الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي - تبسة

Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **Master Académique**

En : Génie Civil

Spécialité : Structures

Par : ABDI Wissal

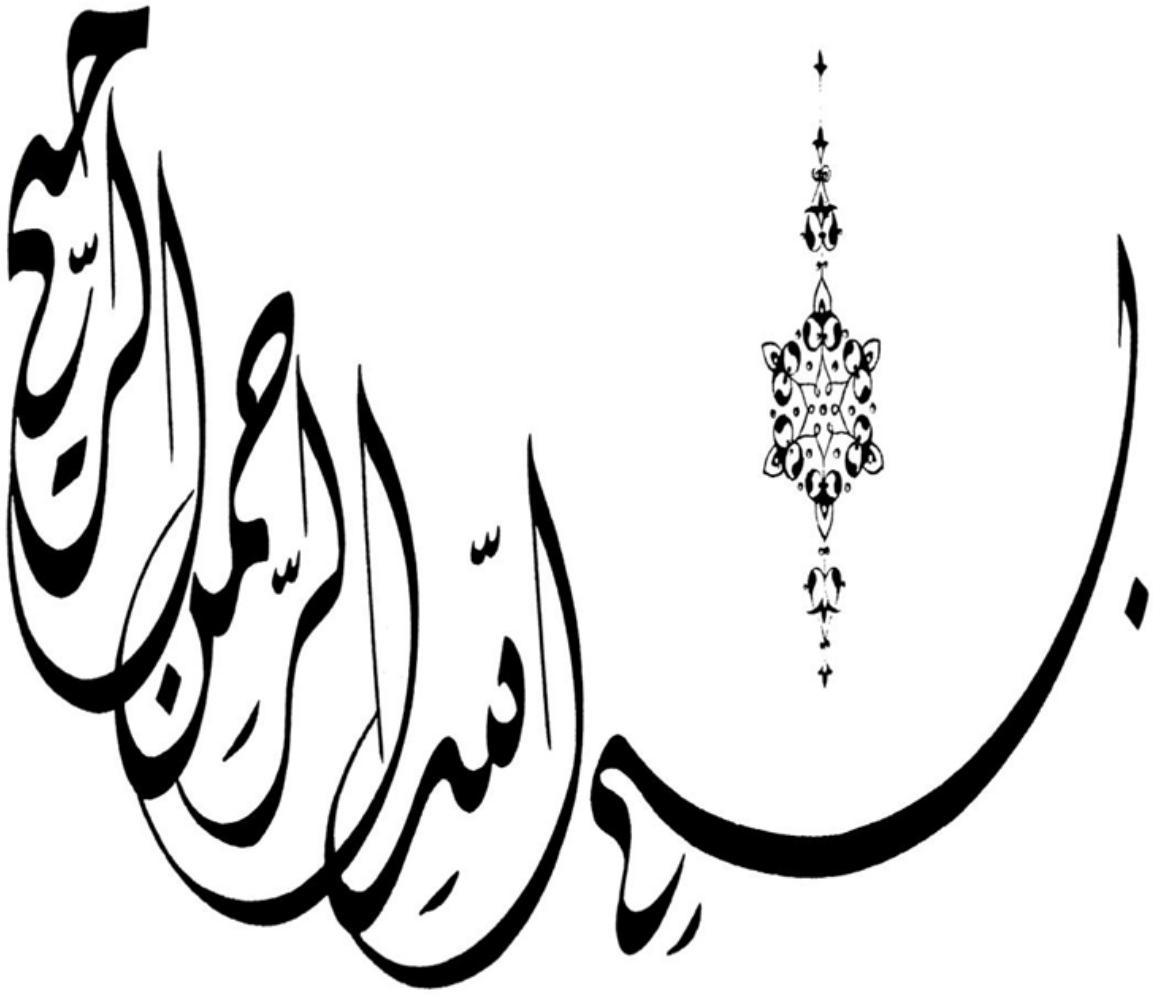
Sujet :

Développement d'un élément fini poutre pour l'analyse statique des poutres FGM

Présenté et soutenu publiquement, le 10 / 06 / 2025 , devant le jury composé de :

Mr. Athamnia Ibrahim	**Maître Assistant A**	**Président**
Mr. Boutagouga djamal	**Professeur**	**Rapporteur**
Mr. Labed abderrahim	**Maître Assistant B**	**Examinateur 1**

Promotion : 2024/2025



Remerciement

Je tiens à remercier le superviseur, Pr BOUTGOUGA Djamel, département de Génie Civil de L'Université Larbi Tébessi– Tébessa, pour ses conseils précieux, sa générosité, son suivi et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de cette période. Je le remercie encore une fois pour sa patience et sa présence, qui m'ont permis d'organiser cette mémoire de manière satisfaisante.

Je souhaite également exprimer ma gratitude aux membres de jury, pour avoir accepté de faire partie du jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Mlle Marwa Tolba, doctorante en génie civil, pour son appui scientifique et ses conseils précieux qui ont contribué positivement à la réalisation de ce travail.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants du Département de Génie Civil de Université Larbi Tébessi – Tébessa – qui a contribué à ma formation.

Dédicace

À ceux qui ont cru en moi depuis le premier jour, à ceux qui ont été la source de ma force, de mon ambition et de mon courage.

À celle qui a veillé et s'est fatiguée pour que j'arrive jusqu'ici,

À la source de tendresse et la compagne de mes prières.

À mon père Lamine et ma mère Rachida,

Merci pour votre amour, vos sacrifices et vos prières silencieuses qui m'ont portée jusqu'à ce moment.

À mon grand-père et ma grand-mère,

Vous êtes la racine de ma sagesse et la tendresse de mon cœur. Que Dieu vous protège et vous bénisse.

À celui dont le soutien m'a nourrie, dont les encouragements ont été ma lumière dans l'obscurité, et qui a été mon compagnon fidèle dans ce parcours,

Mon cher mari, SANAD, ce succès est le fruit de ton patience et de ton amour. Merci du fond du cœur.

À celles qui partagent avec moi le rire et les larmes,

À celles qui sont et resteront une partie de mon âme,

Rania, Chahd, Acil, mes fleurs de vie, les plus précieuses bénédictions que Dieu m'a offertes.

À la joie qui ne s'éteint jamais, mon unique frère, Abdelqayoum, morceau de mon cœur et cadeau de Dieu pour nous.

À la famille bienveillante de mon mari, merci pour votre accueil, votre amour et votre soutien constants.

À celles qui ont été la lumière sur mon chemin, le soutien dans mes journées, et le sourire inoubliable dans ma vie :

Siham, Wissam ,Soulaf, Malek, Manar, Aya, Aziza, Amira, Israe.

Ce succès ne serait pas complet sans vous.

Résumé

Cette mémoire explore le comportement mécanique des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) à travers une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis (MEF). Les FGM, caractérisés par une variation continue de leurs propriétés mécaniques, offrent des avantages significatifs dans des applications où les gradients de température, de rigidité ou de résistance sont critiques. Les objectifs principaux de cette étude sont :

Développement des éléments finis pour les poutres FGM minces (théorie d'Euler-Bernoulli) et épaisses (théorie de Timoshenko), en intégrant l'hétérogénéité matérielle.

Analyse des résultats obtenus pour différentes conditions aux limites, élancement géométrique (L/h), et indice de puissance *n*.

Les résultats montrent que la théorie de Timoshenko est indispensable pour les poutres épaisses (L/h < 20), tandis que la théorie d'Euler-Bernoulli reste valide pour les poutres minces. Les FGM présentent une flexibilité accrue avec l'augmentation de l'indice *n*, reflétant une transition progressive des propriétés céramiques (rigides) vers métalliques (ductiles). Cette étude fournit un cadre robuste pour la conception optimisée de structures FGM dans des domaines tels que l'aérospatial, le génie civil et l'ingénierie mécanique.

Mots-clés : Poutres FGM, Méthode des éléments finis, Théorie d'Euler-Bernoulli, Théorie de Timoshenko, loi de puissance, gradient fonctionnel.

Abstract

This thesis explores the mechanical behavior of beams made of functionally graded materials (FGM) using a numerical approach based on the finite element method (FEM). FGMs, characterized by a continuous variation in their mechanical properties, offer significant advantages in applications where gradients in temperature, stiffness or strength are critical. The main objectives of this study are:

1. Development of finite elements for thin (Euler-Bernoulli theory) and thick (Timoshenko theory) FGM beams, incorporating material heterogeneity.
2. Analysis of the results obtained for different boundary conditions, geometric ratio (L/h), and power index n.

The results show that Timoshenko's theory is indispensable for thick beams (L/h < 20), while Euler-Bernoulli's theory remains valid for thin beams. FGMs exhibit increased flexibility with increasing n-index, reflecting a gradual transition from ceramic (rigid) to metallic (ductile) properties. This study provides a robust framework for the optimized design of FGM structures in fields such as aerospace, civil engineering and mechanical engineering.

Key- words: FGM beams, finite element method, Euler-Bernoulli theory, Timoshenko theory, Power-Law, functionally graded.

ملخص

تستكشف هذه المذكرة السلوك الميكانيكي للعوارض المصنوعة من مواد التدرج الوظيفي (FGM) باستخدام نهج عددي يعتمد على طريقة العناصر المحدودة (FEM). تقدم مواد التدرج الوظيفي، التي تتميز بتباين مستمر في خواصها الميكانيكية، مزايا كبيرة في التطبيقات التي تكون فيها التدرجات في درجة الحرارة أو الصلابة أو القوة حرجة. الأهداف الرئيسية لهذه الدراسة هي:

1. تطوير عناصر محدودة للعوارض الرقيقة (نظرية أويلر-بيرنولي) والسميكة (نظرية تيموشينكو) من نوع FGM، مع دمج عدم تجانس المواد.
2. تحليل النتائج التي تم الحصول عليها لظروف حدودية مختلفة، والنسبة الهندسية (L/h)، ومؤشر القدرة n.

تُظهر النتائج أن نظرية تيموشينكو لا غنى عنها للعوارض السميكة (L/h < 20)، بينما تظل نظرية أويلر-بيرنولي صالحة للعوارض النحيفة. تُظهر عوارض FGMs مرونة متزايدة مع زيادة مؤشر n، مما يعكس الانتقال التدريجي من الخواص الخزفية (الصلبة) إلى الخواص المعدنية (مرنة). توفر هذه الدراسة إطاراً متيناً للتصميم الأمثل لهياكل FGM في مجالات مثل الفضاء والهندسة المدنية والهندسة الميكانيكية.

الكلمات المفتاحية: عوارض مواد التدرج الوظيفي ، طريقة العناصر المحدودة، نظرية أويلر-بيرنولي، نظرية تيموشينكو، القانون الأسي، التدرج الوظيفي.

Table des matières

Résumé……...…I

Abstract ……....II

ملخص…….III

Introduction Générale ……1

Chapitre I: Les matériaux fonctionnellement gradués ……....4

I.1 Introduction……5

I.2 Historique du développement du concept FGM……....6

I.3 Définition et concept d'un matériau à gradient de propriétés 7

I.4 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels : 8

I.5 L'intérêt d'utilisation des FGM 9

I.6 Avantages et inconvénients des Métal et céramique 9

I.6.1 Définition de la céramique 9

I.6.1.1 Les avantages des céramiques 10

I.6.1.2 Les inconvénients des céramiques 10

I.6.2 Définition de métal 11

I.6.2.1 Les avantages de métal 11

I.6.2.2 Les inconvénients de métal 12

I.7 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM 13

I. 8.1 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des matériaux FGM 14

I.8.2 Propriétés des matériaux P-FGM 14

I.8.3 Propriétés des matériaux S-FGM 16

I.8.4 Les propriétés des matériaux E-FGM 17

I.9 Loi de mélange : 18

I.10 Conclusion 19

Chapitre II: La théorie de poutre 20

II.1 Introduction 21

II.2 Historique des théories des poutres 22

II.3 Définition d'une poutre 22

II.4 Avantages et Inconvénients des poutres 22

II.5 Le Rôle de la poutre 24

II.6 Les Types de poutres 24

II.7 La différence entre les poutres minces et les poutres épaisses 26

II.8 Les différentes théories des poutres 26

II.8.1 Théorème d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory - CBT) 27

II.8.2 Théorème de Timoshenko (FSDBT) 30

II.8.3 Théorie d'Ordre Elevé 34

II.9 Conclusion 36

ChapitreIII: Formulation des éléments poutres par la méthode des éléments finis…….37

III.1 Introduction 38

III.2 Méthode des éléments finis 38

III.3 Pourquoi avoir choisi MEF ? 39

III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis 39

III.5 Domaines d'application du MEF : 39

III.6 Avantages et inconvénients de la MEF : 40

III.7 Application de la méthode des éléments finis 41

III.8 Formes classiques d'éléments 42

III.9 Formulation de l'ÉLEMENT fini POUTRE de Bernoulli (poutre mince) : 44

III.9.1 Approximation du champ de déplacement 45

III.9.2 Définir les relations déformation-déplacement et déformation-contrainte..... 47

III.9.3 Expression de la déformation..... 48

III.9.4 L'énergie de déformation de l'élément poutre…… 49

III.10 Formulation de la Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Timoshenko (y compris la déformation transversale du cisaillement)..... 50

III.11 Conclusion..... 54

Chapitre IV: Formulation des éléments poutres FGM Minces et Epaisses par la MEF…… ……..……55

IV.1 Introduction…….56

IV.2 Description du problème…….56

IV.3 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces (poutre de Bernoulli)..56

IV.3.1 Champs de déplacement……..57

IV.3.2 Le champ de déformation……57

IV.3.3 Les contraintes…….57

IV.3.4 Application du principe de EPTM……...58

IV.3.5 Interpolation des déplacements……58

IV.3.6 Evaluation des matrices de rigidité……..61

IV.4 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces et épaisses (poutre de Timoshenko)…….63

IV.4.1 Champs de déplacement……63

IV.4.2 Le champ de déformation……. 64

IV.4.3 Matrice de rigidité de l'élément poutre FGM de Timoshenko……..64

IV.5 Conclusion……67

ChapitreV :Validation et Analyse du comportement statique des poutres FGM……... 68

V.1 Introduction ……...……..69

V.2 Validation numérique…….70

V.3 Conclusion……..89

Conclusion générale …….90

References ……92

Liste des Figures

Figure I. 1 : Gradient d'un matériau FGM en céramique et métal ……8

Figure I. 2 : Distribution des matériaux[1]..... 9

Figure I. 3: Poutre FGM. 15

Figure I. 4 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre P-FGM…...15

Figure I. 5 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre S-FGM…...17

Figure I.6 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre E-FGM……17

Figure I. 7 :Matériau à gradient fonctionnel. 18

Figure II. 1: Poutre sous charge distribuée……...27

Figure II. 2: Déformation d'une poutre en flexion..... 29

Figure II. 3: Cinématique d'Euler Bernoull [22]……...30

Figure II. 4 : Élément de la poutre de Timoshenko montrant une déformation de cisaillement.[23]..... 31

Figure II. 5: Cinématique de Timoshenko[24]..... 33

Figure II. 6 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé[24]…….34

FigureIII.1:Formes classiques d'éléments……43

FigureIII.2 :Elément de poutre mince……...44

Figure III.1 : Elément poutre avec des déplacements, des rotations, des forces, et des moments nodaux positifs……..45

Figure III. 2 : Conventions de signe pour les forces de cisaillement et les moments de flexion……...45

Figure III.3 : segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation ; (C) Angle de rotation de la section transversale ABCD……47

Figure IV.1: Une poutre en FGM.....56

Figure IV. 2: un élément de poutre. 57

FigureV. 1: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM. [31] 70

FigureV. 2: Déplacement transversal le long de la poutre - (S-S)……73

FigureV. 3: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 73

FigureV. 4 : Poutre FGM du avec différentes conditions aux limites. [34] 74

FigureV. 5: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)…….76

FigureV. 6: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 76

FigureV. 7: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F)…….77

Figure V.8 : La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 77

FigureV. 9: Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)……...77

FigureV. 10: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 77

FigureV. 11: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [31] 78

FigureV. 12: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)……...79

FigureV. 13: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 79

FigureV. 14 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [34] 80

FigureV. 15: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)……82

FigureV. 16: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 82

FigureV. 17: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F)……...82

FigureV. 18: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 82

FigureV. 19: Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)……83

FigureV. 20: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 83

FigureV. 21: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)…….85

FigureV. 22: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 85

FigureV. 23: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 86

FigureV. 24 : Déplacement transversal le long de la poutre - (C-F)…….88

FigureV. 25: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 88

FigureV. 26: La variation de la flèche en terme de l'indice (n) 88

Liste des tableaux

Tableau V. 1 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli. 70

Tableau V. 2: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko. 71

Tableau V. 3: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli. 74

Tableau V. 4 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko. 75

Tableau V. 5 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko. 78

Tableau V. 6: flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie. 80

Tableau V. 7: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie. 84

Tableau V. 8: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie. 84

Tableau V. 9: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge concentrée. 86

Tableau V. 10 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge concentrée. 87

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale :

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) représentent une avancée majeure dans les sciences des matériaux, combinant les propriétés de deux matériaux distincts (par exemple, céramique et métal) en une transition continue. Cette caractéristique permet de résoudre des problèmes liés aux concentrations de contraintes et aux incompatibilités thermomécaniques dans les structures composites traditionnelles. Particulièrement, les structures minces et épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM - *Functionally Graded Materials*) occupent une place importante dans les domaines de l'aérospatial, du génie civil et de la mécanique avancée en raison de leurs propriétés mécaniques et thermiques graduellement variables. Ces matériaux, conçus pour optimiser la résistance mécanique et la durabilité, présentent des défis particuliers en modélisation numérique, notamment lorsqu'il s'agit de poutres soumises à des chargements complexes.

La méthode des éléments finis (MEF) s'impose comme un outil puissant pour l'analyse de ces structures, permettant de capturer les effets de cisaillement transversal et les variations graduelles des propriétés matérielles. Cependant, les modèles classiques de poutres (Euler-Bernoulli, Timoshenko) atteignent leurs limites lorsqu'ils sont appliqués aux FGM, en particulier dans le cas des poutres épaisses où les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle deviennent significatifs.

Dans ce contexte, cette mémoire se concentre sur l'analyse des poutres FGM, éléments structurels fondamentaux, en utilisant la méthode des éléments finis (MEF). Les défis incluent la modélisation précise de l'hétérogénéité matérielle et la sélection des théories appropriées (Euler-Bernoulli pour les poutres minces, Timoshenko pour les poutres épaisses). Les objectifs spécifiques sont :

a- Adapter les formulations classiques des poutres aux FGM en intégrant des lois de variation matérielle (puissance, exponentielle, sigmoïde).
b- Implémenter des modèles MEF sous MATLAB pour simuler des cas de charge complexes et valider les résultats avec des références expérimentales et analytiques.

La mémoire est organisée comme suit : après une revue bibliographique (Chapitre 1), nous présenterons les formulations théoriques (Chapitre 2), suivies de la méthodologie des éléments finis (Chapitre 3), développement et implémentation des poutres FGM minces et épaisses (Chapitre 4). Les validations numériques et les applications seront discutées dans le Chapitre 5, avant de conclure par des perspectives de recherche futures.

Chapitre I : Les matériaux fonctionnellement gradués

I. 1 Introduction :

Le développement des composites a permis d'associer les propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une même pièce. Toutefois, l'optimisation locale de ces propriétés par l'assemblage de matériaux durs à la surface de matériaux résistants peut provoquer des problèmes d'interface. Cette transition compositionnelle abrupte peut provoquer une concentration locale de contraintes. La solution consiste à obtenir une transition continue des propriétés souhaitées avec un gradient de composition en utilisant un matériau avec un gradient caractéristique de type « Functionally Graded Material » (FGM).

Les matériaux à gradient fonctionnel (*Functionally Graded Materials*, FGM) représentent une classe avancée de matériaux composites dont les propriétés mécaniques, thermiques et physiques varient graduellement dans une ou plusieurs directions spatiales. Contrairement aux composites stratifiés classiques, où les discontinuités aux interfaces peuvent engendrer des concentrations de contraintes et des défaillances prématurées, les FGM offrent une transition douce entre leurs constituants, améliorant ainsi la durabilité et les performances structurales.

Le matériau FGM est un matériau macroscopiquement non uniforme. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de métal et de céramique. Ces types de matériaux ont reçu beaucoup d'attention ces dernières décennies, car ils permettent de réduire les différences de propriétés des matériaux et les contraintes thermiques.

Initialement développés pour des applications aérospatiales et nucléaires nécessitant une résistance simultanée à des chargements thermiques et mécaniques extrêmes, les FGM sont aujourd'hui utilisés dans divers domaines, notamment le génie civil, l'industrie automobile et les dispositifs biomédicaux. Leur microstructure hétérogène, souvent constituée d'un mélange graduel entre une phase céramique (résistante à la chaleur et à la corrosion) et une phase métallique (ductile et résistante mécaniquement), permet d'optimiser localement les performances en fonction des sollicitations appliquées.

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des connaissances actuelles sur les FGM, en abordant :

1. **La définition et la classification des FGM**, incluant leurs procédés de fabrication.
2. **Les propriétés mécaniques**, avec un focus sur les lois de mélange.
3. **Les applications** et les défis liés à leur modélisation numérique.

Ce cadre théorique servira de base aux développements ultérieurs, notamment pour la formulation des éléments finis de poutres FGM minces et épaisses, qui fera l'objet des chapitres suivants. Une compréhension approfondie des propriétés des FGM est essentielle pour proposer des modèles numériques précis et efficaces, adaptés aux exigences des ingénieurs et chercheurs.

I.2 Historique du développement du concept FGM :

Le concept de matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs japonais en 1984. En 1985, un grand nombre de chercheurs issus d'institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Leur objectif principal était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale.

Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur important frappant la majorité des surfaces exposées à la friction par l'air lors de la rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre, et ce, tout en protégeant l'intérieur contre les surchauffes.

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé « Recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à gradient de propriétés et étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt de ce projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont en effet appelés à travailler à des températures de surface de 1 800 °C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1 300 °C. À cette époque, aucun matériau industriel ne pouvait supporter de telles sollicitations thermomécaniques**.** La conception de tels matériaux nécessite de prendre en compte trois caractéristiques :

- La résistance thermique et la résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.

- La ténacité du matériau à basse température.

- La relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température). À la fin de la première étape (1987-1989), Les chercheurs sont parvenus à fabriquer de petites pièces expérimentales (10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des

températures maximales de 2 000 K (température de surface) et à un gradient de température de 1 000 K.

Dans un deuxième temps (1990-1991), ils ont cherché à produire des pièces de plus grande taille et de formes plus complexes que celles réalisées lors de la première étape. Au cours des années 90, les champs d'application des FGM se sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais aussi pour d'autres applications : biomécanique, technologie de capteur, optique, etc.

I.3 Définition et concept d'un matériau à gradient de propriétés :

Un matériau à gradient de propriétés est un type de matériau composite composé de deux ou plusieurs matériaux ayant des fractions volumiques et des microstructures différentes, mais conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en modifiant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur afin d'obtenir un profil bien défini.

Ces matériaux FGM sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure I.1). Le coté métal est généralement placé dans les zones où les propriétés mécaniques, comme la dureté, nécessitent d'être améliorées, tandis que la céramique, qui présente une faible conductivité et peut résister à des températures plus élevées, est placée dans les zones de grand gradient de température.

La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique :

- La fonction de puissance (P-FGM)

- La fonction sigmoïde (S-FGM)

- La fonction exponentielle (E-FGM)

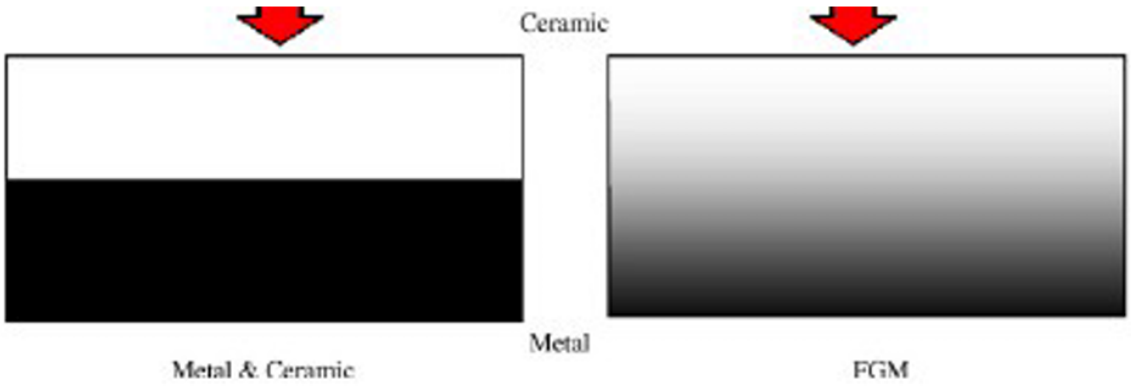


Figure I. 1 : Gradient d'un matériau FGM en céramique et métal.

I.4 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est présenté sur la (figure I.2) : (a) un matériau composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété.

Le matériau relié présente une frontière sur l'interface de deux matériaux, tandis que les FGM présentent d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de celles des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM suscitent un grand intérêt en raison de leurs applications dans les domaines industriels.

Les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent de métal et de céramique présente des caractéristiques de conductivité thermique et de résistance mécanique pour le métal, ainsi que de résistivité aux hautes températures pour la céramique.

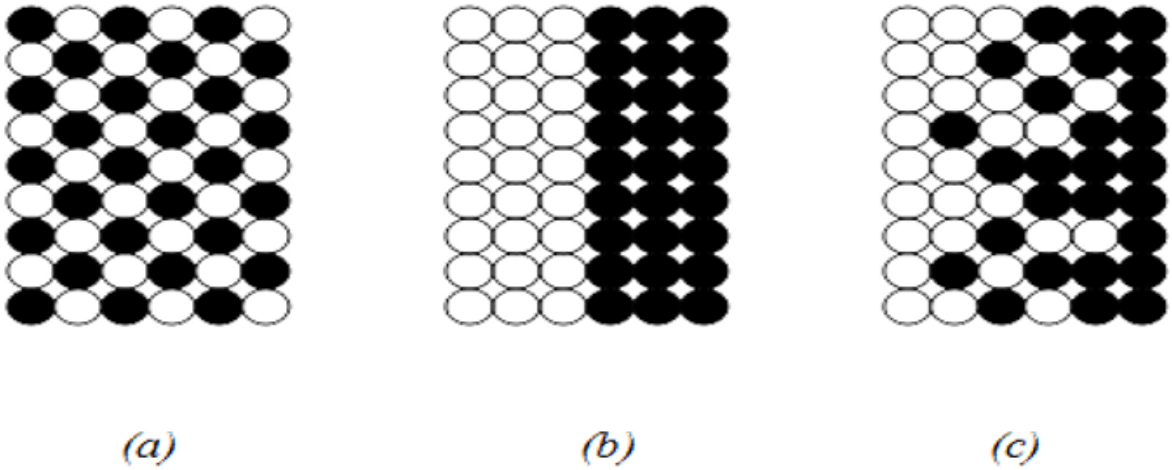


Figure I.2 : Distribution des matériaux. (a) Matériau composé, (b) Matériau relié, (c) Matériau à gradient de propriété [1] .

I.5 L'intérêt d'utilisation des FGM :

Compte tenu de l'intérêt porté à la mise sur pied de structures, les conditions fonctionnelles peuvent varier en fonction des lieux. Dans la plupart des cas, cela impliquera l'utilisation de matériaux différents pour chaque zone de la structure, ce qui donnera lieu à des interfaces discrètes partout. Un certain nombre de technologies de fabrication ont été proposées pour le traitement de la FGM.

Récemment, les concepts de FGM ont suscité l'intérêt des scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.[2]

I.6 Avantages et inconvénients des Métal et céramique :

I.6.1 Définition de la céramique

La céramique est obtenue à partir de terres et de roches broyées. Ces matériaux sont géologiques. Elle est aussi obtenue à partir d'une argile modelée. Cette argile est ensuite cuite sous haute température. Cette transformation est irréversible. Elle fait perdre au matériau sa plasticité. Ainsi, il ne peut plus se réhydrater.

I.6.1.1 Les avantages du céramique [3]

Avantages	Principaux défis
Dureté exceptionnelle	Résistant à l'usure et à l'abrasion
Stabilité thermique	Résiste aux températures élevées sans perdre son intégrité
Isolation électrique	Excellents isolants, propriétés diélectriques adaptées
Inertie chimique	Résistant aux attaques chimiques et à la corrosion
Léger	Rapport résistance/poids élevé
Biocompatibilité	Non réactif avec les tissus biologiques
Propriétés sur mesure	Conçu pour la ténacité, la conductivité thermique/électrique
Limites	Fragilité, difficile à usiner

I.6.1.2 Les inconvénients du céramique

Inconvénients	Principaux défis
Fragilité et faible résistance à la rupture	Susceptible de se fissurer sous l'effet d'une contrainte ; manque de déformation plastique.
Densité et structure uniformes	Il est difficile d'obtenir des grains fins et sans pores ; des températures de frittage élevées sont nécessaires
Coûts de fabrication élevés	Nécessite des techniques avancées comme le pressage à chaud ; la précision augmente les coûts.
Flexibilité de conception limitée	Difficile à usiner ; le post-traitement ajoute du temps et des coûts
Sensibilité aux chocs thermiques	Fissuration due à des changements brusques de température
Assemblage et intégration	Difficile à coller avec les métaux/polymères des techniques spécialisées sont nécessaires.

Préoccupations en matière d'environnement et de santé	Les matériaux toxiques et les processus à haute énergie présentent des risques.
Matières premières limitées	Dépendance à l'égard de matériaux rares ou coûteux comme la zircone.
Limites de performance	Ne convient pas aux applications de haute ténacité ou de résistance aux chocs.
Recherche et développement	Obtenir des propriétés idéales reste un défi.

I.6.2 Définition du métal

Les métaux constituent une vaste calasse de matériaux forment une catégorie d'éléments chimiques caractérisés par leur brillance, leur conductivité électrique et thermique, ainsi que leur malléabilité. Ils jouent un rôle central dans notre quotidien, de la construction et de la fabrication de véhicules à l'électronique et à L'aérospatiale en raison de leurs propriétés physiques et chimiques favorables.

I.6.2.1 Les avantages du métal [4]

Avantages	**Principaux défis**
Originalité et style	La polyvalence du métal, qui permet de créer des formes et des finitions originales, est rendue possible par les différents procédés auxquels il peut être soumis.
Solidité et durabilité	Le métal résiste aux chocs et aux collisions, ce qui garantit une durabilité considérable dans le temps.
Design et couleur	Le métal offre de larges possibilités en termes de formes et de couleurs, ce qui le rend idéal pour créer des designs personnalisés.
Hygiène et propreté	Ce matériau se nettoie facilement, ce qui garantit les meilleures conditions d'hygiène dans l'environnement.
Commodité	Le cycle de remplacement est réduit grâce à sa durabilité.

Durabilité	Le métal recyclé et recyclable est utilisé par Dieffebi.

I.6.2.2 Les inconvénients de métal [5]

Inconvénient	**Principaux défis**
Susceptibilité à la corrosion	Les métaux tels que le fer et l'acier se corrodent dans les environnements humides ou chimiques, ce qui entraîne un affaiblissement de la structure et des coûts de maintenance plus élevés.
Densité élevée	Les métaux tels que le fer et l'acier se corrodent dans les environnements humides ou chimiques, ce qui affaiblit la structure et entraîne des coûts de maintenance plus élevés.
Conductivité thermique	Une conductivité thermique élevée peut conduire à une inefficacité énergétique dans les applications nécessitant une isolation.
Préoccupations environnementales	La déforestation, la pollution et la forte consommation d'énergie sont souvent causées par l'extraction et le traitement des métaux.
Coût	Les métaux peuvent être coûteux, en particulier lorsqu'il est nécessaire d'utiliser des alliages ou des traitements spécialisés.
Conductivité électrique	La conductivité peut présenter des risques pour la sécurité dans les applications où une isolation ou un contrôle de l'électricité statique est nécessaire.
Difficulté d'usinage	Certains métaux, comme le titane, sont difficiles à usiner, ce qui a pour conséquence

	d'augmenter les délais et les coûts de production.
Limites esthétiques	En termes de polyvalence esthétique, les métaux peuvent être moins performants que des matériaux tels que le bois ou les composites.

I.7 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM :

Le concept des matériaux à gradient évalué FGM est applicable à de nombreux domaines tels que les matériaux de construction, les matériaux de conversion d'énergie, l'aéronautique, l'aérospatiale, le nucléaire et les semi-conducteurs. Ces matériaux présentent ainsi deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique.

Actuellement, ils permettent de produire des matériaux légers, résistants et durables. Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil :** ponts à poutre en caisson, cheminées, réservoirs de stockage.
- **Aéronautique :** composants de moteur-fusée, corps d'avions spatiaux.
- **Chimique :** échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie :** outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire :** composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique :** semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique :** fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie :** générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques :** implants, peau artificielle, etc.
- **Produits en général :** matériaux de construction, éléments de voiture, verres de fenêtre.

I.8 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des matériaux FGM :

I.8.1 Propriétés des matériaux P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance de la forme :

$$V(z)=\left(\frac{z-\frac{h}{2}}{h}\right) \qquad \text{(I-1)}$$

Où p est un paramètre du matériau et h l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z)=V(z).\ E_1+[1-V(z)].\ E_2 \qquad \text{(I-2)} \quad [6]$$

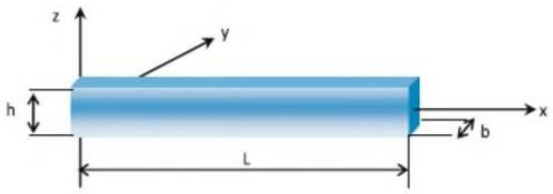


Figure I.3 : Poutre FGM.

Où E_1 et E_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (figure I.4). Il apparaît clairement que le module de Young, par exemple, change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

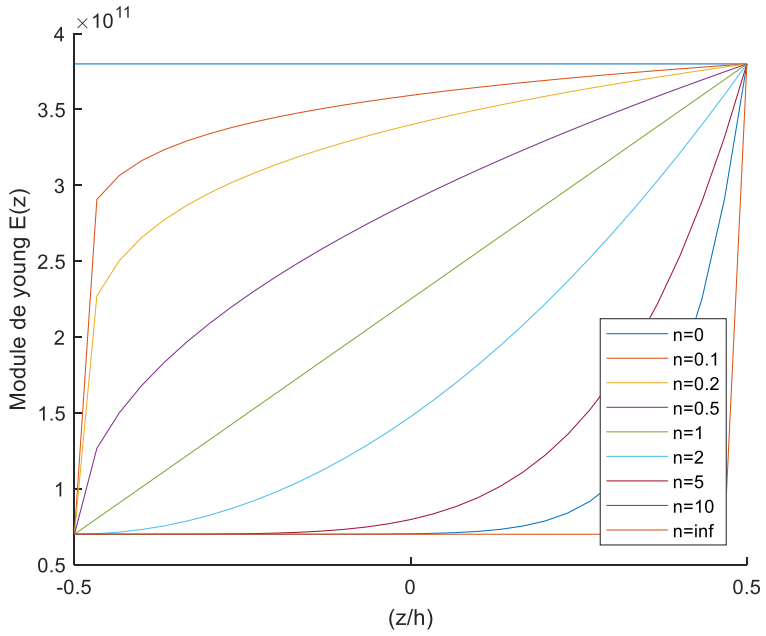


Figure I. 4 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre P-FGM.

I.8.2 Propriétés des matériaux S-FGM

Lorsqu'une poutre P-FGM, dont la fonction de loi de puissance est d'une simple nature, est ajoutée à une poutre composite multicouche, les concentrations de contrainte apparaissent à l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et Chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance afin d'assurer une bonne répartition des contraintes sur toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h}{2}-z}{\frac{h}{2}}\right)^P \qquad pour \qquad 0 \le z \le \frac{h}{2} \qquad (1.4.a)$$

$$V_2(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h}{2}-z}{\frac{h}{2}}\right)^P \qquad pour \qquad -\frac{h}{2} \le z \le 0 \qquad (1.4.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z)=V_1(z).E_1+[1-V_1(z)].E_2 \qquad pour \qquad 0 \le z \le \frac{h}{2} \qquad (1.5.a)$$

$$E(z)=V_2(z).E_1+[1-V_2(z)].E_2 \qquad pour \qquad -\frac{h}{2} \le z \le 0 \qquad (1.5.b)$$

La figure I.5 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.5.a) et (I.5.b) correspond à une distribution sigmoïde, et cette poutre FGM est appelée « poutre S-FGM ». [6]

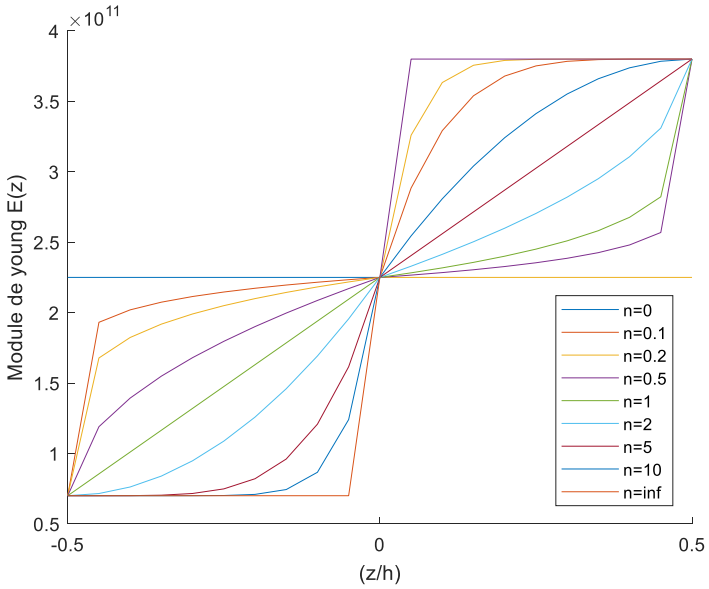


Figure I. 5 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre S-FGM.

I.8.3 Les propriétés des matériaux E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle suivante : [6]

$$E(z)=Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \qquad Avec : A=E_2 \text{ et } B=\frac{1}{h}ln\frac{E_1}{E_2} \qquad (I.6)$$

La variation du module de Young est représentée. Elle se fait à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM. Vous la trouverez dans la (figure I.6).

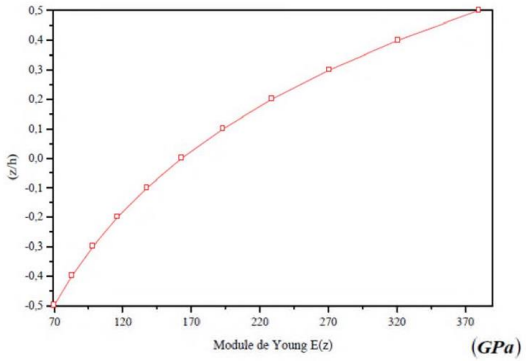


Figure I. 5 : La variation du module de Young le long de l'épaisseur d'une poutre E-FGM.

I.9 Loi de mélange :

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle des FGM fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart de ces approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que sur l'analyse de microstructures réelles. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont couramment utilisés dans la littérature concernant la plupart des modèles analytiques existants (figure I.7a).

On suppose une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) (figure I.7b).

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est également admise, et le FGM est supposé présent avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire une couche quasi-homogène de céramique et de métal (figure I.7a). [7, 8].

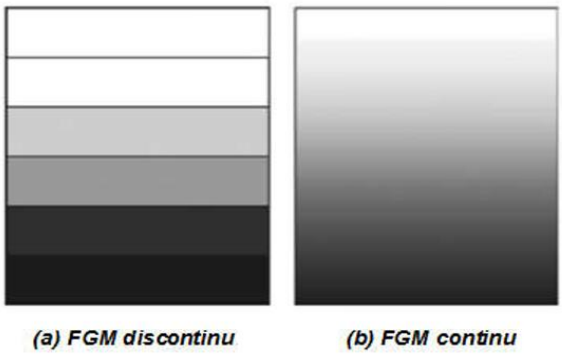


Figure I.5 : Matériau à gradient fonctionnel.

Notons que la porosité dans les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) peut être générée par plusieurs facteurs, notamment les procédés de fabrication, les différences de coefficients de dilatation thermique entre les matériaux constitutifs, et la présence d'impuretés dans les matières premières. De vastes travaux expérimentaux et théoriques ont été entrepris pour relier l'interaction complexe entre la microstructure et les propriétés mécaniques [9, 10 ,11,12,13 ,14 ,15 ,16,17].

I.10 Conclusion :

Ce chapitre a permis d'introduire les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en mettant en lumière leurs caractéristiques fondamentales, leurs domaines d'utilisation, et leur histoire et leur développement. Contrairement aux matériaux composites traditionnels, les FGM offrent une transition progressive de leurs propriétés, éliminant les discontinuités responsables de concentrations de contraintes et améliorant ainsi la durabilité des structures sous sollicitations thermomécaniques sévères.

Les différentes lois de mélange et approches micromécaniques discutées fournissent un cadre théorique essentiel pour la modélisation des propriétés effectives de ces matériaux.

Les applications des FGM dans des secteurs critiques comme l'aérospatial, le génie nucléaire et le biomédical soulignent leur importance technologique. Toutefois, leur modélisation efficace nécessite une prise en compte rigoureuse de l'hétérogénéité graduelle, ce qui influencera directement les développements présentés dans les chapitres suivants.

Dans cette optique, le prochain chapitre s'attachera à établir les modèles théoriques des poutres FGM (minces et épaisses), en intégrant les effets du gradient fonctionnel dans les équations gouvernantes.

CHAPITRE II : LA THEORIE DE POUTRE

II.1 Introduction :

Le terme « poutre » fait référence à un élément dont la longueur est importante en comparaison aux dimensions transversales. Une poutre est un composant structurel fréquemment utilisé dans le génie civil. Toutefois, l'application du modèle des poutres est possible pour une variété de pièces, à condition qu'elles soient conformes à certaines normes.

Les poutres constituent des éléments structuraux fondamentaux en ingénierie, largement utilisés dans diverses applications, des constructions civiles aux systèmes aérospatiaux. Leur modélisation précise est essentielle pour prédire leur comportement sous différentes sollicitations mécaniques et thermiques. Plusieurs théories ont été développées au fil des ans pour décrire le comportement des poutres, chacune avec ses hypothèses et son domaine de validité.

Dans le cas des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), où les propriétés varient continûment dans l'épaisseur ou la longueur, le choix de la théorie des poutres adaptée devient crucial. Les modèles classiques, tels que la théorie d'Euler-Bernoulli (valable pour les poutres minces) et celle de Timoshenko (adaptée aux poutres épaisses en tenant compte du cisaillement transverse), doivent être revisités pour intégrer l'hétérogénéité des FGM. De plus, des théories d'ordre supérieur (comme celles de Reddy ou de Levinson) peuvent être nécessaires pour capturer avec précision les effets de gradients matériels et les déformations complexes.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une analyse critique des principales théories des poutres, en mettant l'accent sur leurs formulations mathématiques, leurs hypothèses fondamentales et leurs limites, notamment dans le contexte des FGM. Nous examinerons:

1. **La théorie classique d'Euler-Bernoulli** et son application aux poutres minces.
2. **La théorie de Timoshenko**, qui inclut les effets de cisaillement transverse pour les poutres épaisses.
3. **Les théories d'ordre supérieur**, qui améliorent la précision dans la modélisation des poutres FGM.

Ce cadre théorique servira de base au développement, dans les chapitres suivants, des éléments finis adaptés aux poutres FGM minces et épaisses.

II.2 Historique de la théorie des poutres :

Galilée est généralement crédité de la théorie des poutres, cependant, des recherches récentes suggèrent que Léonard De Vinci l'aurait avancé. De Vinci avait présumé que la déformation changeait de façon linéaire lorsqu'on s'éloignait de la surface neutre, cependant, il n'a pas réussi à finaliser ses calcule car il ignore la loi de Hooke. Quant à Galilée, il avait fondé son hypothèse sur une supposition erronée (il pensait que la contrainte était distribuée de manière uniforme en flexion), c'est Antoine Parent qui a établi la répartition exacte.

Leonard Euler et Jacques Bernoulli ont formulé la première théorie applicable vers les années 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le petit-neveu de ce dernier, a fait l'équation différentielle pour l'étude des vibrations. À cette époque, le génie civil n'était pas encore établi comme une discipline distincte. Identifié comme une discipline scientifique, on ne croyait cependant pas que les recherches de l'académie des mathématiques pouvaient avoir des applications concrètes. On persista donc à construire les ponts et les édifices de manière empirique. C'est seulement au XIXe siècle, grâce à des constructions comme la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on a pu prouver la validité de cette théorie à grande échelle [18].

II.3 Définition d'une poutre :

Une poutre est un élément de structure horizontal ou en pente utilisé dans la construction de structure pour supporter des charges verticales. Les poutres sont généralement en bois, acier, béton armé ou matériaux avancés, et trouver une utilisation étendue dans la construction de bâtiments, ponts, structures Génie civil et autres constructions [19].

II.4 Avantages et Inconvénients des poutres :

Les poutres possèdent une liste d'avantages et d'inconvénients en fonction de leur application :

▶ Avantages

- Résistance structurelle : Les poutres sont conçues pour supporter des charges lourdes et répartir le poids de manière efficace. Cela les rend idéales pour les structures de construction.
- Souplesse de conception : Ils peuvent être fabriqués dans différentes formes et tailles pour s'adapter à divers types des bâtiments et les styles architecturaux.
- Durabilité : Faites de matériaux tels que le bois, l'acier ou le béton, les poutres sont généralement Ils préfèrent choisi en raison de leur durabilité et la résistance aux

éléments et le temps. Les poutres sont utilisées pour soutenir les toits et les planchers des bâtiments, fournissant une structure stable et solide.

- Économies : En utilisant des poutres, les constructeurs peuvent réduire le besoin de supports supplémentaires, ce qui peut réduire les coûts de construction.
- Facilité d'installation : Ils peuvent être assez faciles à installer, surtout s'ils sont préfabriqués ou préfabriqués.

▶ **Inconvénients**

- Poids : Les poutres sont souvent très lourdes, un facteur important à prendre en compte lors de l'installation.
- Encombrement : Dans certains cas, les poutres peuvent occuper plus d'espace que d'autres options de construction, ce qui peut restreindre la conception de l'espace.
- Résistance aux intempéries : Les quelques poutres en bois sont susceptibles d'être fragiles aux intempéries et à la pourriture et nécessiteront une protection et un entretien spécifique.
- Coût initial : Bien qu'ils soient souvent bon marché à long terme, les coûts de fabrication et d'installation initiale de ces poutres peuvent être relativement élevés, en particulier pour les matériaux de haute qualité.
- Besoin de support : Dans certains cas, les poutres peuvent bénéficier d'un soutien supplémentaire pour soutenir leur intégrité structurelle, ce qui peut ajouter de la complexité et des coûts de construction. Globalement, les poutres jouent un rôle fondamental dans la construction en fournissant résistance, flexibilité et durabilité

II.5 Le Rôle de la poutre :

Les objectifs de la conception et de l'utilisation d'une poutre dépendent du contexte dans lequel elle est utilisée, mais en général, voici quelques-uns des objectifs principaux :

- support de charge : les poutres sont souvent employées pour des charges, qu'il s'agisse des bâtiments, des ponts, des structures industrielles, etc.

- Distribution des charges : les poutres favorisent la répartition égale des charges sur une plus vaste surface et réduisent ainsi les contraintes et les risques de déformation excessive.

- rigidité structurelle : les poutres appuient leur rigidité et leur stabilité sur la structure en se déchargeant des forces appliquées et en réduisant au minimum les déformations indésirables.

- économie de matériaux : le design efficace des poutres permet d'utiliser le moins de matériau possible pour des performances optimales.

- durabilité : les poutres sont conçues pour supporter les charges et les contraintes environnementales de manière prolongée, contribuant ainsi à la durabilité globale de la structure.

- facilité de construction : elles doivent être conçues pour être fabriquées, transportées et installées efficacement sur le chantier, tout en répondant aux normes de sécurité et de qualité. Selon l'application spécifique, la résistance au feu, la résistance aux séismes, etc. [19]

II.6 Les Types de poutres :

Les poutres peuvent généralement être classées comme suit :

●Les poutre en acier : Utilisés dans les grands bâtiments, les bâtiments commerces et industriels. Les poutres en acier ont une résistance et durabilité inégalées et supporter des charges fortes.

●Les poutre en béton armé : Très couramment utilisés dans les bâtiments d'habitation et commerciaux. Il est caractérisé par une résistance forte et résistance aux influences environnementales et facteurs extérieurs.

● Les poutre en bois : Sont utilisées en bâtiments d'habitation et bâtiments légères. Le bois est malgré tout résistant, malléable et renouvelable facilement.

● Les poutre en acier inoxydable : Utilisées en applications où les matériaux sont exposés à la corrosion, comme aux environnements côtiers ou l'industrie chimique.

●Les poutre épaisse en acier : Sont employées dans les bâtiments industriels et des grandes constructions commerciales. Ces poutres sont caractérisées par leur grande résistance ainsi que la capacité de résister aux fortes pressions.

● **Les poutres épaisses en bois** : Utilisées dans les bâtiments de nature traditionnelle ou rustique, et parfois dans des grosses structures en bois comme les bâtiments industriels légers. Il se reconnaît par sa longévité, son apparence et par sa capacité de supporter de fortes charges.

● **Les poutres épaisses en béton armé** : Ce sont des poutres définies par une largeur plus grande que leur hauteur. Ces poutres sont utilisées dans des applications qui nécessitent une forte distribution des charges et un support rigide pour les autres composants de la

structure. Les poutres épaisses sont favorisées dans les structures qui nécessitent une résistance à la flexion importante [20].

● **Les poutres composites** : L'analyse d'une structure composite est plus compliquée que celle d'une structure en matériaux conventionnels, tels que les métaux par exemple. C'est attribué à l'anisotropie marquée des caractéristiques mécaniques du matériau initial, tant en termes de rigidité [21].
qui sont centrées sur l'orientation des fibres et qui résistent. Le développement d'une étude sur le comportement des poutres est crucial, d'un côté pour l'utilisation des poutres en tant que composants fondamentaux dans la construction des structures, de l'autre pour la détermination des caractéristiques mécaniques des matériaux composites. Ceci est réalisé à travers diverses expérimentations réalisées sur des échantillons de poutres.

● **Les poutre en FGM :** Un matériau à gradient de propriétés est un type de matériau composite composé de deux ou plusieurs matériaux ayant des fractions volumiques et des microstructures différentes, mais conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en modifiant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur afin d'obtenir un profil bien défini.

II.7 La différence entre les poutres minces et les poutres épaisses :

● **Dimensions et conception**

- **Poutres minces :** Se définissent par un rapport plus largeur/ hauteur (L/h) comme suit :

$L/h > 20$.

- **Poutres épaisses :** Se définissent par un rapport largeur/ hauteur (L/h) comme suit :

$4 \leq L/h \leq 20$.

● **Applications :**

Les poutres sont conçues pour résister à des charges transversales ponctuelles et réparties. Ils présentent une forte résistance aux flexions et minimisent les déformations de flexion efficacement.
- **poutres minces :** utilisées d'habitude dans les immeubles qui doivent acquérir en espace vertical ou diminuer la courbure.
-**Poutres épaisses :** employées dans les immeubles industriels, les entrepôts et les

installations demandant un grand épanouissement des charges sur des grands plans.[20]

●Matériaux et coût :

- poutres minces : normalement en composants des matériels plus résistants et coûteux de par des besoins élaborés des composantes imaginables et des ingénieries.

-Poutres épaisses : ils peuvent être faits d'une variété élevée de matériels. Ils comportent le béton et le fer et sont ordinairement moins coûteux.

II.8 Les différentes théories des poutres :

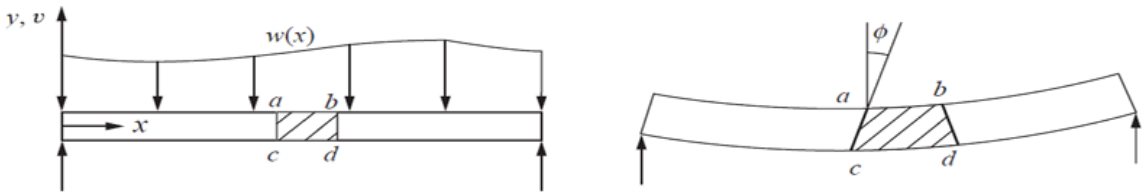
La théorie des poutres est applicable aux solides élancés (généralement, les prismes dont la longueur est dix fois la plus grande dimension transversale). Dans les cas où il n'est pas possible de déterminer la solution précise pour les champs de contrainte et de déformation, elle Cela permet d'obtenir une solution approximative, qui fournit une idée générale sur les efforts et les déplacements.

II.8.1Théorème d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory - CBT)

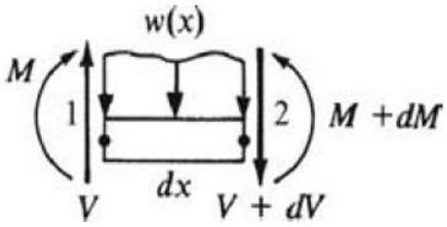
L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la poutre et la flèche est due au moment fléchissant. L'équation différentielle régissant le comportement élastique linéaire de la poutre est basée sur :

- Au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne.

- les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).



(a) poutre non déformée sous charge w (x) (b) poutre déformée en raison du chargement appliqué



(c) élément différentiel de poutre.

Figure II.1 : Poutre sous charge distribuée.

L'hypothèse de Bernoulli n'est pas valable pour les poutres courtes, car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne. Ceci est illustré dans la (figure II.4), où un plan par la ligne verticale a-c (figure II.4 (a)) est perpendiculaire à l'axe longitudinal *x* avant la flexion, et ce même plan par a-c (tournant à travers l'angle θ dans la figure II.4 (b)) reste perpendiculaire à l'axe x courbé après la flexion. Cela ne se produit en pratique que lorsqu'un moment constant existe dans la poutre.

L'équation différentielle est dérivée comme suit:

Considérons la poutre représentée sur la (figure II.4) soumises à un chargement distribué w(x) (force / longueur). D'après l'équilibre de la force et du moment d'un élément différentiel de la poutre, montré à la (figure II.4 (c)), nous avons :

$$\sum Fy = 0 : V-(V+dV) - x(x)dx = 0 \qquad (\text{II.1.1a})$$

En simplifiant l'équation (II.1.1a), on obtient

$$-wdx-dV=0 \quad ou \quad w=-\frac{dV}{dx} \qquad (\text{II.1.1b})$$

$$\sum M2 = 0 : \; -vdx+dM+w(x)dx\frac{dX}{2}=0 \; ou \; V=\frac{dM}{dx} \qquad (\text{II.1.1c}).$$

La forme finale de l'équation (II.1.1(c)), reliant la force de cisaillement au moment de flexion, est obtenue en divisant l'équation gauche par dx puis en prenant la limite de l'équation lorsque dx= 0. Le terme w(x) disparaît alors.

En outre, la courbure κ de la poutre est liée au moment par

$$k=\frac{1}{\rho}+\frac{M}{EI} \qquad (\text{II.1.1d})$$

ρ est le rayon de courbure comme indiqué dans la figure II-5 b, *v* est la fonction de déplacement transversal dans la direction y (voir figure II-5(a)), E est le module d'élasticité et *I* est le moment d'inertie suivront l'axe *z* (ou l'axe z soit perpendiculaire aux axes x et y). ($I = bh^3/12$ pour une section transversale rectangulaire base *b* et de la hauteur *h* indiquée sur la (figure II-5 (c))

La courbure pour petites rotations $\theta = dv/dx$ est :

$$K=\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{(II.1.1e)}$$

En remplaçant l'équation (II.1.1e) dans (II.1.1d), nous obtenons

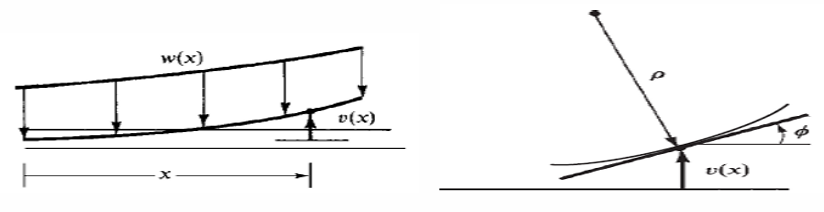
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(II.1.1f)}$$

On résoudra l'équation (II.1.1f) pour M et en remplaçant ce résultat en (II.1.1c) et (II.1.1b), on obtient

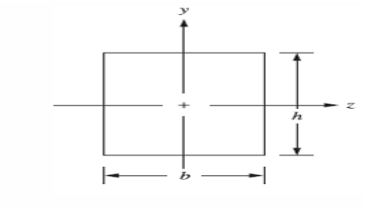
$$\frac{d^2}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}=-w(x) \qquad \text{(II.1.1g)}$$

Pour *EI* constante et seulement des forces et des moments nodaux, l'équation (II.1.1g) devient

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0 \qquad \text{(II.1.1h)}$$



a) Partie de courbure de la poutre b) Rayon de courbure à v(x)



C) Section rectangulaire

Figure II.2 : Déformation d'une poutre en flexion.

On sait bien que la théorie d'Euler-Bernoulli repose sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne prennent pas en compte les effets de la déformation par cisaillement. On sait aussi qu'elle ne s'applique qu'aux poutres de faible épaisseur/longueur. Avec cette méthode, le nombre d'équations n'est pas lié au nombre de couches, car la poutre multicouche est homogénéisée et donc traitée comme une seule couche. Cette théorie repose sur l'hypothèse que les déformations liées au cisaillement transversal sont ignorées (absence de cisaillement sur la hauteur de la poutre). La section se maintient perpendiculairement à la ligne centrale de la poutre et reste plane.

Selon la théorie classique des poutres et pour les poutres élancées, le déplacement d'un point M est déterminé par les deux éléments suivants :

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z.{w_x}^0(z) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \qquad \text{(II.2.1)}$$

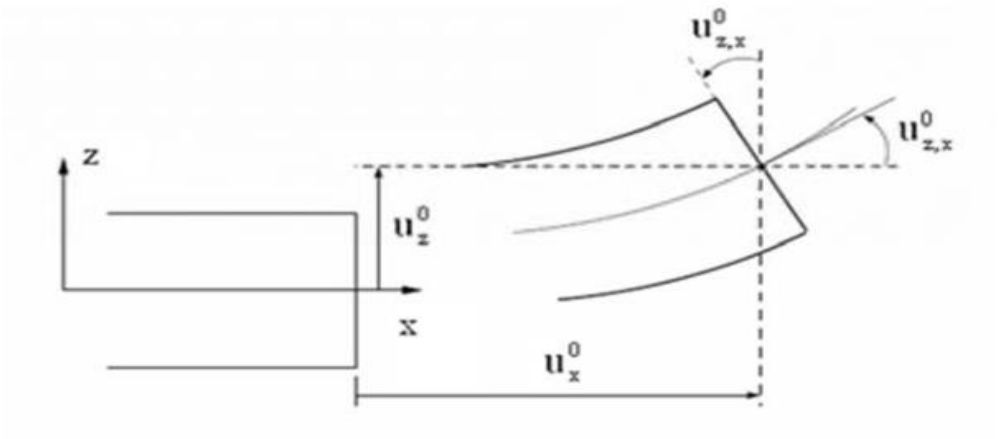


Figure II. 3 : Cinématique d'Euler Bernoulli **[22].**

U (x, z) : C'est le déplacement suivant *X* et *W (x, z)* est le déplacement dans la direction de *Z* ou bien la flèche.

$$\theta = \frac{d^2w}{dx^2} \qquad \text{(II.2.2)}$$

II.8.2 Théorème de Timoshenko (FSDBT)

Théorème de Timoshenko s'applique pour des poutres courtes, il s'appuie sur le principe ; que la section plane reste plane mais n'est pas perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.7).

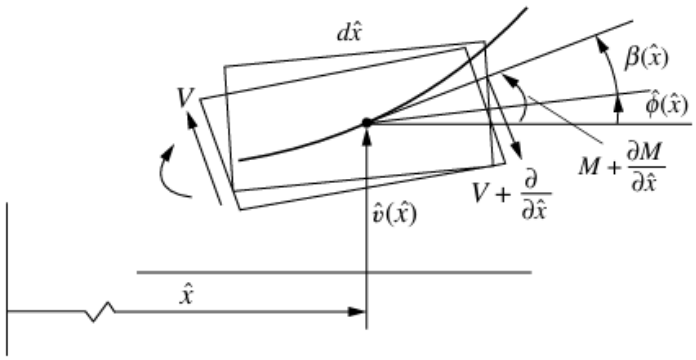


Figure II. 4 : Élément de la poutre de Timoshenko montrant une déformation de cisaillement **[23].**

La théorie de la poutre avec déformation due au cisaillement est dérivée comme suit : la déformation par cisaillement (déformation due à la force du cisaillement *V*) est incluse. En se référant aux figures 4-6, on observe une section d'une poutre de longueur différentielle dx avec une section transversale supposée rester plane mais non plus perpendiculaire à l'axe neutre (axe *x*) en raison de l'inclusion de la force de cisaillement entraînant une rotation indiquée par le terme *b*. La courbure totale de la poutre dans un point *x* est composée de deux parties, l'une provoquée par la flexion et l'autre par la force de cisaillement, de sorte que la rotation de la courbure au point *x* est donnée par :

$$\frac{dv}{dx}=\theta(x)+\beta(x) \qquad \text{(II.3.1a)}$$

La rotation due au moment de flexion et à la force transversale de cisaillement est donnée par les fonctions $\theta(x)$ et $\beta(x)$.

Nous supposons que la courbure est linéaire et que la pente (courbure angulaire) est très faible.

La relation entre le moment de flexion et la déformation de flexion (courbure) est la suivante :

$$M(x)=EI\frac{d\theta(x)}{dx} \qquad \text{(II.3.1b)}$$

La relation entre la force de cisaillement et la déformation due à ce même cisaillement est donnée par :

$$V(x)=k_s AG\beta(x) \qquad \text{(II.3.1c)}$$

La différence entre *dv/dx* et θ représente la déformation du cisaillement γ_{zy} *(= β)* de la poutre.

$$\gamma_{zy}=\frac{dv}{dx}= -\theta \qquad \text{(II.3.1d)}$$

Soit l'élément différentiel de la (figure II-4 (c)) et les équations correspondantes. (II.1.1(b)) et (II.1.1(c)) obtenues en sommant les forces transversales, puis en additionnant les moments de flexion. Nous remplaçons maintenant l'équation (II.3.1(c)) pour V et l'équation (II.3.1(b)) pour M dans les équations. (II.1.1(b)) et (II.1.1(c)) avec β de l'équation (II.3.1(a)) pour obtenir les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dx} k_s AG\beta(x) \frac{dv}{dx}-\theta =-w \qquad \text{(II.3.1e)}$$

$$\frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + k_s AG\beta \frac{dv}{dx}-\theta =0 \qquad \text{(II.3.1f)}$$

La théorie de Timoshenko est plus générale et plus riche que la théorie classique des poutres. Pour des poutres épaisses, les solutions de la théorie classique sont entachées d'erreurs au voisinage de supports et de zone de concentrations de contrainte.
C'est une conséquence du cisaillement transversal, découverte par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élan faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée.

Les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z.{w_x}^0(z) + z.{\gamma^0}_{xz}(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \qquad \text{(II.4)}$$

${\gamma^0}_{xz}$:C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$${\gamma^0}_{xz}(x)= {w_x}^0(x) - \phi^o(x) \qquad \text{(II.5)}$$

$\phi^o(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

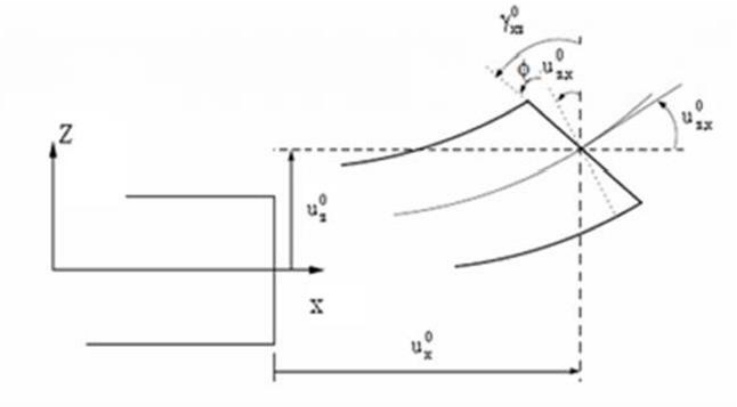


Figure II.5 : Cinématique de Timoshenko **[24].**

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma^0{}_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=-\,w_x{}^0(x)+\gamma^0{}_{xz}(x)+\,w_x{}^0(x) \qquad \text{(II.6)}$$

$$\gamma^0{}_{xz}=\gamma^0{}_{xz}(x) \qquad \text{(II.7)}$$

La contrainte de cisaillement est égale à :

$$\tau_{xz}=G_{XZ}.\gamma_{xz}=G_{XZ}\,.\,\gamma^0{}_{xz} \qquad \text{(II.8)}$$

G_{XZ}: *est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.*

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela signifie qu'elles existent même sur ses bords supérieurs et inférieurs, alors qu'il n'y a pourtant aucun chargement induisant le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients permettant de corriger et de maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour différentes sections de poutres par Mindlin et Deresiewicz. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre.

La non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction de coefficients de correction du cisaillement ont incité d'autres chercheurs à chercher une autre théorie pouvant prendre en compte ces facteurs : c'est la « théorie d'ordre élevé ».[25]

II.8.3Théorie d'Ordre Elevé

Selon cette théorie, la distribution des champs de déplacement présente une non-linéarité en fonction de l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre car elle

intègre une fonction prenant en compte le phénomène de « gauchissement ». Ce phénomène se manifeste lorsque la section transversale de la poutre devient non plane (figure II.9). La fonction $\Psi(z)$ illustre le biais, tandis que sa dérivée $\Psi'(z)$ dénote le cisaillement.

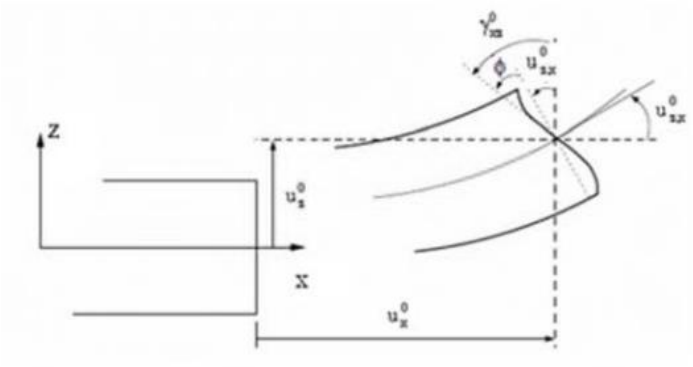


Figure II.6 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé **[24].**

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(m)=\begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - zw^0,x(x) + \ (z)\gamma xz^0(x) \\ u(x,z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{(II.9)}$$

$$\gamma_{xz}(x)=\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=-w_x^0(x)+\Psi'(z)\gamma_{xz}^0(x)+w_x^0(x) \quad \text{(II.10)}$$

$$\gamma_{xz}(x)=\Psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad \text{(II.11)}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles aux extrémités de la poutre, on doit avoir :

$$\Psi'(z)|Z=\pm h/2=0 \quad \text{(II.12)}$$

C'est cette condition qui permet d'obtenir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre, et de choisir correctement les fonctions cubiques répondant à cette condition.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, plusieurs modèles sont présentés dans la littérature sur les poutres en FGM :

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

$$\Psi(z)=0 \quad \text{(II.13)}$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT) :

$$\Psi(z)=z \qquad \text{(II.14)}$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [25] :

$$\Psi(z)= z\ (1-\frac{4z^2}{3h^2}) \qquad \text{(II.15)}$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) :

$$\Psi(z) =ze^{-2(\frac{z}{h})^2} \qquad \text{(II.16)}$$

5-) Le modèle trigonométrique :

$$\Psi(z) =\frac{h}{\pi} sin\, \frac{\pi z}{h} \qquad \text{(II.17)}$$

h : est l'épaisseur de la poutre.

II.9 Conclusion :

Ce chapitre a permis de passer en revue les principales théories des poutres, depuis les modèles les plus simples (Euler-Bernoulli) jusqu'aux formulations plus avancées (Timoshenko et théories d'ordre supérieur), en soulignant leurs hypothèses, leurs avantages et leurs limites.

La théorie d'Euler-Bernoulli, bien que simple et efficace pour les poutres minces, néglige les effets de cisaillement, ce qui la rend inadaptée aux poutres épaisses ou aux structures soumises à des chargements complexes. La théorie de Timoshenko, en revanche, intègre ces effets et offre une meilleure précision pour les poutres épaisses. Les théories d'ordre supérieur, bien que plus complexes, permettent une modélisation plus fine des contraintes et déformations, ce qui peut s'avérer indispensable pour certains cas de chargement ou pour des géométries particulières.

Les enseignements tirés de ce chapitre guideront les développements ultérieurs, notamment la formulation des éléments finis adaptés aux poutres FGM. Le choix de la théorie appropriée dépendra des conditions aux limites, des rapports d'élancement et des propriétés matérielles graduelles. Dans le prochain chapitre, nous aborderons la méthode des éléments finis appliquée aux poutres FGM, en nous appuyant sur les modèles théoriques présentés ici pour établir des formulations robustes et précises.

CHAPITRE III : Formulation des éléments poutres par la méthode des éléments finis

III.1 Introduction :

La méthode des éléments finis (MEF) s'est imposée comme un outil numérique incontournable pour l'analyse des structures, offrant une grande flexibilité dans la modélisation de géométries, chargements, et comportements complexes. Dans le contexte des poutres, qu'elles soient minces ou épaisses, isotropes ou à gradient fonctionnel (FGM), la MEF permet de résoudre efficacement les problèmes de mécanique des structures en discrétisant le domaine continu en éléments finis interconnectés.

Ce chapitre présente la formulation des éléments poutres dans le cadre de la MEF, en considérant des matériaux isotropes classiques. Pour les poutres isotropes, les formulations standards basées sur les théories d'Euler-Bernoulli (poutres minces) et de Timoshenko (poutres épaisses) sont bien établies.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. Présenter la formulation générale des éléments poutres dans le cadre de la MEF, en incluant les matrices de rigidité pour les modèles minces et épais.
2. Aborder les aspects pratiques d'implémentation, tels que l'intégration et l'assemblage des matrices globales.

Ce chapitre servira de base pour les développements numériques présentés dans le chapitre suivant, où des études de cas permettront de valider les formulations proposées.

III.2 Méthode des éléments finis :

Les éléments finis apparu aux années 60, quand on avait besoin d'obtenir des méthodes capables de résoudre problèmes de calcul et de mathématiques complexes, et plus précisément dans les domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'astronomie.

Les éléments finis émergèrent au fil des temps avec les progrès des mathématiques et de l'informatique. Il s'évolua ensuite pour s'appliquer à des champs plus larges tels que la conception technique et la recherche scientifique, et est maintenant un élément intégrant plusieurs applications technologiques et techniques tels que la conception de structure, l'analyse de transfert de chaleur, les prévisions météorologiques, etc.

Les logiciels et logiciels informatiques ont mieux évolué pour rendre plus facile l'utilisation d'éléments finis, aboutissant à des applications plus vastes et plus complexes, comme la

modélisation et la simulation dans les plusieurs domaines comme le génie civil et mécanique, la thermodynamique, la dynamique des fluides, etc.

III.3 Pourquoi avoir choisi MEF ?

Les Procédés de calcul et le Principe d'analysé sont fondés sur le calcul manuel, l'expérience ou le calcul automatisé et la simulation informatique.

La méthode de simulation informatique la plus répandue parmi les ingénieurs est nommée MEF, Il s'AGIT D'une méthode à prédominance numérique dans laquelle les équations gouvernantes (systèmes d'équations différentielles) sont différentielles Formulés en forme matricielle, ce qui convient très bien aux solveurs informatiques automatiques.

Il est inclus dans toutes les applications logicielles commerciales pour calculer les structures d'interface utilisateur graphique (GUI).

III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une technique analytique utilisée en génie des structures et pour résoudre des problèmes liés à l'analyse globale des structures. La méthode est basée sur la division de la structure en petits éléments de taille limitée, puis sur le calcul des effets et des interactions au sein de chaque élément et sur les limites entre les éléments. Cette approche permet d'estimer le comportement général de la structure et d'analyser les effets qui peuvent lui être appliqués du fait de forces extérieures ou de conditions aux limites**.**

III.5 Domaines d'application du MEF :

Les trois Principes principaux Domaines d'application du MEF sont :

- Problèmes d'équilibre et de statistiques : où le comportement du système ne changement pas avec le temps.
- Problèmes de dynamique et de stabilité : ils sont des Développements de problèmes d'équilibre où sont calculées des valeurs spécifiques ou critiques de paramètres spécifiques.
- Problèmes de propagation : ils sont des problèmes dans des phénomènes dont le comportement dépend d'une facture temporelle. [26]

II.6 Avantages et inconvénients de la MEF :

Dans le génie civil, les éléments finis est une technique d'analyser appliquée à l'étude du Comportement des structures et systèmes d'ingénierie complexes.

-- Les avantages des éléments finis dans ce sont :

● Assurer la précision :

Les éléments finis permettent d'analyser les structures peut être décomposé en petits éléments pour
les Déformations et les Forces sont calculés de manière spécifique.

● Économisez l'efficacité des calculs :

Les éléments finis peuvent être utilisés pour calculer efficacement les Déformations et les effets de charger dans des structures complexes, économisant ainsi du temps et des efforts dans le processus d'analyser.

● Fournir des informations détaillées sur les déformations :

Les éléments finis peuvent fournir des informations détaillées sur les déformations des structures, ce qui permet de comprendre leur comportement et d'améliorer leur conception.

● Permettre l'analyse de structures complexes :

Les éléments finis permettent l'analyse de structures complexes qui sont traditionnellement difficiles à analyser, ce qui aide à concevoir des structures plus efficaces et plus sûres.
● Offre la possibilité d'améliorer la conception :

En analysant les structures à l'aide d'éléments finis, la conception peut être continuellement dusse ment améliorée en donnant des Renseignements sur les performances, les déformations et les contraintes [27].

-- Les inconvénients des éléments finis en cette occurrence sont :

● Dépendance des résultats en fonction de la Maillage :

Les résultats peuvent être sensibles à la partition du maillage, ce qui obliger une attention Particulière verser l'analyse du maillage et à la sélection de la taille des éléments.
● Coût en temps et en effort :

La préparation et Analyse d'un modèle peuvent consommer beaucoup de temps et d'Efforts particulièrement verser des Systèmes compliqués.

● Estimation des erreurs :

Il SE peut que l'estimation de l'exactitude du résultat soit difficile, en particulier dans

des Situations où le modèle est extrêmement compliqué.

● **Sensibilité aux conditions aux limites :**

Les conditions Données aux limites peuvent exercer ONU rôle signification sur les résultats.

● Nécessité de vérificatif des résultats :

Les résultats résultant de l'analysé par éléments finis peuvent nécessiter une vérification par des tests expérimentaux.

En résumé, les éléments finis du génie civil fournissent des outils puissants pour analyser et concevoir des structures de manière précise et efficace, aidant ainsi à développer des projets d'ingénierie sûrs et durables.

II.7 Application de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est basée sur le décomposé du domaine physique à prendre en considération en plusieurs sous domaines appelés éléments finis, Ne pas les tailles sont non infinitésimales.

Dans racoleur élément, la solution voulue est appromatisée par des polynômes simples, puis le domaine est reconstituent assemblant tous les éléments [28].

● Étape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

● Étape 2 : Division du domaine en éléments finis.

● Étape 3 : Approximation de la solution dans chaque élément.

● Étape 4 : Assemblage des éléments et application des conditions aux limites.

● Étape 5 : Résolution du système global.

III.8 Formes classiques d'éléments :

Il existe de nombreuses formes d'éléments classique qui correspondent à des sphères à une, deux ou trois dimensions, Chaque type d'élément un été identifié par un nom qui indique sa forme et la quantité géométrique de Nodules constituant l'élément.

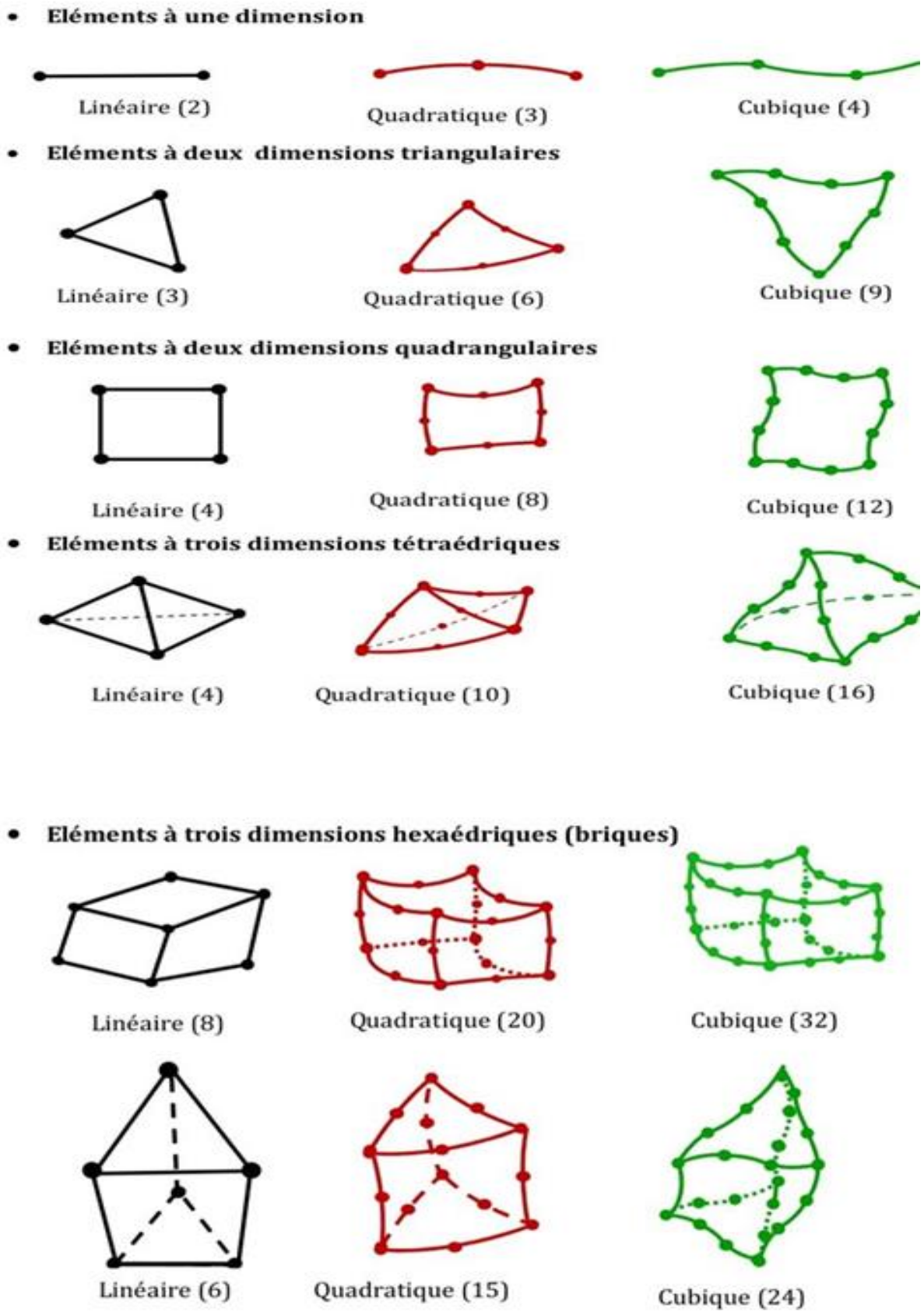


Figure III.4 : Formes classiques d'éléments.

III.9 Formulation de l'élément fini poutre de Bernoulli (poutre mince) :

Dans ce chapitre on développe la matrice de rigidité pour un élément de poutre travaillent en flexion. Nous allons maintenant suivre les étapes nécessaires pour développer la matrice de rigidité d'un élément de poutre, puis illustrer des solutions complètes pour les poutres.

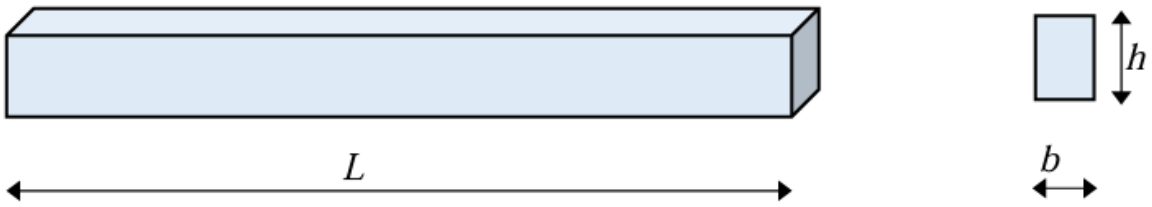


Figure III.5 : Elément de poutre mince.

Une poutre est un élément structurel généralement long et mince soumis à une charge transversale qui produit des effets de flexion importants par rapport à des effets de torsion ou axiaux. Cette déformation de flexion est mesurée comme un déplacement transversal et une rotation. Dans ce sens, les degrés de liberté nodaux considérés sont un déplacement transversal et une rotation.

Soit le nœud de poutre décrit dans la (figure III.6). La poutre a une longueur L avec des coordonnées locales axiales x et des coordonnées locales transversales y. Les déplacements nodaux transversaux dans le repère local sont les vi et les rotations les θ_i. Les forces nodales locales sont les f_{iy} et les moments de flexion par mi comme montré dans la (figure III.7) et (III.4) Nous négligeons tout d'abord tous les effets des forces axiales**.**

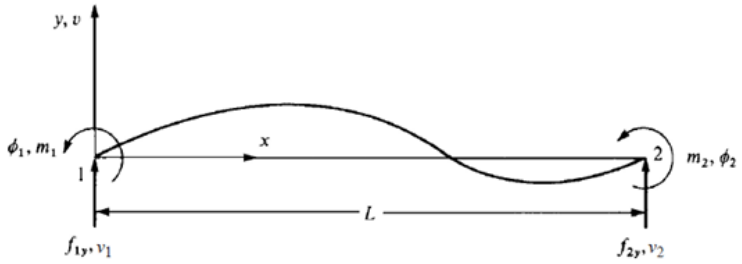


Figure III.8 : Elément poutre avec des déplacements, des rotations, des forces, et des moments nodaux positifs.

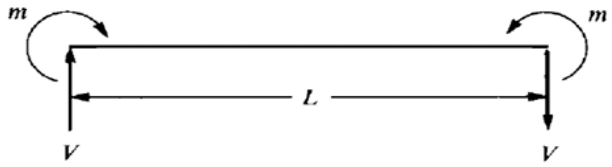


Figure III. 9 : Conventions de signe pour les forces de cisaillement et les moments de flexion.

Dans tous les nœuds, les conventions de signes suivantes sont utilisées :

1. Les moments sont positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Les rotations sont positives dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
3. Les forces sont positives dans la direction positive.
4. Les déplacements sont positifs dans la direction positive de y.

La figure III.4_ indique les conventions de signes utilisées dans la théorie de la poutre pour les forces de cisaillement positives V et les moments de flexion m.

III.9.1 Approximation du champ de déplacement

Supposons que la variation de déplacement transversal à travers la longueur de l'élément est égale à :

$$v(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \qquad \text{(III.1.1)}$$

La fonction de déplacement cubique Eq. (III.1.1) est appropriée car il existe quatre degrés de liberté (un déplacement transversal vi et une petite rotation θi à chaque nœud). En utilisant la même procédure que celle décrite à la section 2.2, nous exprimons v en fonction des degrés nodaux de liberté v1, v2, θ1 et θ2 comme suit :

$$v(0)=v_1=a_4 \qquad \text{(III.1.2)}$$

$$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_1=a_4$$

$$v(L)=v_2=a_1L^3+a_2L^2+a_3L+a_4$$

$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_1 = 3a_1L^2+2a_2L+a_3$

$\theta = dv/dx$ pour une petite rotation θ supposée. La résolution des équations (III.1.2) pour a1 à a4 en termes de degrés de liberté nodaux et en remplaçant dans l'équation (III.1.1), nous avons

$$v = \frac{2}{L^3}(v_1-v_2)+\frac{1}{L^2}(\theta^1 + \theta^2) + \frac{-3}{L^2}(v_1-v_2)-\frac{1}{L}(2\theta_1+\theta_2)x^2+\theta_1 x+v_1 \qquad \text{(III.1.3)}$$

Sous forme matricielle, nous exprimons l'équation (III.1.3) comme

$$v=[N]\{d\} \qquad \text{(III .1.4)}$$

Avec

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(III .1.5a)}$$

$$[N]= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \qquad \text{(III .1.5b)}$$

$N_1=\frac{1}{L^3}(2x^3-3x^2L+L^3)$ $\qquad N_2 = \frac{1}{L^3}(x^3L-2x^2L^2+xL^3)$ $\qquad$ (III .1.6)

$N_3=\frac{1}{L^3}(-2x^3-3x^2L)$ $\qquad N_4=\frac{1}{L^3}(x^3L-x^2L^2)$

Les N_1, N_2, N_3 et N_4 sont appelés les « fonctions de forme » pour un élément de poutre. Ces fonctions de forme cubique sont connues sous le nom de fonctions d'interpolation. Pour l'élément de poutre, N_1 vaut 1 lorsqu'il est évalué au nœud 1 et vaut 0 lorsqu'il est évalué au nœud 2. Parce que N_2 est associé à $\theta 1$, nous avons, à partir des deux équations (III.1.6),

$(dN2/dx) = 1$ lorsqu'il est évalué au nœud 1. Les fonctions de forme N_3 et N_4 ont des résultats analogues pour le nœud 2.

III.9.2 Définir les relations déformation-déplacement et déformation-contrainte

Soit la relation de déformation axiale/déplacement suivante est valide :

$$\varepsilon_x(x,y)=\frac{du}{dx} \qquad \text{(III .1.7)}$$

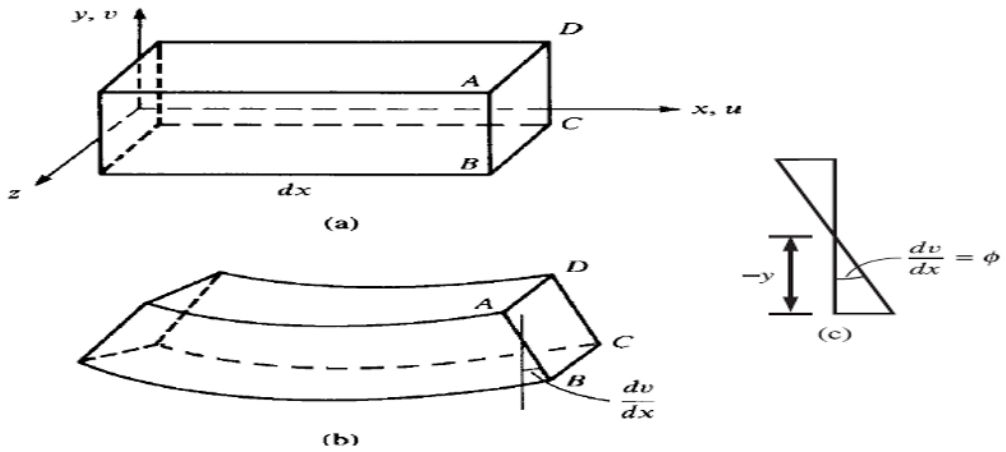


Figure III.10 : segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation ; (C) Angle de rotation de la section transversale ABCD.

u est la fonction de déplacement axial. À partir de la configuration déformée de la poutre représentée sur la (figure III-7), on établit le lien entre le déplacement axial et le déplacement transversal.

$$u = -y\frac{dv}{dx} \qquad \text{(III .1.8)}$$

Nous rappelons l'hypothèse fondamentale de poutre, selon laquelle les sections transversales de la poutre (la section transversale ABCD) soient planes avant la déformation par flexion, restent planes après la déformation et, en général, présentent une petite rotation (dv/dx). En utilisant l'équation (III.1.8) dans l'équation (III.1.7), nous obtenons :

$$\varepsilon_x(x,y) = -y\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{(III .1.9a)}$$

En utilisant la loi de Hooke ($\sigma x = E\ \varepsilon x$) on obtient la formule de flexion de la poutre ou la contrainte de flexion :

$$\sigma x = \frac{-My}{I} \qquad \text{(III .1.9b)}$$

À partir de la théorie de la poutre, le moment de flexion et la force de cisaillement sont liés à la fonction de déplacement transversal selon la relation suivante :

$$m(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2} \qquad V = EI\frac{d^3v}{dx^3} \qquad \text{(III .1.10)}$$

III.9.3 Expression de la déformation

En raison de l'hypothèse des section planes du modèle d'Euler-Bernoulli, nous avons :

$u(x,y)=-y.\theta(x)$ (III.2.1)

$u(x,y)=-y.\frac{dv}{dx}$ (III.2.2)

Le déplacement s'écrit sous la forme :

$$v(x)=[N_1(x)\ \ N_2(x)\ \ N_3(x)\ \ N_4(x)]\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.2.3)}$$

D'où, la courbure de la poutre est :

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}(Nu)=Bu \quad \text{(III.2.4)}$$

Dont la matrice de déformation B est :

$$B=\frac{d^2}{dx^2}N=\left[\frac{d^2N_1(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_2(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_3(x)}{dx^2}\ \ \frac{d^2N_4(x)}{dx^2}\right]=$$

$$\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\ \ \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{2}{L}+\frac{6X}{L^2}\right]$$

$$B=\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\ \ \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\ \ -\frac{2}{L}+\frac{6X}{L^2}\right] \quad \text{(III.2.5)}$$

III.9.4 L'énergie de déformation de l'élément poutre :

D'après la théorie des poutres :

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

N_1,N_2,N_3et N_4 : sont les fonctions d'interpolation.

$V(x)=\sum_{i=1}^{4} N_i\,(x)\,.u_i$ (III.3.1)

Avec :

$u_i=[w_1\ \ \theta_1\ \ w_2\ \ \theta_2]^T$ (III.3.2)

Donc le champ de déplacement devient :

$U=\frac{1}{2}\int_V\ \sigma^T\,.\varepsilon.\,dV$ (III.3.3)

$=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_x^T . E . \varepsilon_x dV$ $/\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ (III.3.4)

$$\varepsilon_x=-y\left[\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}\right]\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.3.5)}$$

$\varepsilon_x=-y[B]\{\hat{u}\}$ (III.3.6)

$U=\frac{1}{2}\int_V \{\hat{u}\}^T[B]^T.(y)^2.E.[B]\{\hat{u}\}dv$ (III.3.7)

$U=\frac{1}{2}\{\hat{u}\}^T\ (E\int_V [B]^T . y^2.[B]\ dv)\{\hat{u}\}$ (III.3.8)

$\int dz=b$ (III.3.9)

$\int_y^z y^2=\frac{h^3}{12}$ (III.3.10)

Le travail des forces nodales est:

$W=f_1v_1+m_1\theta_1+f_2v_2+m_2\theta_2=\{d\}^T\{f\}$ (III.3.11)

Sachant que $\pi=U+W$

En invoquant la stationnarité de l'énergie potentielle totale π, *nous avons :*

$$\frac{1}{2}u^T\left[\int_V (B^T E.y^2.B)dV\right]u=u^T f \quad \text{(III .3.12)}$$

Alors :

$$\frac{1}{2}u^T\left[\int_V (B^T E.y^2.B)dV\right]\{d\}=\{f\} \quad \text{(III.3.13)}$$

Ecrivons cette équation sous la forme :

$[K]\{d\}=\{f\}$ (III.3.14)

Ou $k=\int_V (B^T E.y^2.B)dV$ est la matrice de rigidité.

On déduire que la matrice de rigidité de l'élément poutre est :

$K=EI\int_0^L [B]^T . E . [B]dx$ (III.3.15)

Après intégration nous avons :

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.16)}$$

L'équation (III.3.16) indique que [k] relie les forces transversales et les moments de flexion aux déplacements transversaux et aux rotations, alors que les effets axiaux ont été négligés. [29]

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.3.17)}$$

III.10 Formulation de la Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Timoshenko (y compris la déformation transversale du cisaillement) :

La théorie de la poutre avec déformation due au cisaillement est dérivée comme suit :

La déformation due au cisaillement (*V*) est maintenant incluse. En se référant à la (figure III-2),on observe une section d'une poutre de longueur différentielle *dx* avec une section transversale.

En raison de l'inclusion de la (figure III-2), on observe une section d'une poutre de longueur différentielle *dx* avec la section transversale. Supposée rester plane mais non plus perpendiculaire à l'axe neutre (axe *x*) en raison de l'inclusion de La courbure totale de la poutre dans la force de cisaillement entraînant une rotation indiquée par le terme *b*. La courbure totale de la poutre dans Un point *x* se compose de deux parties, l'une provoquée par la flexion et l'autre par la force de cisaillement. La rotation de la courbure au point *x* est donc donnée par :

$$\frac{dv}{dx} = \theta(x) + \beta(x) \quad \text{(III .4.1a)}$$

La rotation due au moment de flexion et à la force transversale de cisaillement est donnée par la fonction $\theta(x)$ et $\beta(x)$.

Nous supposons que la courbure est linéaire et que la pente (courbure angulaire) est très faible.

La relation entre le moment de flexion et la déformation de flexion (courbure) est la suivante :

$$M(x) = EI\frac{d\theta(x)}{dx} \quad \text{(III .4.1b)}$$

La relation entre la force de cisaillement et la déformation due à cisaillement est donnée par :

$V(x)=K_sAG\beta(x)$ (III .4.1c)

La différence entre dv /dx et θ représenté la déformation du cisaillement $\gamma_{zy}(=\beta)$ de la poutre

$$\gamma_{zy}=\frac{dv}{dx}=-\theta$$ (III .4.1d)

Pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre, y compris la déformation transversale du cisaillement, nous supposons que le déplacement transversal doit être donné par la fonction cubique dans l'équation. (III.1.1). Nous choisissons la déformation de cisaillement transversale γ, qui est consistante avec le polynôme cubique pour *v(x)*, de sorte que γ est une constante donnée par

$\gamma=c$ (III .4.1c)

En utilisant la fonction de déplacement cubique pour *v*, la relation de rotation donnée par l'équation (III.4.1a), la déformation de cisaillement donnée par l'équation (III.4.1), ainsi que la relation de moment de flexion - courbure, Eq. (III.4.1b) et la relation de déformation de cisaillement-force de cisaillement Eq. (III.4.1c), nous obtenons :

$C=6a_1g$ (III .4.1d)

$g = EI / k_s AG$ et k_s A désigné la surface de cisaillement. Les surfaces de cisaillement, *As*, varient en fonction de la forme des sections. Par exemple, pour une forme rectangulaire, As est égale à 0,83 fois la section transversale *A* ; pour une section transversale circulaire, on prend 0,9 fois la section transversale.

Utiliser les équations (III.1.1), (III.4.1a), (III.4.1c) et (4.1.15d) permettent d'exprimer θ Comme un polynôme en x comme suit :

$\Theta=a_3+2a_2x+(3x^2+6g)a_3$ (III.4.1e),

Utiliser les équations. (III.1.1) et (III.4.1e), permettent d'exprimer les coefficients a1 à a4 en termes de déplacements nodaux *v1* et *v2*, ainsi que des rotations $\theta 1$ et $\theta 2$ de la poutre aux extrémités $x = 0$ et

$x = L$, comme précédemment. Les expressions pour a1 à a4 sont ensuite données comme

suit :

$a_1=\frac{2v_1+L\theta_1-2v_2+L\theta_2}{L(L^2+12g)}$

$a_2=\frac{-3Lv_1-(2L^2+6g)\theta_1+3Lv_2+(-L^2+6g)\theta_2}{L(L^2+12g)}$ (III.4.1f),

$a_3=\frac{-12gv_1+(L^3+6gL)\theta_1+12gv_2-6gL\theta_2}{L(L^2+12g)}$

$a_4=v_1$

En substituant dans l'équation (III.1.1),, nous obtenons

$v=\frac{2v^1+L\theta^1-2v^2+L\theta_2}{L(L^2+12g)}\ x^3-\ \frac{-3Lv^1-(2L^2+6g)\theta^1+3Lv_2+(-L^2+6g)\theta_2}{L(L^2+12g)}\ x^2-\ \frac{12gv^1-(L^3+6gL)\theta^1-12gv^2-6gL\theta_2}{L(L^2+12g)}$

$x+v_1$ (III.4.1g)

$N_1=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}\ [6\varepsilon(\varepsilon-1)]$

$N_2=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L(\varepsilon-\ 1)(3\varepsilon-1-\emptyset_y)$ (III.4.1h)

$N_3=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[-6\varepsilon(\varepsilon-1)]$

$N_4=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}[L\varepsilon(-2+\emptyset_y+3\varepsilon)$ $Ou\quad \varepsilon=\frac{x}{L}$ [30]

De manière similaire à l'étape 4, pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre en tenant compte de la déformation du cisaillement), nous avons :

$f_{1y}=(0)=6EIa_1=\frac{EI(12v_1+6L\theta_1-12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$

$m_1=-m(0)=-EIa_2=\frac{EI(-6Lv_1-(4L^2+12g)\theta_1+6Lv_2+(-2L^2+12g)\theta_2)}{L(L^2+12g)}$ (III.4.1i)

$f_{2y}=-(L)=\frac{EI(-12v_1-6L\theta_1+12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$

$m_2=m(L)=\frac{EI(6Lv_1+(4L^2-12g)\theta_1-6Lv_2+(4L^2+12g)\theta_2)}{L(L^2+12g)}$

Sous forme matricielle l'Eq. (III.4.1i) devient

$$\begin{bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.4.1j)}$$

La matrice de rigidité, y compris la déformation de flexion et cisaillement, est alors donnée par :

$$[k] = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix} \quad \text{(III.4.1k)}$$

Dans l'équation (III.4.1k), rappelez-vous que g représente le terme de cisaillement transversal. Si l'on fixe $g = 0$, on obtient l'équation (III.3.16) pour la matrice de rigidité de la poutre en négligeant la déformation du cisaillement transversal. Pour mieux visualiser l'effet du facteur de correction de cisaillement, nous définissons le terme de correction de cisaillement non dimensionnel

$\varphi = 12EI/(ksAGL^2) = 12g = L^2$.

III.11 Conclusion :

Ce chapitre a permis de présenter la formulation des éléments poutres dans le cadre de la méthode des éléments finis, en considérant des matériaux isotropes. Les formulations classiques basées sur les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ont été rappelées, et leurs adaptations aux FGM ont été détaillées, en mettant l'accent sur la prise en compte de la variation graduelle des propriétés matérielles.

Les développements présentés dans ce chapitre fournissent les outils théoriques nécessaires pour implémenter des éléments poutres adaptés aux FGM dans un code de calcul par éléments finis.

CHAPITRE IV : Formulation des éléments poutres FGM minces et épaisse par la MEF

IV.1 Introduction :

Ce chapitre présente la formulation des éléments poutres FGM dans le cadre de la MEF, en considérant les matériaux FGM. Cependant, l'introduction des FGM, caractérisés par une variation continue des propriétés matérielles, nécessite une adaptation de ces formulations pour prendre en compte l'hétérogénéité du matériau.

Dans le contexte des matériaux FGM, où les propriétés mécaniques varient continûment, l'application de ces théories nécessite des adaptations pour tenir compte de la distribution graduelle des modules élastiques et des coefficients de cisaillement.

IV.2 Description du problème :

On considère une poutre en FGM de longueur *L*, d'épaisseur *b* et de hauteur *h*. Les coordonnées (*x*, *y*) définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe *z* est origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur.

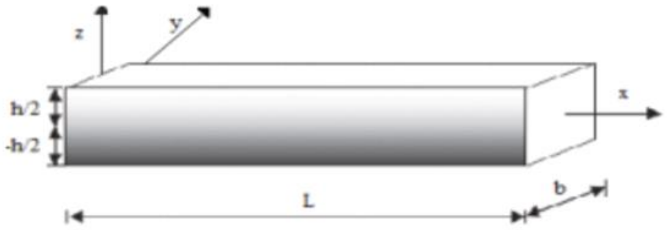


Figure IV. 1:une poutre en FGM.

IV.3 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces (poutre de Bernoulli) :

Dans le contexte des matériaux FGM, où les propriétés mécaniques varient continûment, l'application de ces théories nécessite des adaptations pour tenir compte de la distribution graduelle des modules élastiques et des coefficients de cisaillement.

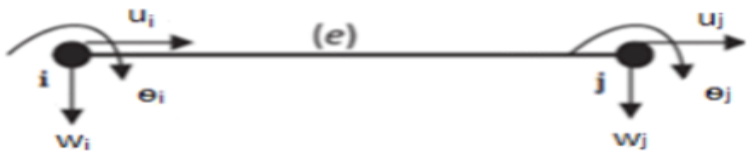


Figure IV. 2: un élément de poutre.

L'élément fini poutre FGM nécessite 3 *ddl* par nœud (u, w, θ)

IV.3.1 Champs de déplacement

Dans le cadre du théorème de Bernoulli l'effet de cisaillement est négligé. Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à *(x, z)* de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{IV-1}$$

$$w = w_0(x) \qquad \text{IV-2}$$

Où *u* et *w* sont respectivement les déplacements axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian de la poutre.

IV.3.2 Le champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{IV-3}$$

ε_x:la déformation normale suivant la direction x.

Ou encore :

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})$$

$$\varepsilon_{xo} = \frac{du_0}{dx}$$

$$\varepsilon_{xf} = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

IV.3.3 Les contraintes

Étant donné que la poutre FGM obéit à la loi de Hooke, l'expression des contraintes peut être déterminée comme suit :

$$\sigma_x = E(z).\varepsilon_x \qquad \text{IV-4}$$

E(z) : le module de Young du matériau FGM.

IV.3.4 Application du Principe de EPTM

L'expression de l'énergie potentielle totale s'écrit comme suit:

$\frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T.\{\varepsilon\}dV-\int_s \{w\}^T.\{f\}ds = 0$ IV-6

$\frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T.E.\{\varepsilon\}dV-\int_s \{w\}^T.\{f\}ds = 0$

Alors, l'expression de l'énergie potentielle totale devient:

$U=\frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})^T.E.(\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})dv$

IV.3.5 Interpolation des déplacements

Déplacement transversal

Le déplacement transversal d'un point de cordonnées *x* de la poutre est exprimé par :

$W(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$ IV-7

Ou : a_1,a_2,a_3,a_4 sont des constantes.

Il peut être écrit comme suit :

$W(x)=N_1(x).v_1+N_2(x).\theta_1+N_3(x).v_2+N_4(x).\theta_2$ IV-8

L'équation sous forme matricielle est la suivante :

$$W(x)=[0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{IV-9}$$

u_i: déplacement axial de chacun des nœuds .

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

N_1,N_2,N_3et N_4 : sont les fonctions d'interpolation.

$W(x)=\sum_{i=1}^{4} N_i(x).u_i$ IV-10

Donc le champ de déformation de flexion devient :

ε_{xf} =-y[0 $\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}$ O $\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}$]{$\hat{u}$}=-y[$B_f$]{$\hat{u}$}

ε_{xf} =-y[B_f]{$\hat{u}$}

Déplacement axial

Le déplacement axial d'un point de cordonnées *x* de la poutre est exprimé par :

$u(x)=a_1+a_2x$ IV-7

Ou : a_1,a_2 sont des constantes.

Il peut être écrit comme suit :

$u_{xo}(x)=\overline{N_1}(x)u_1+\overline{N_2}(x)u_2$ IV-8

L'équation sous forme matricielle est la suivante :

$$u_{xo}=\begin{bmatrix}\overline{N_1} & 0 & 0 & \overline{N_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}$$

u_i: déplacement axial de chacun des nœuds .

V_i: déplacement transversal de chacun des nœuds .

θ_i : la rotation de chacun des nœuds.

$\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$: sont les fonctions d'interpolation du déplacement axial, tel que :

$$\overline{N_1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right),\quad \overline{N_2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

Donc le champ de déformation d'extension devient :

ε_{x0}= [$\frac{\partial\overline{N_1}}{\partial x}$ 0 0 $\frac{\partial\overline{N_2}}{\partial x}$ 0 0]{$\hat{u}$}= [B_m]{$\hat{u}$}

ε_{x0}= [B_m]{$\hat{u}$}

À partir de l'expression de l'énergie potentielle totale :

$U=\frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})^T . E.(\varepsilon_{xo}+\varepsilon_{xf})dv$

Nous avons ;

$U=\frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xo})^T . E.(\varepsilon_{xo})dv + \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xf})^T . E.(\varepsilon_{xf})dv + \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xo})^T . E.(\varepsilon_{xf})dv +$

$+ \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_{xf})^T . E.(\varepsilon_{xo})dv$

Qui peut être écrite comme suit :

$$[K] = [K_m] + [K_f] + [K_{mf}] + [K_{mf}]^T$$

Ou :

$$[K_m] = \int_V (\varepsilon_{xo})^T . E(z).(\varepsilon_{xo})dv$$

$$[K_f] = \int_V (\varepsilon_{xf})^T . E(z).(\varepsilon_{xf})dv$$

$$[K_{mf}] = \int_V (\varepsilon_{xo})^T . E(z).(\varepsilon_{xf})dv$$

Qui peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L B_m^T . B_m^T \, dx$$

$$[K_f] = EI(z).\int_0^L B_f^T . B_f^T \, dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L B_m^T . B_f^T \, dx$$

A : section transversale

I : moment d'inertie

S : moment statique

$$EA(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).dz$$

$$EI(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2.E(z).dz$$

$$ES(z) = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z.E(z).dz$$

Les matrices de déformation sont les suivants :

$[B_m]=[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0]$

$[B_f]=\left[0 \quad -\frac{12x+6L}{L^3} \quad \frac{6xL-4L^2}{L^3} \quad 0 \quad -\frac{12x-6L}{L^3} \quad \frac{6xL-2L^2}{L^3}\right]$

IV.3.6 Evaluation des matrices de rigidité :

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0\right] dx$$

$$[K_m] = \frac{EA(z)}{L}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[K_f]$

$$= EI(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12x+6L}{L^3} \\ \frac{6xL-4L^2}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{12x-6L}{L^3} \\ \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} \left[0 \quad -\frac{12x+6L}{L^3} \quad \frac{6xL-4L^2}{L^3} \quad 0 \quad -\frac{12x-6L}{L^3} \quad \frac{6xL-2L^2}{L^3}\right] dx$$

$$[K_f] = \frac{EI(z)}{L^3}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & 0 & -\frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 & \frac{-12x+6L}{L^4} & \frac{-6xL+4L^2}{L^4} & 0 & \frac{12x+6L}{L^4} & \frac{-6xL+2L^2}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12x-6L}{L^4} & \frac{6xL-4L^2}{L^4} & 0 & \frac{-12x-6L}{L^4} & \frac{6xL-2L^2}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}] = ES(z).\begin{bmatrix} 0 & \frac{-6x^2+6xL}{L^4} & \frac{-3Lx^2+4L^2x}{L^4} & 0 & \frac{6x^2-6xL}{L^4} & \frac{-3Lx^2+4L^2x}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6x^2-6xL}{L^4} & \frac{3Lx^2-4L^2x}{L^4} & 0 & \frac{-6x^2+6xL}{L^4} & \frac{3Lx^2-4L^2x}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_0^L$$

$$[K_{mf}] = =ES(z).\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre FGM de Bernoulli est la suivante :

$$[K] = [K_m] + [K_f] + [K_{mf}] + [K_{mf}]^T$$

IV.4 Formulation de l'élément poutre FGM pour les poutres minces et épaisses (poutre de Timoshenko) :

IV.4.1 Champs de déplacement

Le théorème de Timoshenko tient compte de l'effet de cisaillement transversal. Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\emptyset(x) \qquad \text{IV-1}$$

$$w = w_0(x) \qquad \text{IV-2}$$

Où *u* et *w* sont respectivement les déplacements axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian de la poutre.

IV.4.2 Le champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z.\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \qquad \text{IV-3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dw_0(x)}{dx} - \emptyset(x)$$

ε_x: la déformation normale suivant la direction *x*.

γ_{xy}: la déformation de cisaillement transversal

Ou encore :

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_{xo} + \varepsilon_{xf})$$

$$\varepsilon_{xo} = \frac{du_0}{dx}$$

$$\varepsilon_{xf} = -z.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dw_0(x)}{dx} - \emptyset(x)$$

IV.4.3 Matrice de rigidité de l'élément poutre FGM de Timoshenko

Par application du principe de stationnarité de l'énergie potentiel total, nous obtenons les matrices de rigidités suivantes :

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L B_m^T . B_m^T \, dx$$

$$[K_m] = EA(z).\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[K_f] = EI(z).\int_0^L B_f^T . B_f^T \, dx$$

$$[K_m] = \frac{EA(z)}{L}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[K_f]$

$$= EI(z).\int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12x+6L}{L^3} \\ \frac{6xL-4L^2}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{12x-6L}{L^3} \\ \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & 0 & -\frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_f] = \frac{EI(z)}{L(L^2+12g)}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & (4L^2+12g) & 0 & -6L & (2L^2-12g) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & (2L^2-12g) & 0 & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix}$$

Avec

$g = EI / (ks.AG(z))$

$$[K_{mf}] = ES(z).\int_0^L B_m^T . B_f^T \, dx$$

$[K_{mf}]=$

$$\frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)}\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(-4-\varphi_y+\frac{6X}{L}) & 0 & 6+\frac{12X}{L} & L(-2+\varphi_y+\frac{6X}{L}) \end{bmatrix} dx$$

$$[K_{mf}]=\frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)}\int_0^L \begin{bmatrix} 0 & 6-\frac{12X}{L} & L(4+\varphi_y-\frac{6X}{L}) & 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(2-\varphi_y-\frac{6X}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\frac{12X}{L} & L(-4-\varphi_y+\frac{6X}{L}) & 0 & 6-\frac{12X}{L} & L(-2+\varphi_y-\frac{6X}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$[K_{mf}]$

$$=\frac{ES(z)}{L^2(1+\varphi_y)}\begin{bmatrix} 0 & 6x-\frac{6x^2}{L} & L(4x+\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) & 0 & -6x+\frac{6x^2}{L} & L(2x-\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\frac{6x^2}{L} & L(-4x-\varphi_y x+\frac{3x^2}{L}) & 0 & 6x-\frac{6x^2}{L} & L(-2x+\varphi_y x-\frac{3x^2}{L}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_0^L$$

$$[K_{mf}]=\frac{1}{L(1+\varphi_y)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+\varphi) & 0 & 0 & -(1+\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\varphi) & 0 & 0 & (1+\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{mf}]=ES(z).\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre FGM de Bernoulli est la suivante :

$$[K]=[K_m]+[K_f]+[K_{mf}]+[K_{mf}]^T$$

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons développé la formulation des éléments poutres FGM minces et épaisses selon les modèles de Bernoulli et Timoshenko, en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons également étudié les champs de déplacement, de déformation et de contrainte. L'interpolation des déplacements a permis de construire les matrices de rigidité adaptées, intégrant l'hétérogénéité du matériau, pour modéliser de manière précise le comportement structural des poutres fonctionnellement graduées.

CHAPITRE V : Validation et Analyse du comportement statique des poutres FGM

V.1 Introduction :

Ce chapitre présente une analyse détaillée des résultats numériques obtenus pour les poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sous différentes conditions de chargement et conditions aux limites. Dans ce travail, un programme Matlab des poutres FGM selon les théories de Bernoulli et de Timoshenko est implémenté.

Les simulations ont été réalisées en utilisant les théories classiques des poutres (Euler-Bernoulli et Timoshenko), avec une attention particulière portée sur l'influence du gradient matériau, du élancement géométrique (L/h), et du raffinement du maillage. Les résultats sont comparés à des références issues de la littérature pour valider la robustesse du modèle développé.

Les objectifs spécifiques de ce chapitre sont :

- Évaluer la convergence des solutions en fonction du nombre d'éléments finis.
- Comparer les théories CBT et TBT pour identifier les cas où les effets de cisaillement sont significatifs.
- Analyser l'impact de l'indice de puissance (n) sur la rigidité et la flèche des poutres FGM.
- Discuter les implications pour la conception de structures FGM.

V.2 Validation numérique :

Cas 1

On considère une poutre rectangulaire simplement appuyée, soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (métal) E_m= 70GPa et d'alumine (céramique) E_c= 380 GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law).

Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM simplement supportée avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=20, ce qui permet d'utiliser la théorie d'Euler-Bernoulli, le déplacement non-dimensionnel suivant est utilisé [31]:

$$w=100\left(\frac{E_m h^3}{q_0 L^4}\right) \qquad (V.1)$$

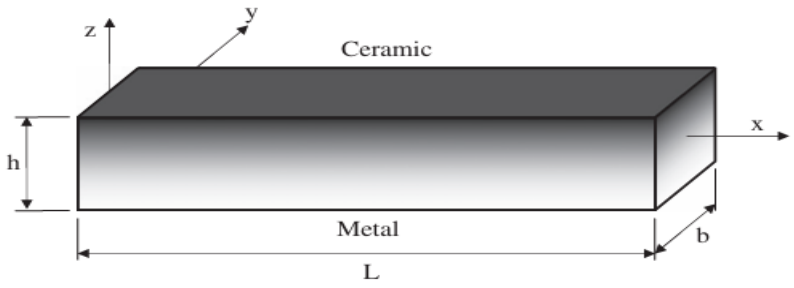


Figure. 1: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM **[31] .**

Tableau V.1 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S (CBT)	2	2.8783	4.3727	5.5919	7.0478	8.3801	9.3595
	4	2.8783	4.4190	5.7289	7.3122	8.6581	9.5453
	10	2.8783	4.4319	5.7673	7.3862	8.7360	9.5973
	REF [32]	2.8783	4.4401	5.7746	7.4003	8.7508	9.6072

Tableau V. 2: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S (TBT)	2	2.8973	4.3988	5.6240	7.0894	8.4394	9.4329
	4	2.8973	4.4451	5.7610	7.3538	8.7174	9.6188
	10	2.8973	4.4580	5.7993	7.4278	8.7953	9.6708
	REF [32]	2.8962	4.4645	5.8049	7.4415	8.8151	9.6879

Les tableaux (V.1) et (V.2) présentent les flèches non-dimensionnelles d'une poutre FGM simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie, calculées respectivement selon les théories des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) et de Timoshenko (TBT), pour différentes valeurs de l'indice de puissance (*n*). Une comparaison est effectuée avec des résultats de référence [32] pour différents indices de puissance (*n*) et nombres d'éléments finis.

1 Convergence des résultats en fonction du maillage

- Pour les deux théories (CBT et TBT), on observe une convergence des résultats lorsque le nombre d'éléments augmente.

- Avec 2 éléments, les résultats s'écartent légèrement des valeurs de référence, en particulier pour les indices de puissance élevés (n = 5, n = 10).

- Avec 10 éléments, les résultats se rapprochent les résultats de références.

2 Influence de l'indice de puissance (*n*)

- L'indice de puissance (*n*) contrôle la variation des propriétés matérielles le long de l'épaisseur.

- Pour *n = 0*, la poutre est entièrement céramique, ce qui donne la flèche la plus faible (rigidité maximale).

- Lorsque n augmente, la proportion de métal (aluminium) augmente, réduisant la rigidité globale et augmentant la flèche. Par exemple, pour (*n = 10*), la flèche est environ 3,25 fois plus élevée qu'avec *n = 0*.

3 Comparaison entre les théories CBT et TBT

- La théorie de Timoshenko (TBT) prend en compte la déformation due au cisaillement, ce qui conduit à des flèches légèrement plus grandes, en particulier pour les indices (*n*) élevés (où l'influence du métal, plus souple, est plus marquée).

4 Validation avec les références

- Les résultats obtenus avec 10 éléments sont en excellent accord avec les références [32], tant pour CBT que pour TBT.

- Les écarts résiduels (moins de 1 %) peuvent être attribués :

- Aux différences de modélisation (maillage, intégration numérique).

- À l'approximation du gradient de propriétés matérielles dans les éléments finis.

Pour illustrer l'effet de l'indice de puissance (*n*) sur la réponse des poutres FGM sous charge uniforme, les déformées pour différents l'indice de puissance sont tracés sur la Fig. 1. Étant donné que la déférence entre les résultats des théories des poutres de Bernoulli et ceux de Timoshenko est négligeable pour les poutres minces. On peut voir qu'augmenter l'indice de loi de puissance (*n*) réduira la raideur des poutres FGM, et par conséquent, entraînera une augmentation des flèches. Cela est dû au fait que des valeurs plus élevées de l'indice de loi de puissance (*n*) correspondent à une portion plus élevée de métal par rapport à la partie céramique, rendant ainsi ces poutres FG plus flexibles.

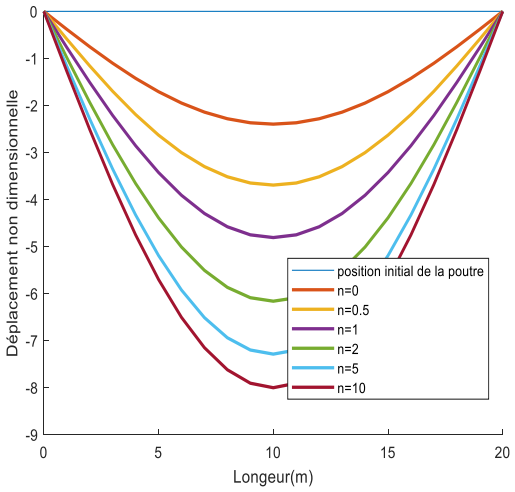


Figure V. 2: Déplacement transversal le long de la poutre - (S-S)

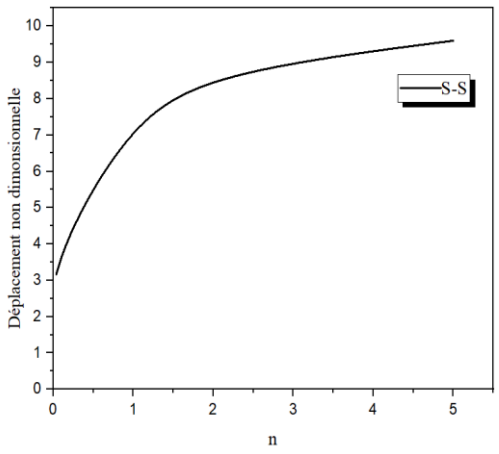


Figure V. 3: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)

Cas 2

On considère une poutre de section rectangulaire (*b*x*h*), soumise à une charge uniformément répartie. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (*Al*) avec E_{Al}=70GPa, et Zircone (ZnO2) E_{ZnO2}=200GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law).

Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=16

Ce qui permet d'utiliser la théorie d'Euler Bernoulli. Le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

$$V=v\frac{E_{Al}}{f_0 L^4}\frac{h^3}{12}\times 10^3 \qquad [33]$$

Nous avons étudié les trois cas de conditions aux limites suivantes :

Simplement supporté (*S*-*S*)

Encastré - Libre (*C*-*F*)

Encastré - Encastré (*C*-*C*)

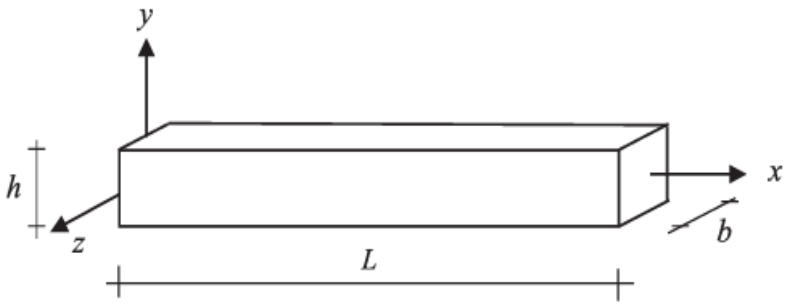


Figure V. 4 : Poutre FGM du avec différentes conditions aux limites **[34] .**

Tableau V. 3: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Bernoulli.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*

		0	0.2	0.5	1	2	5	10	100
S-S (CBT)	2	4.5573	5.2869	6.1921	7.2039	8.1488	9.0441	9.8442	12.7094
	4	4.5573	5.2942	6.2274	7.2887	8.2759	9.1449	9.8997	12.7098
	10	4.5573	5.2962	6.2373	7.3124	8.3115	9.1731	9.9152	12.7099
	REF [34]	4.60169	5.35586	_	7.38255	8.39622	9.27500	10.02656	13.14844
C-F (CBT)	2	43.7500	50.8086	59.7078	69.7905	79.1772	87.5758	94.9185	122.0134
	4	43.7500	50.8379	59.8491	70.1297	79.6856	87.9787	95.1402	122.0151
	10	43.7500	50.8461	59.8887	70.2247	79.8279	88.0915	95.2023	122.0156
	REF [34]	43.92750	51.13750	_	70.50500	80.16750	88.50000	95.64750	125.50750
C-C (CBT)	2	0.9115	1.0496	1.2007	1.3503	1.4942	1.7014	1.9097	2.5414
	4	0.9115	1.0569	1.2361	1.4351	1.6213	1.8021	1.9652	2.5419
	10	0.9115	1.0589	1.2460	1.4589	1.6569	1.8303	1.9807	2.5420
	REF [34]	0.95589	1.11101	_	1.52893	1.74164	1.93229	2.09206	2.73112

Tableau V. 4 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*							
		0	0.2	0.5	1	2	5	10	100
S-S (TBT)	2	4.6027	5.2987	6.0617	6.8189	7.5511	8.6061	9.6597	12.8358
	4	4.6027	5.2987	6.0617	6.8190	7.5513	8.6062	9.6597	12.8358
	10	4.6027	5.3016	6.0751	6.8498	7.5964	8.6430	9.6807	12.8360
	REF [34]	4.60169	5.35586	_	7.38255	8.39622	9.27500	10.02656	13.14844
C-F (TBT)	2	43.9317	50.5836	57.8674	65.0841	72.0420	82.0632	92.1109	122.5036
	4	43.9317	50.5827	57.8679	65.0852	72.0437	82.0646	92.1117	122.5036
	10	43.9317	50.6102	57.9969	65.3830	72.4786	82.4196	92.3142	122.5051
	REF [34]	43.92750	51.13750	_	70.50500	80.16750	88.50000	95.64750	125.50750
C-C (TBT)	2	0.9569	1.1005	1.2587	1.4176	1.5744	1.8005	2.0208	2.6701
	4	0.9569	1.1005	1.2587	1.4176	1.5744	1.8005	2.0208	2.6701
	10	0.9569	1.1010	1.2613	1.4236	1.5831	1.8077	2.0249	2.6701

	REF [34]	0.95589	1.11101	_	1.52893	1.74164	1.93229	2.09206	2.73112

1 Comparaison entre les théories de Bernoulli et Timoshenko

Dans cet exemple, la poutre est considérée épaisse car $\frac{L}{h} < 20$. On remarque que les deux théories convergent vers la solution de référence ; mais la poutre de Timoshenko donne une flèche légèrement supérieure, ce qui est attendu car la théorie de Timoshenko prend en compte l'effet du cisaillement transversal, augmentant la déformation.

Pour la poutre (Encastré - Libre), la différence entre CBT et TBT devient significative, surtout pour les valeurs intermédiaires de (n). La théorie de Timoshenko, en intégrant la déformation due au cisaillement, réduit la rigidité apparente de la poutre, ce qui explique cette différence.

2 Influence du gradient de matériau (paramètre n)

Pour n = 0 (100% Zircone), les flèches sont les plus faibles, car la zircone est plus rigide que l'aluminium. La différence entre CBT/TBT et la référence est minimale, validant les modèles pour les matériaux homogènes. Pour n = inf (100% Aluminium), les flèches sont maximales car l'aluminium est le plus faible. Pour les valeurs intermédiaires **(**$0.2 \leq n \leq 100$**),** La flèche augmente avec (n), mais de manière non linéaire, reflétant l'influence de la loi de puissance sur la répartition des propriétés mécaniques comme représenté sur les figures 5. 7 et 9.

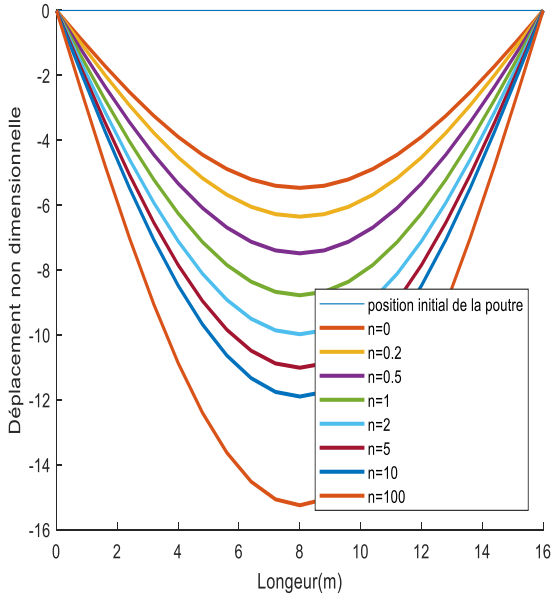


Figure V. 5: Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)

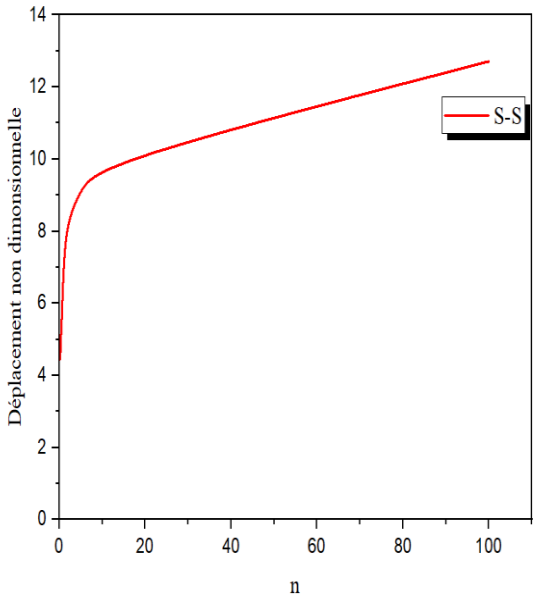


Figure V. 6: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)

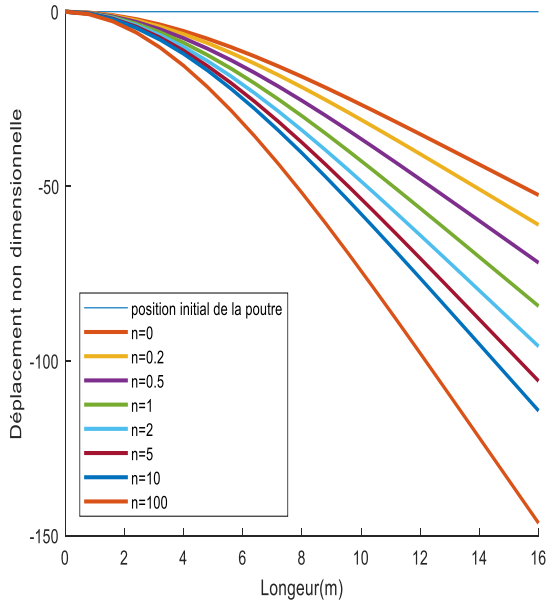


Figure V. 7: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F)

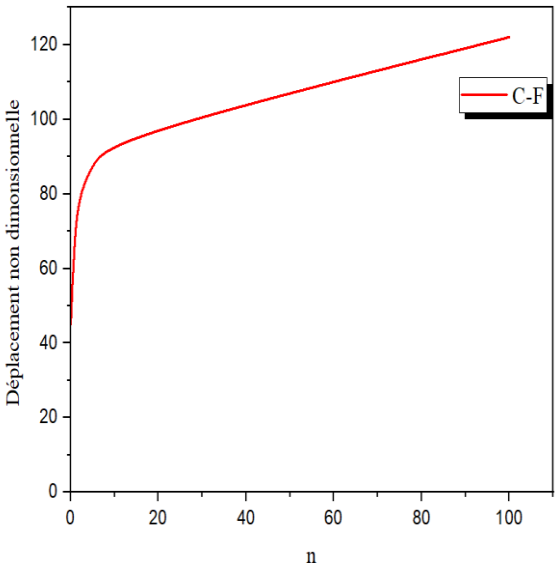
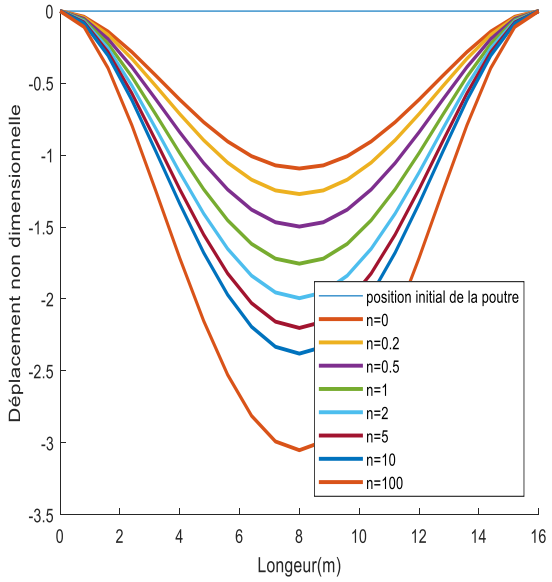
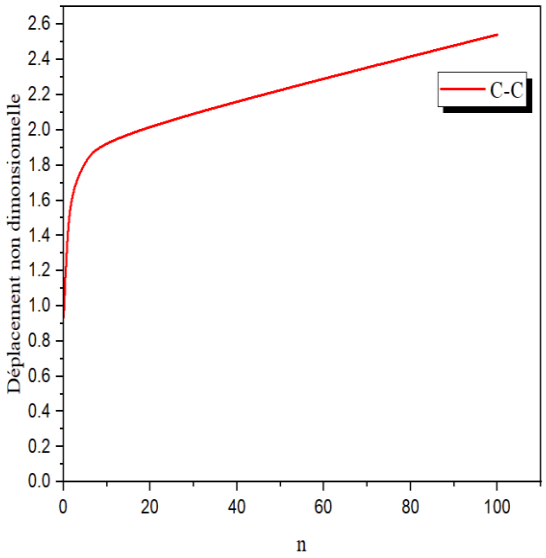


Figure V.8 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)



FigureV.9: Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)



FigureV.10: La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

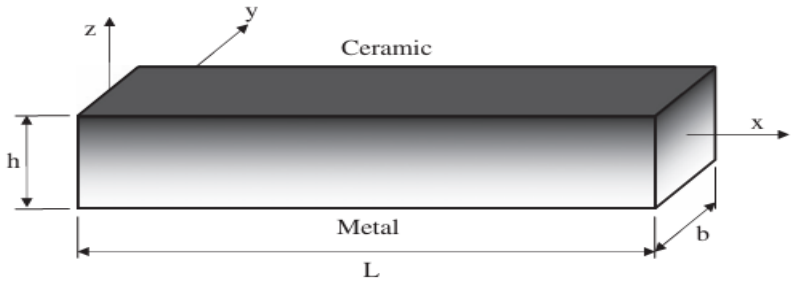
Cas 3

On considère une poutre rectangulaire simplement appuyée, soumise à une charge uniforme. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (métal) E_m= 70GPa et d'alumine (céramique) E_c= 380 GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law). Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$=5, nécessitant l'utilisation de la théorie de Timoshenko (TBT) pour prendre en compte les effets de cisaillement transversal. Les résultats sont présentés sous forme de flèches non dimensionnelles et comparés à une référence [32].

Le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

[31]

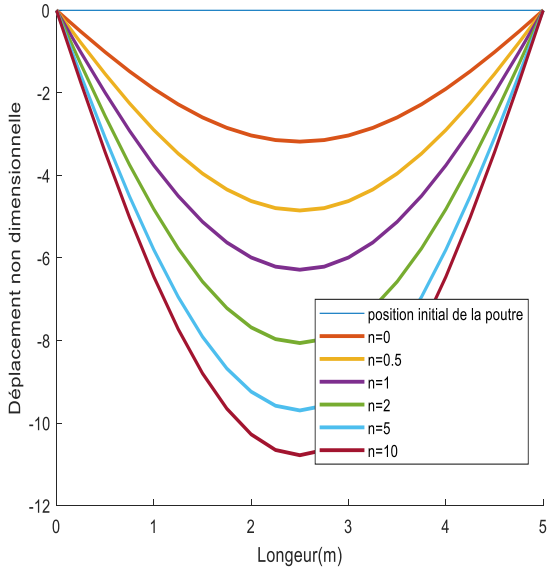
$$w=100\left(\frac{E_m h^3}{q_0 L^4}\right)$$



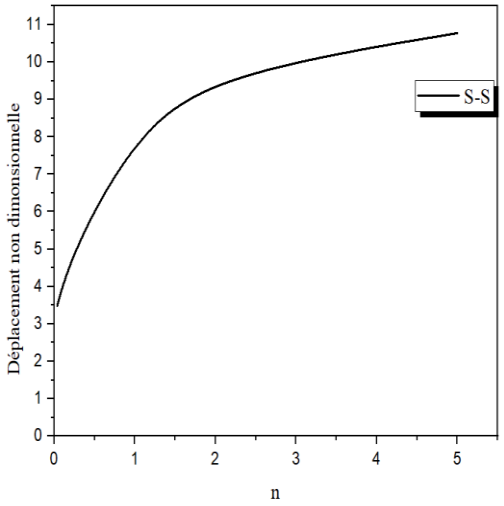
FigureV.11 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM **[31] .**

Tableau V. 5 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
S-S (TBT)		0	0.5	1	2	5	10
	2	3.1821	4.7898	6 .1049	7.7138	9.3289	10.5352
	4	3.1821	4.8361	6.2420	7.9781	9.6069	10.7210
	10	3.1821	4.8491	6.2803	8.0562	9.6847	10.7730
	REF [32]	3.1654	4.8285	6.2594	8.0677	9.8281	10.9381



FigureV.12 : Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)



FigureV.13 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

Dans ce cas (Tableau V.6), la surface inférieure de la poutre FGM est en aluminium et la surface supérieure est en céramique (Alumine). La poutre FGM se transforme vers l'état complètement métallique à mesure que l'exposant de la loi de puissance augmente. C'est pourquoi les déplacements augmentent à mesure que l'exposant de la loi de puissance augmente. Sans surprise, les déplacements les plus bas sont obtenus avec $n = 0$ (état entièrement céramique), tandis que $n = inf$ (état entièrement métallique) donne les plus élevés. Nous comprenons d'après la section précédente que la poutre isotrope (n=0 et n=inf) ne traite pas le couplage « effet axial-flexion ». Le (tableau IV-5) montre que pour une poutre isotrope, il suffit deux éléments pour obtenir d'excellents résultats. Augmenter le nombre d'éléments ne donnera pas de résultats supplémentaires.

Le faible rapport L/h=5 (poutre épaisse) accentue l'effet du cisaillement transversal, justifiant l'usage de la théorie de Timoshenko. Si la théorie de Bernoulli (CBT) avait été utilisée, elle aurait sous-estimé la flèche car elle néglige la déformation due au cisaillement. La référence [32] valide que TBT est indispensable pour $L/h < 20$.

Cas 4 :

On considère une poutre rectangulaire, soumise à une charge uniforme. La poutre est composée d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM), formé d'aluminium (Al) avec E_{Al}=70GPa, et Zircone (ZnO2) E_{ZnO2}=200GPa, avec une variation continue des propriétés mécaniques le long

de l'épaisseur suivant une loi de puissance (Power-Law) Dans cet exemple nous considérons une poutre FGM avec un élancement géométrique $\frac{L}{h}$= *4*. Ce qui impose d'utiliser la théorie de Timoshenko. Le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

$$V=v\frac{E_{Al}}{f_0 L^4}\frac{h^3}{12}\times 10^3 \qquad [33]$$

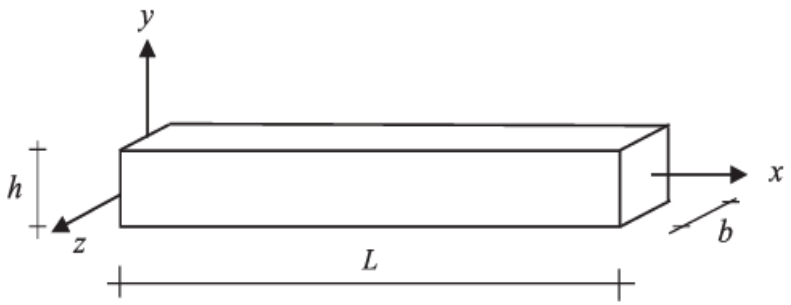
Nous avons étudié les trois cas de conditions aux limites suivantes:

Simplement supporté (*S-S*)

Encastré - Libre (*C-F*)

Encastré - Encastré (*C-C*)

Les résultats sont comparés à la référence [34] pour validation.

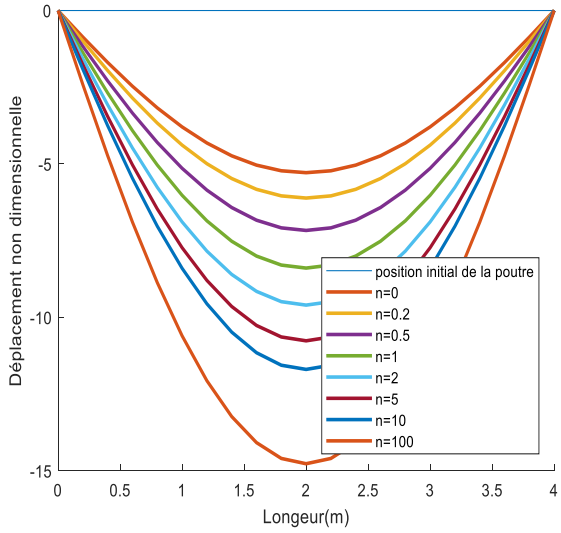


FigureV.14 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM **[34].**

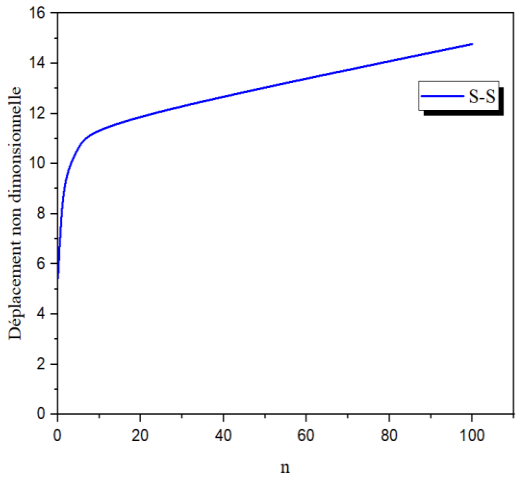
Tableau V. 7: flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*							
		0	0.2	0.5	1	2	5	10	100
S-S (TBT)	2	5.2842	6.1017	7.1199	8.2808	9.4315	10.6301	11.6211	14.7675
	4	5.2842	6.1090	7.1552	8.3656	9.5586	10.7308	11.6765	14.7679
	10	5.2842	6.1111	7.1651	8.3893	9.5942	10.7590	11.6920	14.7680
	REF [34]	5.26823	6.10338	_	8.36992	9.57240	10.72930	11.65586	15.05208
C-F	2	46.6576	54.0679	63.4189	74.0980	84 .3083	93.9197	102.0260	130.2457

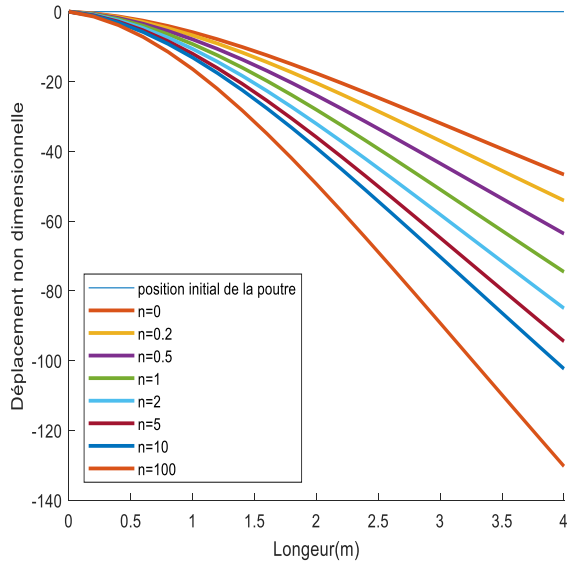
(TBT)	4	46.6576	54.0972	63.5602	74.4373	84.8167	94.3226	102.2477	130.2473
	10	46.6576	54.1054	63.5997	74.5323	84.9590	94.4354	102.3097	130.2478
	REF [34]	46.59375	54.12750	_	74.45500	84.87125	94.31625	102.16500	133.12500
C-C (TBT)	2	1.6384	1.8644	2.1285	2.4272	2.7770	3.2874	3.6866	4.5995
	4	1.6384	1.8717	2.1638	2.5120	2.9040	3.3881	3.7420	4.5999
	10	1.6384	1.8737	2.1737	2.5358	2.9396	3.4163	3.7575	4.6000
	REF [34]	1.62240	1.85849	_	2.51635	2.91781	3.38648	3.72130	4.63542



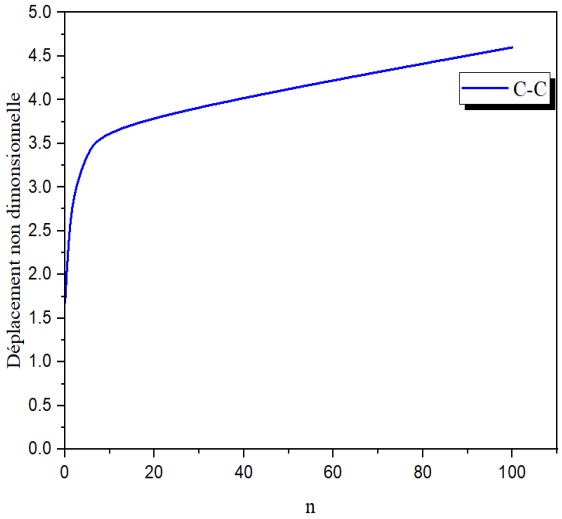
FigureV.15 : Déplacement transversal le long de la poutre (S-S)



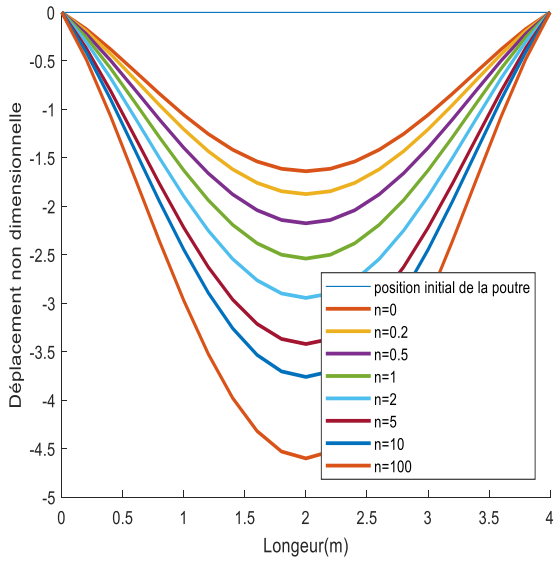
FigureV.16 : La variation de la flèche en terme de l'indice (n)



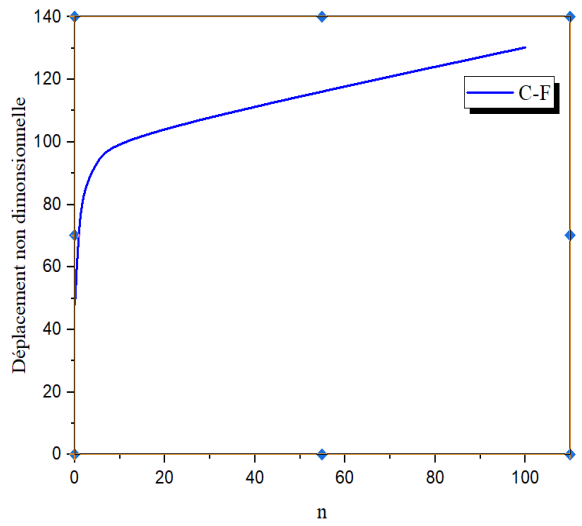
FigureV.17: Déplacement transversal le long de la poutre (C-F)



FigureV.18 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)



FigureV.19 : Déplacement transversal le long de la poutre (C-C)



FigureV.20: La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

Nous observant que :

- Pour *n*=0 (100% aluminium), les flèches sont minimales car le matériau est moins rigide.
- Pour *n*=100 (quasi 100% zircone), les flèches sont maximales en raison de la rigidité accrue.

- La variation est non linéaire, cohérente avec la loi de puissance (Power-Law) gouvernant la distribution des propriétés mécaniques.
- Les résultats pour 2, 4 et 10 éléments montrent une convergence progressive vers la solution de référence.
- Les flèches (C-F) sont beaucoup plus élevées que pour S-S (effet du porte-à-faux).
- Les flèches (C-C) sont les plus faibles (rigidité maximale).
- Le faible rapport L/h (poutre épaisse) accentue l'effet du cisaillement, justifiant l'usage de TBT.

Cas 5

On considère une poutre rectangulaire simplement appuyée de longueur $L=10m$, soumise à une charge répartie uniforme de $q = 1\ kN/m$. La poutre est en matériau à gradient fonctionnel (FGM), avec une variation continue des propriétés mécaniques selon l'épaisseur. On suppose que le élancement géométrique est $\frac{L}{h}$=100, ce qui permet d'utiliser la théorie d'Euler- Bérnoulli.

Deux types de FGM sont considérés :

1. P-FGM (Power-Law Functionally Graded Material)
2. E-FGM (Exponential Functionally Graded Material)

Les résultats sont comparés à une référence [35]

Les matériaux constituants sont :

Céramique : E_1= 390 GPa

Métal (acier):E_2= 210 GPa

Les flèches de la poutre FGM simplement appuyée avec les déflexions E-FGM, P-FGM et en acier homogène sont présentées dans les (tableaux V.8 et V.8).

Tableau V. 9: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
		0.1	1	5	10	100	Acier

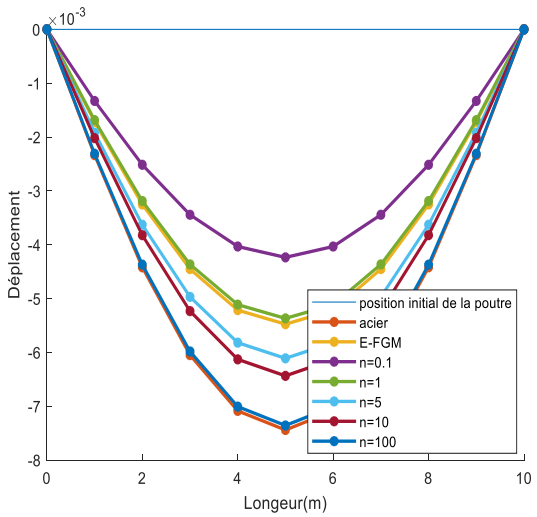
S-S	10	0.0042	0.0054	0.0061	0.0064	0 .0074	0.0074
	REF [35]	0.0042	0.0054	0.0061	_	_	0.0074

Tableau V. 10: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie.

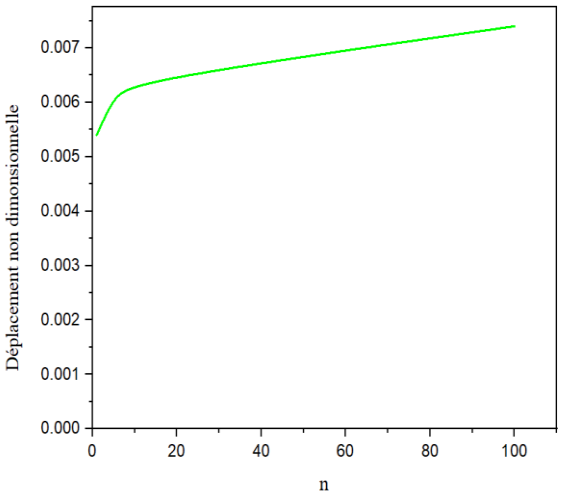
	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
S-S		0.1	1	5	10	100	E_FGM
	10	0. 0055	0. 0055	0. 0055	0. 0055	0. 0055	0 .0055
	REF [35]	_	_	_	_	_	0.0055

La différence clé entre P-FGM (Power-Law) et E-FGM (Exponentiel) réside dans leur distribution des propriétés mécaniques le long de l'épaisseur :

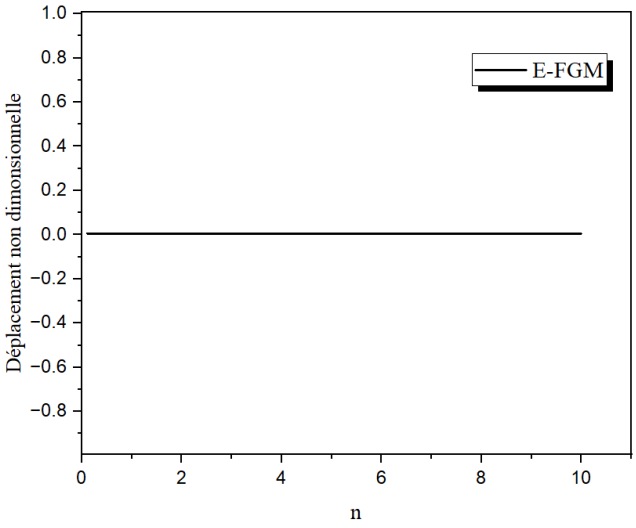
- P-FGM : La transition métal-céramique est progressivement ajustable via n, permettant un contrôle fin des propriétés mécaniques.
- P-FGM : Préféré pour des applications nécessitant un gradient ajustable (ex. optimisation).
- E-FGM : La transition est déterminée par l'exponentielle, conduisant à une rigidité effective unique pour un couple (E_c, E_m) donné.
- E-FGM : Utile pour des propriétés stables



FigureV.21: Déplacement transversal le long de la poutre(S-S)



FigureV.22 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)



FigureV.23 : La variation de la flèche en terme de l'indice(n)

Cas 6

On considère une poutre rectangulaire encastrée – libre de longueur *L=10m*, soumise à une charge concentrée de *q = 1 kN/m*. La poutre est en matériau à gradient fonctionnel (FGM), avec une variation continue des propriétés mécaniques selon l'axe longitudinal. On suppose que le élancement géométrique est $\frac{L}{h}$=100, ce qui permet d'utiliser la théorie d'Euler- Bérnoulli.

La variation des propriétés mécaniques suit une fonction puissance P-FGM (Power-Law)

Les matériaux constituants sont :

Céramique : E_1= 390 GPa

Métal(acier) :E_2= 210 GPa

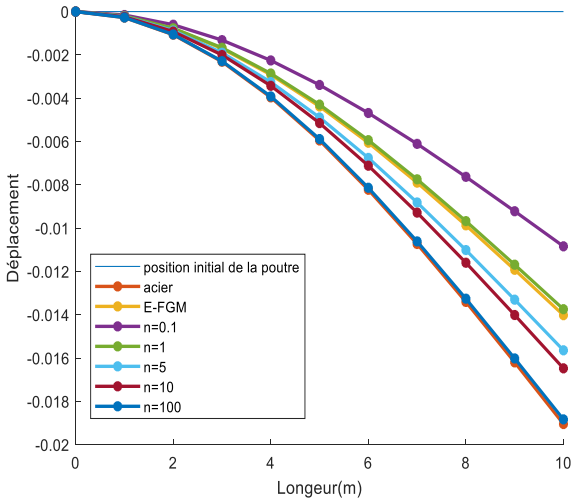
Tableau V. 11: Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge concentrée.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
C-F		0.1	1	5	10	100	Acier
	10	0.0108	0.0137	0.0156	0.0165	0.0188	0.0190
	REF [35]	0.0109	0.0138	0.0157	_	_	0.0192

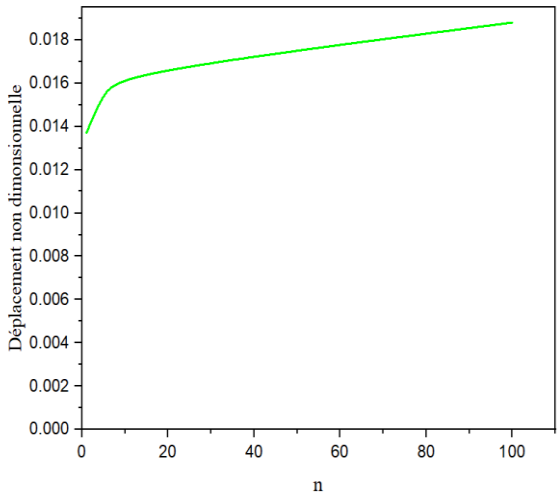
Tableau V. 12 : Flèches non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge concentrée.

	Nombre d'éléments	*Indice de puissance (n)*					
C-F		0.1	1	5	10	100	E_FGM
	10	0.0140	0.0140	0.0140	0.0140	0.0140	0.0140
	REF [35]	_	_	_	_	_	0.0131

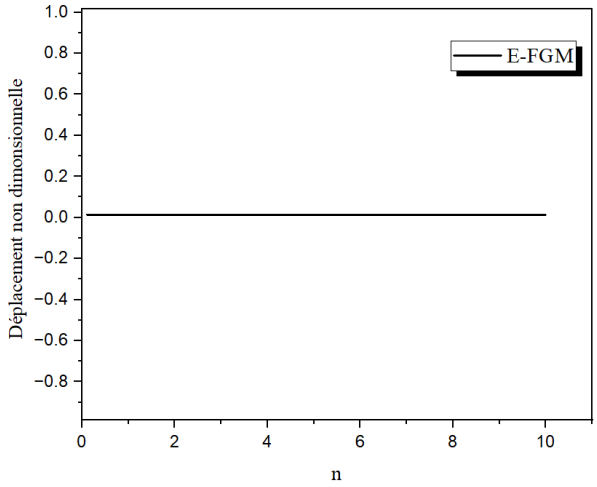
- On peut observer sur les (figures V.23 et V .24) que la flèche augmente avec *n* (gradient de matériau), mais reste inférieure à celle de l'acier homogène. Cela montre que le FGM permet de réduire la flèche tout en gardant une rigidité intermédiaire entre la céramique et le métal.
- La variation est non linéaire, ce qui est cohérent avec la loi de puissance (Power-Law) gouvernant la distribution des propriétés mécaniques.
- Les résultats pour 2, 4, et 10 éléments montrent une convergence progressive vers la référence.



FigureV.24 : Déplacement transversal le long de la poutre (C-F)



FigureV.25 : La variation de la flèche en terme de l'indice (n)



FigureV.26: La variation de la flèche en terme de l'indice (n)

V.3 Conclusion :

Ce chapitre a permis d'explorer le comportement mécanique des poutres FGM à travers des simulations numériques approfondies. Les principaux enseignements sont résumés ci-dessous:

- Les résultats convergent vers les solutions de référence avec l'augmentation du nombre d'éléments, validant la fiabilité du modèle.

- La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT) est convenable seulement pour les poutres minces ($L/h \geq 20$), mais elle sous-estime la flèche pour (L/h < 20).

- La théorie de Timoshenko (TBT) est indispensable pour les poutres épaisses ($L/h < 20$), capturant correctement les effets de cisaillement.

- Les poutres FGM avec ($n \rightarrow 0$) « dominance céramique » présentent une rigidité accrue, tandis que ($n \rightarrow inf$) « dominance métallique » augmente la flexibilité.

- La loi Power-Law (P-FGM) offre un contrôle fin de la transition, contrairement à la loi exponentielle (E-FGM) qui impose une rigidité effective fixe.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale :

Cette mémoire a permis de développer et valider un programme écrit en langage Matlab basé sur la méthode des éléments finis pour l'analyse des poutres FGM minces et épaisses. Les principaux résultats sont :

1. Les solutions convergent vers les solutions de références, confirmant la robustesse des modèles poutres FGM développés.
2. - La théorie d'Euler-Bernoulli (CBT) est convenable seulement pour les poutres minces ($L/h \geq 20$), mais elle sous-estime la flèche pour ($L/h < 20$).
3. - La théorie de Timoshenko (TBT) est indispensable pour les poutres épaisses ($L/h < 20$), capturant correctement les effets de cisaillement.
4. L'indice de puissance n influence significativement la rigidité et la flèche, avec des performances intermédiaires entre les extrêmes céramique ($n = 0$) et métallique ($n \rightarrow \infty$).
5. La loi de puissance (P-FGM) offre un contrôle fin de la transition, contrairement à la loi exponentielle (E-FGM) qui impose une rigidité effective fixe.

Les perspectives futures incluent l'extension aux vibrations libres, au flambement, et à l'optimisation des poutres FGM.

Références

[1] Abuteir, B. W., Harkati, E., Boutagouga, D., Mamouri, S., & Djeghaba, K. (2021). Thermo-mechanical nonlinear transient dynamic and Dynamic-Buckling analysis of functionally graded material shell structures using an implicit conservative/decaying time integration scheme. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *29*(27), 5773–5792.

[2] M. Mohamed, M.Tayeb, "Etude de la flexion statique et vibration libre des poutres FGM à l'aide de théorie de la déformation par cisaillement exponentiel", Mémoire de fin d'études. Université ibn Khaldoun de Tiaret .

[3] Kintek Solution, "Quels Sont Les Avantages Des Céramiques Par Rapport Aux Métaux ? Découvrez Leurs Performances Supérieures Dans Des Conditions Extrêmes," *Kintek Solution*, [En ligne].

[4] Kintek Solution, "Quels Sont Les Deux Inconvénients Du Métal ?", *Kintek Solution*, [En ligne].

[5] Dieffebi, « Quali sono i vantaggi dell'uso del metallo », *Dieffebi*, [En ligne].

[6] Bessaim, A. & Houari, M. & Megueni, A. & Tounsi, A. & Bedia Adda, E. (2013). *Analyse Statique De La Flexion Des Poutres Zro2/ Ti-6al-4v En P-fgm* [Articles Scientifiques Et Publications, Université Hassiba Ben Bouali - Chlef].

[7] Bao G. and Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. Int. J ; Solids Structures, 32(119) :28532871, 1995.

[8] Chen, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. "On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate", Compos. Struct., 81, 233-242. (2009/2007).

[9] Abuteir, B.W., Boutagouga, D. Free-vibration response of functionally graded porous shell structures in thermal environments with temperature-dependent material properties. *Acta Mech* 233, 4877–4901 (2022).

[10] Félix Balima. Structure et porosité de systèmes lamellaires sous haute pression : cas du

graphite et de la vermiculite. Science des matériaux. Université Claude Bernard - Lyon I, 2012. Français. tel-00845579 [20] INAGAKI, Michio. Pores in

carbon materials-importance of their control. New Carbon Materials, 2009, vol. 24, no 3,

p. 193-232.

[11] Clément, Phillipe. Détermination des propriétés mécaniques de céramiques poreuses par essais de microindentation instrumentée sphérique. Mémoire de doctorat. INSA de Lyon.2013.

[12] Dean, E. A. et Lopez, J. A. Empirical dependence of elastic module on porosity for ceramic materials. Journal of the American Ceramic Society, 1983, vol. 66, no 5, p. 366

[13] EinsteinI, Albert. Einstein bestimmung der moleküldimensionen. Annalen der Physik, 1906, vol. 324, no 2, p. 289

[14] Kovacik, J. Correlation between elastic modulus, shear modulus, Poisson's ratio and porosity in porous materials. Advanced Engineering Materials, 2008, vol. 10, no 3, p. 250

[15] Kovacik, J. Correlation between shear modulus and porosity in porous

[16] Koo J.H, “Polymer Nano composites : Processing, characterization, and applications”, Editeur : MC Graw – Hill, (2006)

[17] Ashby, M.F., Evans, T., Fleck, N.A., et al. : Metal Foams: A Design Guide. Butterworth Heinemann, Boston (2000)

[18] Khelifa_Zoubida .Analyse et modélisation de l’influence de cisaillement transverse sur le comportement statique et dynamique des poutres FGM. Mémoire de Doctorat de l’université de DjillaliJI LiabesI de Sidi Bel Abbes .2016.

[19] Mechanics of Materials" by Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., John T. DeWolf

[20] Methods des éléments finis approche pratique en mécanique des structures.

[21] [Hadji, 2013]HADJI LAZREG « Analyse du comportement dynamique des poutres à gradient de propriétés type FGM. » Séminaire de Mécanique, SNM’13, 2013.

[22] L. Euler, "Theory of beams," *1757.*

[23] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, 4th ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2007.

[24] Dufort, L., S. Drapier, and M. Grédiac. "Closed-Form Solution For The Cross-Section Warping In Short Beams Under Three-Point Bending". Composite Structures 52 (2): 233 246. doi:10.1016/s0263-8223(00)00171-9. 2001.

[25] S. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 43, no. 1, pp. 1-10, 1921.

[26] Book : Finite Element Analysis : Theory and Application with ANSYS by Saeed Moaveni - ANSYS.

[27] Book : The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals by O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor

[28] Boutagouga, D. (2020), "A formulation of membrane finite elements with true drilling rotation: The compatible triangular element", Engineering Computations, Vol. 37 No. 1, pp. 203-236.

[29] Y. Djarir, «Résumé du cours de Méthode des Éléments Finis » Université BATNA 2, Année universitaire 2019-2020.

[30] Y. Debard, *Cours de flexion XY*, Institut Universitaire de Technologie du Mans, Département Génie Mécanique et Productique. [En ligne]. Disponible: http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html. [Consulté le: 2 juin 2025].

[31] Thai, H., & Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences, 62*(1), 57–66.

[32] Li XF, Wang BL, Han JC. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. Arch Appl Mech 2010;80(10):1197–212.

[33] Katili, I., Syahril, T., & Katili, A. M. (2020). Static and free vibration analysis of FGM beam based on unified and integrated of Timoshenko's theory. *Composite Structures, 242*, 112130.

[34] Vo TP, Thai HT, Nguyen TK, Inam F. Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. Mecc 2014;49:155–68.

[35] Althoey, F., & Ali, E. (2021). A simplified stress analysis of functionally graded beams and influence of material function on deflection. *Applied Sciences (Switzerland), 11*(24), undefined–undefined.