (b-d) Schéma 2-1-1

L'analyse présenté dans les figures 4.9a-b met en évidence l'impact du paramètre de la non-linéarité (T_3, C_3) ainsi que de l'exposant de loi de puissance *k*, sur la contrainte axiale adimensionnelle dans des poutres sandwich FG (1-0-1) et (2-1-1), évaluée à $z=h/2$. bien que les contraintes de compression maximales soient à la surface supérieure ($z=h/2$) pour les températures positives. Il est possible de constater sur ces figures que la contrainte de compression augmente avec l'augmentation de la charge thermique (T_3) et d'humidité (C_3) non linéaire. En outre, l'introduction de l'augmentation de l'indice de loi de puissance entraîne une augmentation de la

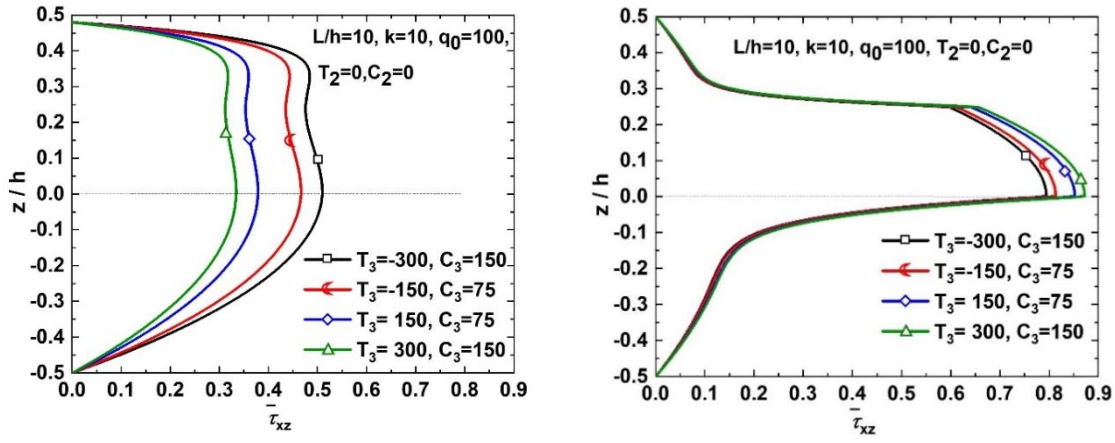
contrainte de compression. Le graphique met en évidence de façon claire que la configuration (2-1-1) présente des valeurs moindres par rapport à la configuration (1-0-1).



(a) (b)

Figure 4.9 Représentation en 3D de l'évolution de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, k : (a) $\bar{\sigma}_x$ en fonction de T_3, C_3, (b) $\bar{\sigma}_x$ en fonction de T_3, k.

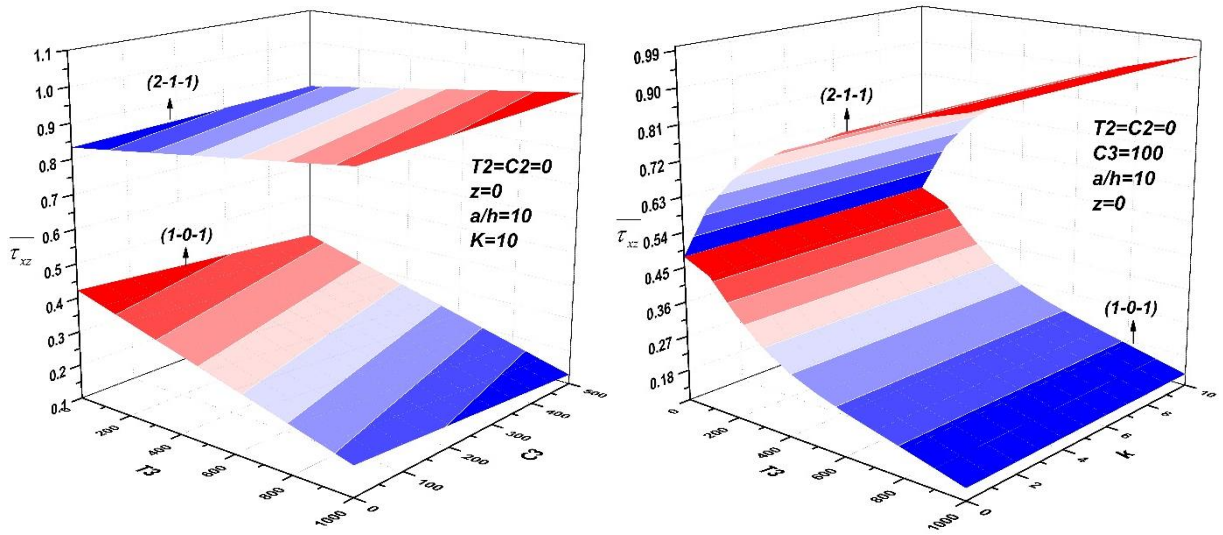
La contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ qui varie en fonction de l'épaisseur en tenant compte de diverses valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3), est présentée à la Figure 4.10. Elle montre l'impact des variations non linéaires des charges thermiques et de l'humidité sur la contrainte de cisaillement, pour la poutre sandwich FG de configuration (1-0-1). Cependant, les valeurs maximales sont obtenues pour la poutre sandwich FG de configuration (2-1-1).



(a) 1-0-1 (b) 2-1-1

Figure 4.10 Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) : (a) Schéma 1-0-1 et (b) Schéma 2-1-1

la variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$, considérée pour diverses géométries de poutres sandwich FG, identifiées par les configurations (1-0-1) et (2-1-1) en cas de *z=0* en fonction des paramètres suivants : T_3, C_3 et *k* est illustrée à la figure 4.11 a et b. Bien que les contraintes de cisaillement maximales se situent au plan médian (*z=0*). Ces figures soulignent l'impact significatif des charges thermiques et des humidités non linéaires sur la contrainte de cisaillement dans les deux configurations de poutres sandwich FG. On remarque que l'augmentation des charges thermiques et d'humidité non linéaires engendre des comportements opposés pour les deux configurations. la configuration (2-1-1) montre une augmentation significative de la contrainte de cisaillement due à ces charges, alors que la configuration (1-0-1) présente une tendance opposée, caractérisée par une réduction de la contrainte de cisaillement. En outre, il apparait que la variation de l'indice de loi de puissance *k* n'affecte pas fondamentalement les tendances observées, confirmant ainsi la sensibilité des deux configurations aux charges hygrothermiques non linéaires.



(a) (b)

Figure 4.11 Représentation en 3D de l'évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour diverses configurations (1-0-1) et (2-1-1) en fonction des paramètres T_3, C_3, k : (a) $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction de T_3, C_3, (b) $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction de T_3, k.

4.4 Conclusion

En s'appuyant sur une formulation originale de la déformation due au cisaillement transverse en quasi-tridimensionnelle et en employant la technique de Navier pour la résolution, un modèle analytique est développé. Ce modèle vise à analyser le comportement en flexion de différentes configurations des poutres sandwich symétriques et asymétriques avec des peaux en matériau FG simplement appuyées et soumises à un chargement non linéaire hygro-thermo-mécanique.

Les déplacements et les contraintes sans dimension sont déterminés pour diverses conditions de chargements externes (M, L-TM, NL-TM, L-HTM et NL-HTM). Les résultats issus de l'application de cette théorie de déformation par cisaillement quasi-3D sont confrontés à ceux obtenus par plusieurs théories d'ordre supérieur quasi-3D qui mettent en évidence la déformation

de cisaillement ainsi que les effets d'étirement d'épaisseur, tout en soulignant l'impact de ces chargements couplés sur les paramètres non dimensionnels.

Plusieurs paramètres tels que l'indice de puissance *k*, le rapport d'épaisseur *a/h*, et les charges thermiques et d'humidité ont une influence sur le comportement en flexion des poutres sandwich FG.

Les résultats obtenus mettent en évidence une corrélation significative entre les résultats du modèle actuel et ceux de la littérature, ce qui montre l'efficacité et la précision du présent modèle.

Conclusion Générale

Les matériaux composites conventionnels (Stratifiés), bien qu'ils offrent certains avantages, sont également affectés par des inconvénients liés à la nature discontinue de leurs propriétés et aux contraintes interfaciales. Cette discontinuité structurelle entraîne des concentrations de contraintes importantes, susceptibles d'initier la fissuration du matériau et, par conséquent, d'engendrer des phénomènes de délaminage, en particulier dans des environnements à haute température. Pour surmonter ces effets néfastes, on utilise des matériaux fonctionnellement gradués dont les propriétés varient continuellement. Cela est réalisé en modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux, généralement dans la direction de l'épaisseur. Ces matériaux composites avancés connaissent un développement continu dans les domaines des sciences et de l'ingénierie et présentent plusieurs applications pratiques. La création et le développement de ces matériaux demandent la mise en place d'outils d'analyse adaptés qui considèrent leurs particularités géométriques et matérielles.

Les poutres sandwich fonctionnellement graduées sont largement utilisées dans de multiples secteurs, notamment la construction, l'aérospatiale, la marine, l'aéronautique, et les transports, en raison de leur faible poids et de leur grande rigidité. Cependant, ces structures sont souvent soumises à des environnements agressifs et à des chargements couplés (mécaniques, thermiques et liés à l'humidité), ce qui pose des défis complexes lors de leur conception.

En réponse à cette problématique, nous avons développé un modèle analytique pour étudier le comportement en flexion de poutres sandwich fonctionnellement graduées simplement appuyées, soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire. L'analyse porte sur des poutres symétriques et asymétriques avec des peaux en matériau FG, exposées à des conditions de chargement couplées non linéaires (NL-HTMCL).

Le but principal de cette étude est de proposer un modèle analytique performant, basé sur la théorie de la déformation de cisaillement élevé quasi-3D. Ce modèle inclut des termes d'intégrales indéterminées et prend en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur, permettant ainsi d'analyser avec précision le comportement de divers types de poutres sandwich. Les équations d'équilibre gouvernantes sont obtenues en appliquant le principe énergétique des travaux virtuels.

La technique de Navier a ensuite été appliquée pour obtenir des solutions analytiques des poutres sandwich FG. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés en réponse à différents types de chargements hygro-thermo-mécaniques (M, L-TM, NL-TM, L-HTM et NL-HTM).

Afin d'évaluer les effets des chargements couplés sur les paramètres non dimensionnels, les résultats numériques obtenus sont comparés à ceux prédits par différentes théories d'ordre supérieur quasi-3D. Les grandeurs non dimensionnelles telles que la flèche, le déplacement axial

et les contraintes sont analysées en fonction de plusieurs paramètres, notamment k, a/h, T2, C2, T3 et C3.

Les résultats de cette recherche sont confirmés et examinés à travers une analyse paramétrique, mettant en présent les points suivants :

- Les flèches sous un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire (NL-HTM) sont plus élevées que dans les autres cas (M, L-TM, NL-TM et L-HTM). On constate que l'indice de matériau influence les déplacements maximaux dans ces types de chargement, avec des valeurs critiques pour les poutres ayant un rapport ***(***a/h**=5*)* et un indice (*k=10*).
- L'augmentation de l'indice de matériau *k* réduit la rigidité des poutres sandwich FG, ce qui entraîne une augmentation des flèches adimensionnelles.
- Un rapport longueur/épaisseur accru diminue les valeurs des flèches adimensionnelles.
- Des déplacements plus élevés sont observés pour les poutres sandwich symétriques (1-1-1) et asymétriques (2-1-1), avec des valeurs maximales enregistrées pour la configuration asymétrique (2-1-1).
- Les contraintes sont affectées de manière significative par la variation de l'indice de loi de puissance k. Cependant, les valeurs maximales sont observées pour les poutres sandwich symétriques de configuration (1-1-1).
- La contrainte de cisaillement transversal diminue légèrement pour les poutres sandwich fonctionnellement graduées soumises aux chargements NL-TM et NL-HTM par rapport au chargement mécanique.
- Les contraintes axiales maximales en traction sont significativement plus faibles sous chargement NL-HTM lorsque l'indice de la loi de puissance $k > 0$. Pour les poutres sandwich fonctionnellement graduées symétriques, l'épaisseur du noyau doit être supérieure à celle des peaux, comme dans le cas (1-2-1). Toutefois, pour les poutres non symétriques, il est nécessaire d'avoir une épaisseur égale à celle de l'une des peaux, à savoir (2-2-1).

En conséquence, il est essentiel de prendre en compte l'épaisseur des diverses couches ainsi que l'impact des charges thermiques et de l'humidité au cours du processus de conception. Cela permettra d'étudier correctement le comportement en flexion des poutres sandwich fonctionnellement graduées dans des applications techniques particulières, en particulier dans les secteurs de l'aérospatiale, de l'automobile et du génie civil.

Les résultats obtenus de la théorie développée présentent une corrélation satisfaisante avec ceux présentés dans la littérature, mettant en évidence la précision, l'efficacité et la simplicité du modèle pour l'étude du comportement en flexion des poutres. De plus, la formulation quasi-3D développée peut être étendue à l'étude d'autres modèles de structures et de matériaux.

- **Perspectives**

Ces travaux ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche :

- Il est prévu d'appliquer ce modèle d'ordre élevé quasi 3-D pour l'analyse dynamique et l'étude de la stabilité des structures fonctionnellement graduées. Ce modèle tiendra compte de l'interaction entre différents types de sollicitations, y compris les chargements mécaniques, thermiques, et hygrothermiques, ainsi que de l'influence des diverses conditions aux limites imposées à la structure.
- La modélisation numérique par l'utilisation des codes de calcul permet de simuler le comportement des structures en matériaux FG sous divers sollicitations et conditions d'appuis.
- En plus, il serait très intéressant d'étudier l'impact des imperfections de fabrication telles que la porosité sur le comportement global des poutres FG soumises à diverses sollicitations et conditions d'appuis.

Bibliographie

[1] Ebrahimi. F, (2016). Advances in Functionally Graded Materials and Structures.

[2] Somiya, S. (2013). Handbook of advanced ceramics: materials, applications, processing, and properties. Academic press.

[3] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (1999). Functionally graded materials: design, processing and applications (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

[4] Mahamood, R. M., Akinlabi, E. T., Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). Introduction to functionally graded materials (pp.1-8). Springer International Publishing.

[5] Koizumi, M. F. G. M. (1997). FGM activities in Japan. Composites Part B: Engineering, 28(1-2), 1-4.

[6] Koizumi, M., & Niino, M. (1995). Overview of FGM research in Japan. Mrs Bulletin, 20(1), 19-21.

[7] Saleh, B., Jiang, J., Ma, A., Song, D., Yang, D., and Xu, Q. (2020). Review on the influence of different reinforcements on the microstructure and wear behavior of functionally graded aluminum matrix composites by centrifugal casting. Metals and Materials International, 26, 933-960.

[8] Elishakoff, I. E., Pentaras, D., & Gentilini, C. (2015). Mechanics of functionally graded material structures. World scientific.

[9] Sarangi, S. K. (2021). Modeling and Analysis of Smart Functionally Graded Structures. In Functionally Graded Materials (FGMs) (pp. 139-168). CRC Press.

[10] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. Composite structures, 96, 833-849.

[11] Shen, M., & Bever, M. B. (1972). Gradients in polymeric materials. Journal of Materials science, 7, 741-746.

[12] Ichikawa ،K. (Ed.). (2001). functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. Springer Science & Business Media.

[13] Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., & Ma, A. (2020). 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. Composites Part B: Engineering, 201, 108376.

[14] Watanabe, Y., Yamanaka, N., & Fukui, Y. (1998). Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 29(5-6), 595-601.

[15] Saiyathibrahim, A., Nazirudeen, M. S. S., & Dhanapal, P. (2015, August). Processing techniques of functionally graded materials—a review. In International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology (Vol. 1, pp. 98-105).

[16] Lian, Y., Liu, X., Xu, Z., Song, J., & Yu, Y. (2013). Preparation and properties of CVD-W coated W/Cu FGM mock-ups. Fusion Engineering and Design, 88(9-10), 1694-1698.

[17] Groves, J. F., & Wadley, H. N. G. (1997). Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. Composites Part B: Engineering, 28(1-2), 57-69.

[18] El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. SN Applied Sciences, 1, 1-23.

[19] Kawasaki, A., & Watanabe, R. (1997). Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. Ceramics international, 23(1), 73-83.

[20] Watanabe, Y., Sato, H., & Miura-Fujiwara, E. (2015). Functionally graded metallic biomaterials. Advances in Metallic Biomaterials: Processing and Applications, 181-209.

[21] Gupta, A., & Talha, M. (2015). Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. Progress in Aerospace Sciences, 79, 1-14.

[22] Mahamood, R. M., & Mahamood, R. M. (2018). Introduction to Laser Metal Deposition Process. Laser Metal Deposition Process of Metals, Alloys, and Composite Materials, 1-9.

[23] Miteva, A., & Bouzekova-Penkova, A. (2021). Module for wireless communication in aerospace vehicles. Aerospace Research in Bulgaria, 33, 195-209.

[24] Sadollah, A., Bahreininejad, A., Eskandar, H., & Hamdi, M. (2013). Optimum material gradient for functionally graded dental implant using particle swarm optimization. Advanced Materials Research, 647, 30-36.

[25] Chen, W. W., Rajendran, A. M., Song, B., & Nie, X. (2007). Dynamic fracture of ceramics in armor applications. Journal of the American Ceramic Society, 90(4), 1005-1018.

[26] Mueller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. Materials Science and Engineering: A, 362(1-2), 17-39.

[27] Herrmann, M., & Sobek, W. (2017). Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components. Structural Concrete, 18(1), 54-66.

[28] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2003). An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58(10), 1457-1497.

[29] Nemati, A. R., & Mahmoodabadi, M. J. (2020). Effect of micromechanical models on stability of functionally graded conical panels resting on Winkler–Pasternak foundation in various thermal environments. Archive of Applied Mechanics, 90(5), 883-915.

[30] Voigt, W. (1889). Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. Annalen der physik, 274(12), 573-587.

[31] Reuß, A. (1929). Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 9(1), 49-58.

[32] Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11(2), 127-140.

[33] Mori, T., & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta metallurgica, 21(5), 571-574.

[34] Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13(4), 213-222.

[35] Christensen, R. M., & Lo, K. (1979). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 27(4), 315-330.

[36] Wakashima, K., & Tsukamoto, H. (1991). Mean-field micromechanics model and its application to the analysis of thermomechanical behaviour of composite materials. Materials Science and Engineering: A, 146(1-2), 291-316.

[37] Halpin, J. C., & Tsai, S. W. (1969). Effects of environmental factors on composite materials.

[38] Tamura, I. (1973). Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strength. In Proceedings of the third international conference on strength of metals and alloys, 1973 (Vol. 1, pp. 611-615). Cambridge, Institute of Metals.

[39] Gasik, M. M. (1998). Micromechanical modelling of functionally graded materials. Computational Materials Science, 13(1-3), 42-55.

[40] Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. Mechanics of materials, 6(2), 147-157.

[41] Ziou, H., Guenfoud, H., & Guenfoud, M. (2016). Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering, 7(3), 239-261.

[42] Wakashima, K., Hirano, T., & Niino, M. (1990). Functionally Gradient Materials (Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components.

[43] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. International Journal of Solids and Structures, 43(13), 3657-3674.

[44] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2002). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53(8), 1903-1935.

[45] Love, A. E. H. (2013). A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge university press.

[46] Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1850(40), 51-88.

[47] Reddy, J. N. (2003). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press.

[48] Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1972). Mechanics of materials. Van nordstrand Reinhold Company. New York.

[49] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.

[50] Mindlin, R. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. of Appl. Mech, 18(1), 31-38.

[51] Khandan, R., Noroozi, S., Sewell, P., & Vinney, J. (2012). The development of laminated composite plate theories: a review. Journal of Materials Science, 47, 5901-5910.

[52] Yu, Y. Y. (1959). Simple thickness-shear modes of vibration of infinite sandwich plates. ASME Journal of Applied Mechanics, 26, 679–681.

[53] Chow, T. S. (1971). On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. Journal of Composite Materials, 5(3), 306-319.

[54] Whitney, J. M. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. ASME Journal of Applied Mechanics, 40, 302–304.

[55] Whitney, J. M. (1972). Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. Journal of Composite materials, 6(3), 426-440.

[56] Noor, A. K., Burton, W. S., & Peters, J. M. (1990). Predictor-corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 82(1-3), 341-363.

[57] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2006). A Reissner-Mindlin Plate Model for Functionally Graded Materials. In III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering: Book of Abstracts (pp. 564-564). Dordrecht: Springer Netherlands.

[58] Efraim, E., & Eisenberger, M. (2007). Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. Journal of Sound and Vibration, 299(4-5), 720-738.

[59] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 14(8), 567-575.

[60] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2008). First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. Composite Structures, 83(1), 25-36.

[61] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., & Omidi, M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling, 34(5), 1276-1291.

[62] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME Journal of Applied Mechanics, 51, 745–752.

[63] Ghugal, Y. M., & Shimpi, R. P. (2002). A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. Journal of reinforced plastics and composites, 21(9), 775-813.

[64] Whitney, J. M., & Sun, C. T. (1973). A higher order theory for extensional motion of laminated composites. Journal of Sound and Vibration, 30(1), 85-97.

[65] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. International journal of engineering science, 29(8), 901-916.

[66] Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mechanica, 94(3), 195-220.

[67] Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. International Journal of solids and structures, 40(6), 1525-1546.

[68] Shimpi, R. P. (2002). Refined plate theory and its variants. AIAA journal, 40(1), 137-146.

[69] Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013). A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. Composite Structures, 99, 172-180.

[70] Chandrashekhara, K., & Bangera, K. M. (1993). Linear and geometrically non-linear analysis of composite beams under transverse loading. Composites science and technology, 47(4), 339-347.

[71] Smith, S. J., & Bank, L. C. (1992). Modifications to beam theory for bending and twisting of open-section composite beams—experimental verification. Composite structures, 22(3), 169-177.

[72] Sankar, B. V. (2001). An elasticity solution for functionally graded beams. Composites Science and Technology, 61(5), 689-696.

[73] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. International journal of mechanical sciences, 45(3), 519-539.

[74] Kutiš, V., Murín, J., Belak, R., & Paulech, J. (2011). Beam element with spatial variation of material properties for multiphysics analysis of functionally graded materials. Computers & structures, 89(11-12), 1192-1205.

[75] Pindera, M. J., & Dunn, P. (1995). An evaluation of a coupled microstructural approach for the analysis of functionally graded composites via the finite-element method, NASA CR 195455.

[76] Reddy, J. (1999). On the dynamic behavior of the Timoshenko, beam finite elements. Sadhana, 24, 175-198.

[77] Yang, J., & Chen, Y. (2008). Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. Composite Structures, 83(1), 48-60.

[78] Lü, C. F., Chen, W. Q., Xu, R. Q., & Lim, C. W. (2008). Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. International Journal of Solids and Structures, 45(1), 258-275.

[79] Benatta, M. A., Mechab, I., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2008). Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. Computational Materials Science, 44(2), 765-773.

[80] Kang, Y. A., & Li, X. F. (2009). Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force. International Journal of Non-Linear Mechanics, 44(6), 696-703.

[81] Frostig, Y. B. M. V. O. S. I., Baruch, M., Vilnay, O., & Sheinman, I. (1992). High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. Journal of Engineering Mechanics, 118(5), 1026-1043.

[82] Venkataraman, S., & Sankar, B. (2001). Analysis of sandwich beams with functionally graded core. In 19th AIAA Applied Aerodynamics Conference (p. 1281).

[83] Daouadji, T. H., Henni, A. H., Tounsi, A., & El Abbes, A. B. (2013). Elasticity solution of a cantilever functionally graded beam. Applied Composite Materials, 20, 1-15.

[84] Thai, H. T., & VO, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. International journal of mechanical sciences, 62(1), 57-66.

[85] Kim, N. I., & Lee, J. (2017). Exact solutions for coupled responses of thin-walled FG sandwich beams with non-symmetric cross-sections. Composites Part B: Engineering, 122, 121-135.

[86] Şimşek, M., & Al-Shujairi, M. (2017). Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads. Composites Part B: Engineering, 108, 18-34.

[87] Apetre, N. A., Sankar, B. V., & Ambur, D. R. (2008). Analytical modeling of sandwich beams with functionally graded core. Journal of Sandwich Structures & Materials, 10(1), 53-74.

[88] Nguyen, T. K., & Nguyen, B. D. (2015). A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. Journal of Sandwich Structures & Materials, 17(6), 613-631.

[89] Li, W., Ma, H., & Gao, W. (2019). A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams. Composite Structures, 221, 110830.

[90] Kurtaran, H. (2015). Large displacement static and transient analysis of functionally graded deep curved beams with generalized differential quadrature method. Composite Structures, 131, 821-831.

[91] Eroglu, U. (2016). Large deflection analysis of planar curved beams made of functionally graded materials using variational iterational method. Composite Structures, 136, 204-216.

[92] Thurnherr, C., Groh, R. M., Ermanni, P., & Weaver, P. M. (2016). Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials. International Journal of Solids and Structures, 97, 16-28.

[93] Sayyad, A. S., & Avhad, P. V. (2019). On static bending, elastic buckling and free vibration analysis of symmetric functionally graded sandwich beams. Journal of Solid Mechanics, 11(1), 166-180.

[94] Koutoati, K., Mohri, F., & Daya, E. M. (2021). Finite element approach of axial bending coupling on static and vibration behaviors of functionally graded material sandwich beams. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 28(15), 1537-1553.

[95] Avhad, P. V., & Sayyad, A. S. (2020). On the static deformation of FG sandwich beams curved in elevation using a new higher order beam theory. Sādhanā, 45(1), 188.

[96] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2019). A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams. Composite Structures, 226, 111246.

[97] Ching HK, Chen JK (2007) Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material proper-ties. J Mech Mater Struct 2(4):633–653.

[98] MaLS, LeeDW (2012) Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading. Eur J Mech A Solids 31(1):13–20.

[99] Esfahani SE, Kiani Y, Eslami MR (2013) nonlinear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on nonlinear hardening elastic foundations. Int J Mech Sci 69:10–20.

[100] Arbind ARCHANA, Reddy JN, Srinivasa AR (2014) Modified couple stress-based third-order theory for nonlinear analysis of function-ally graded beams. Latin Am J Solids Struct 11:459–487.

[101] Zhou HM, Zhang XM, Wang ZY (2019) Thermal analysis of 2D FGM beam subjected to thermal loading using meshless weighted least-square method. Math Probl Eng.

[102] Akbas SD (2022) Moving-load dynamic analysis of AFG beams under thermal effect. Steel Compos Struct 42(5):649–655.

[103] Alshorbagy, A. E., Eltaher, M. A., & Mahmoud, F. (2011). Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. Applied mathematical modelling, 35(1), 412-425.

[104] Şimşek, M., & Kocatürk, T. (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. Composite Structures, 90(4), 465-473.

[105] Khalili, S. M. R., Jafari, A. A., & Eftekhari, S. A. (2010). A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. Composite Structures, 92(10), 2497-2511.

[106] Pradhan, S. C., & Murmu, T. (2009). Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. Journal of Sound and Vibration, 321(1-2), 342-362.

[107] Li, S. R., Su, H. D., & Cheng, C. J. (2009). Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment. Applied Mathematics and Mechanics, 30(8), 969-982.

[108] Huang, Y., & Li, X. F. (2010). A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. Journal of sound and vibration, 329(11), 2291-2303.

[109] Shahba, A., & Rajasekaran, S. (2012). Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. Applied Mathematical Modelling, 36(7), 3094-3111.

[110] Liu, Y., & Shu, D. W. (2014). Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination. Composites Part B: Engineering, 59, 166-172.

[111] Aydogdu, M., & Taskin, V. (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials & design, 28(5), 1651-1656.

[112] Su, H., & Banerjee, J. R. (2015). Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams. Computers & Structures, 147, 107-116.

[113] Sina, S. A., Navazi, H. M., & Haddadpour, H. (2009). An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. Materials & Design, 30(3), 741-747.

[114] Pradhan, K. K., & Chakraverty, S. (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. Composites Part B: Engineering, 51, 175-184.

[115] Huang, Y., Yang, L. E., & Luo, Q. Z. (2013). Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. Composites Part B: Engineering, 45(1), 1493-1498.

[116] Rajasekaran, S., & Norouzzadeh Tochaei, E. (2014). Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. Meccanica, 49, 995-1009.

[117] Li, S. R., Wan, Z. Q., & Zhang, J. H. (2014). Free vibration of functionally graded beams based on both classical and first-order shear deformation beam theories. Applied Mathematics and Mechanics, 35(5), 591-606.

[118] Aydogdu, M., & Taskin, V. (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials & design, 28(5), 1651-1656.

[119] Mahi, A., Bedia, E. A., Tounsi, A., & Mechab, I. (2010). An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions. Composite structures, 92(8), 1877-1887.

[120] Thai, H. T., & Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories International journal of mechanical sciences, 62(1), 57-66.

[121] Mashat, D. S., Carrera, E., Zenkour, A. M., Al Khateeb, S. A., & Filippi, M. (2014). Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements. Composites Part B: Engineering, 59, 269-278.

[122] VO, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Maheri, A., & Lee, J. (2014). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. Engineering structures, 64, 12-22.

[123] Shen, H. S., & Wang, Z. X. (2014). Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments. International Journal of Mechanical Sciences, 81, 195-206.

[124] Hadji, L., Zouatnia, N., & Kassoul, A. (2017). Wave propagation in functionally graded beams using various higher-order shear deformation beams theories. Structural Engineering and Mechanics, an Int'l Journal, 62(2), 143-149.

[125] Fang, J., Gu, J., & Wang, H. (2018). Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. International Journal of Mechanical Sciences, 136, 188-199.

[126] Eltaher MA, Akba¸s¸SD (2020) Transient response of 2D function-ally graded beam structure. Struct EngMech Int J 75(3):357–367.

[127] Guptaa S, ChalakHD (2022) Bending and free vibration analysis of FG sandwich beams using higher-order zigzag theory. Steel Compos Struct 45(4):483 499.

[128] Du M, Liu J, Ye W, Yang F, Lin G (2022) A new semi-analytical approach for bending, buckling and free vibration analyses of power law functionally graded beams. Struct Eng Mech 81(2):179 194.

[129] Shahsiah, R., Nikbin, K. M., & Eslami, M. R. (2009). Thermal buckling of functionally graded beams. Iranian Journal of Mechanical Engineering10: 65–81.

[130] Kiani, Y. A. S. S. E. R., & Eslami, M. R. (2013). Thermomechanical buckling of temperature-dependent FGM beams. Latin American Journal of Solids and Structures, 10, 223-246.

[131] Kiani, Y., Taheri, S., & Eslami, M. R. (2011). Thermal buckling of piezoelectric functionally graded material beams. Journal of Thermal Stresses, 34(8), 835-850.

[132] Wattanasakulpong, N., Prusty, B. G., & Kelly, D. W. (2011). Thermal buckling and elastic vibration of third order shear deformable functionally graded beams. International Journal of Mechanical Sciences, 53(9), 734-743.

[133] Kargani, A., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). Exact solution for nonlinear stability of piezoelectric FGM Timoshenko beams under thermo-electrical loads. Journal of Thermal Stresses, 36(10), 1056-1076.

[134] Komijani, M., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). Non-linear thermoelectrical stability analysis of functionally graded piezoelectric material beams. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 24(4), 399-410.

[135] Ghiasian, S. E., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation. Composite structures, 106, 225-234.

[136] Ghiasian, S. E., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2015). Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams. European Journal of Mechanics-A/Solids, 54, 232-242.

[137] Tounsi, A., Semmah, A., & Bousahla, A. A. (2013). Thermal buckling behavior of nanobeams using an efficient higher-order nonlocal beam theory. Journal of Nanomechanics and Micromechanics, 3(3), 37-42.

[138] Vosoughi, A. R. (2014). Thermal postbuckling analysis of functionally graded beams. Journal of Thermal Stresses, 37(4), 532-544.

[139] Ebrahimi, F., & Salari, E. (2015). Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments. Composite Structures, 128, 363-380.

[140] She, G. L., Shu, X., & Ren, Y. R. (2017). Thermal buckling and postbuckling analysis of piezoelectric FGM beams based on high-order shear deformation theory. Journal of Thermal Stresses, 40(6), 783-797.

[141] She, G. L., Yuan, F. G., & Ren, Y. R. (2017). Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory. Applied Mathematical Modelling, 47, 340-357.

[142] Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2017). Buckling analysis of smart size-dependent higher order magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nanosize beams. Journal of Mechanics, 33(1), 23-33.

[143] VO, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Inam, F., & Lee, J. (2015). A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams. Composite Structures, 119, 1-12.

[144] Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. Composites Part B: Engineering, 76, 273-285.

[145] Fazzolari, F. A. (2018). Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations. Composites Part B: Engineering, 136, 254-271.

[146] Liu, Y., Su, S., Huang, H., & Liang, Y. (2019). Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane. Composites Part B: Engineering, 168, 236-242.

[147] Al-Shujairi, M., & Mollamahmutoğlu, Ç. (2018). Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich micro-beams resting on elastic foundation by using nonlocal

strain gradient theory in conjunction with higher order shear theories under thermal effect. Composites Part B: Engineering, 154, 292-312.

[148] Lanc, D., VO, T. P., Turkalj, G., & Lee, J. (2015). Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams. Thin-Walled Structures, 86, 148-156.

[149] Nguyen, T. K., Vo, T. P., Nguyen, B. D., & Lee, J. (2016). An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory. Composite Structures, 156, 238-252.

[150] Shafiei, N., & Kazemi, M. (2017). Buckling analysis on the bi-dimensional functionally graded porous tapered nano-/micro-scale beams. Aerospace Science and Technology, 66, 1-11.

[151] Li, X., Li, L., Hu, Y., Ding, Z., & Deng, W. (2017). Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. Composite Structures, 165, 250-265.

[152] Nguyen, T. T., Thang, P. T., & Lee, J. (2017). Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams. Composite structures, 160, 952-963.

[153] Babaei, H., Eslami, M. R., & Khorshidvand, A. R. (2020). Thermal buckling and postbuckling responses of geometrically imperfect FG porous beams based on physical neutral plane. Journal of Thermal Stresses, 43(1), 109-131.

[154] Marzec, I., Bobiński, J., Tejchman, J., & Schönnagel, J. (2021). Finite element analysis on failure of reinforced concrete corner in sewage tank under opening bending moment. Engineering Structures, 228, 111506.

[155] Aria, A. I., Rabczuk, T., & Friswell, M. I. (2019). A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams. European Journal of Mechanics-A/Solids, 77, 103767.

[156] Touloukian, Y. S. (1966). Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. Volume 6. Intermetallics, Cermets, Polymers, and Composite Systems. Part 2. Cermets, Polymers, Composite Systems. Dtic Document.

[157] Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Radwan, A. F. (2014). Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading. International Journal of Applied Mechanics, 6(05), 1450063.

[158] Akbarzadeh, A. H., Abbasi, M., & Eslami, M. R. (2012). Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory. Thin-Walled Structures, 53, 141-155.

[159] Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium. Composites Part B: Engineering, 45(1), 101-110.

[160] Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. Composite Structures, 93(1), 93-102.

[161] Zhang, D. G. (2014). Thermal post-buckling and nonlinear vibration analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. Meccanica, 49, 283-293.

[162] Fazzolari, F. A., & Carrera, E. (2014). Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. Journal of Thermal Stresses, 37(12), 1449-1481.

[163] Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., & Carrera, E. (2013). A thermo-mechanical analysis of functionally graded beams via hierarchical modelling. Composite Structures, 95, 676-690.

[164] El-Megharbel, A. (2016). A theoretical analysis of functionally graded beam under thermal loading. World Journal of Engineering and Technology, 4(3), 437-449.

[165] Sankar, B. V., & Tzeng, J. T. (2002). Thermal stresses in functionally graded beams. AIAA journal, 40(6), 1228-1232.

[166] Thanh, C. L., Nguyen, T. N., Vu, T. H., Khatir, S., & Abdel Wahab, M. (2020). A geometrically nonlinear size-dependent hypothesis for porous functionally graded micro-plate. Engineering with Computers, 1-12.

[167] Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Hoang-Le, M., Sang-To, T., Phan-Vu, P., & Wahab, M. A. (2022). Nonlocal strain gradient IGA numerical solution for static bending, free vibration, and buckling of sigmoid FG sandwich nanoplate. Physica B: Condensed Matter, 631, 413726.

[168] Huang, X., Shan, H., Chu, W., & Chen, Y. (2022). Computational and mathematical simulation for the size-dependent dynamic behavior of the high-order FG nanotubes, including the porosity under the thermal effects. Advances in nano research, 12(1), 101-115.

[169] Azandariani, M. G., Gholami, M., & Nikzad, A. (2022). Eringen's nonlocal theory for non-linear bending analysis of BGF Timoshenko nanobeams. Advances in nano research, 12(1), 37-47.

[170] Polat, A., & Kaya, Y. (2022). Analysis of discontinuous contact problem in two functionally graded layers resting on a rigid plane by using finite element method. Computers and Concrete, 29(4), 247-253.

[171] Shen, H. S. (2002). Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. International Journal of Mechanical Sciences, 44(3), 561-584.

[172] Sator, L., Sladek, V., & Sladek, J. (2018). Bending of FGM plates under thermal load: classical thermoelasticity analysis by a meshless method. Composites Part B: Engineering, 146, 176-188.

[173] Zhang, Z., Yang, Q., & Jin, C. (2022). Axisymmetric vibration analysis of a sandwich porous plate in thermal environment rested on Kerr foundation. Steel and Composite Structures, 43(5), 581.

[174] Daouadji, T. H., & Benferhat, R. (2016). Bending analysis of an imperfect FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading with analytical validation. Advances in Materials Research, 5(1), 035.

[175] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2019). Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory. Journal of Thermal Stresses, 42(2), 213-232.

[176] Zenkour, A. M., & Radwan, A. F. (2019). Hygrothermo-mechanical buckling of FGM plates resting on elastic foundations using a quasi-3D model. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 20(2), 85-98.

[177] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., & Li, L. (2020). Free vibration analysis of FG nanoplate with poriferous imperfection in hygrothermal environment. Structural Engineering and Mechanics, an Int'l Journal, 73(2), 191-207.

[178] Ghumare SM, Sayyad AS (2020) Analytical solutions for the hygro-thermo-mechanical bending of FG beams using a new fifth-order shear and normal deformation theory. Appl Comput Mech.

[179] Vo TP, Thai, HT, Nguyen TK, Inam F, Lee J (2015) Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. Composites Part B Engineering 68:59-74.