TABLE DES MATIÈRES

Introduction **3**

1 Notions Préliminaires **4**
1.1 Système dynamique 4
1.2 Flot 4
1.3 Point critique 4
1.4 Point critique hyperbolique 5
1.5 Point singulier non dégénéré 5
1.6 Orbite périodique 5
1.7 Cycle limite 5
1.8 Cycle limite hyperbolique 6
1.9 Solution stable et asymptotiquement stable 6
1.10 Classification des points d'équilibre de système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^2$ 6
1.11 Théorème de Bezout 12
1.12 Intégrabilité des systèmes différentiels 12
1.13 Fonctions homogènes de degré α 13

2 Bifurcation de cycles limites dans un centre à quatre dimensions **14**
2.1 Introduction et résultats principaux 14
2.2 La méthode de moyennisation du premier ordre 16
2.3 Système moyenné 18
2.4 Les fonctions $h_i(r, \rho, s)$ pour $i = 1, 2, 3$ 20
2.5 Cas N est pair 26
2.5.1 Preuve du théorème 2.1.1 26
2.6 Cas N est impair 28
2.6.1 Preuve du théorème 2.1.2 29

3 Bifurcation de cycles limites dans un centre à deux dimensions isochrones cylindre **30**
3.1 Introduction et résultats principaux 30
3.2 Preuve du théorème 3.1.2 32

Conclusion **35**

Bibliographie **36**

Remerciements

Dédicace

Résumé

Dans ce mémoire, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier les cycles limites du système différentiel perturbé sous la forme

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x).$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

et ε est un paramètre suffisamment petit, $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est un polynôme de la forme $F(x) = F_1(x) + F_N(x)$ avec F_K un polynôme homogène de degré k en les variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Nous étudions aussi l'existence des cycles limites du système différentiel perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1) - y + \varepsilon P(x, y, z) \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1) + x + \varepsilon Q(x, y, z) \\ \dot{z} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon R(x, y, z). \end{cases}$$

Où ε est un paramètre suffisamment petit et P, Q et R sont des polynômes arbitraires en les variables (x, y, z).
Mots clés : Cycle limite ; méthode de moyennisation ; système différentiel.

Abstract

In this work, we use the averaging method of the first order to study the limit cycles of the perturbed differential system of the form

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x).$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

and ε is a sufficiently small parameter, $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is a polynomial of the form $F(x) = F_1(x) + F_N(x)$ with F_K a homogeneous polynomial of degree k in the variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
We also study the existence of the limit cycles of the perturbed differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1) - y + \varepsilon P(x, y, z) \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1) + x + \varepsilon Q(x, y, z) \\ \dot{z} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon R(x, y, z). \end{cases}$$

where ε is a sufficiently small parameter, P, Q and R are arbitrary polynomials in the variables (x, y, z).
Keywords : Limit cycle ; averaging method ; differential system.

Introduction

Soit le systéme différentielle dans $\mathbb{R}^2$ à la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

Où P et Q sont des polynômes de degré au plus d. Nous rappelons qu'un cycle limite de systéme différentielle (1) est une orbite périodique de cette systeme isolé dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de systeme (1). La notion de cycle limite apparaît dans les années 1891 et 1897 dans les travaux de Poincaré [18]. En outre, il a prouvé qu'une systéme différentielle polynomiale (1) sans connexions de selle a un nombre fini de cycles limites, voir [18].
Hilbert au deuxième congrès international de Mathématiciens, célébrés à Paris en 1900, a proposé une liste de 23 problèmes pertinents pour être résolu pendant le XX siècle. Le $16^{ème}$ problème de la liste est : $16^{ème}$ problème de la topologie de courbes algébriques et surfaces.

Le nombre maximal de branches fermées et séparées qu'une courbe algébrique plane du $n^{ème}$ ordre a été déterminé par Harnack. La question suivante se pose quant à la position relative des branches dans le plan.

Jusqu'à présent, en effet, on ne sait même pas quel est le nombre maximum de feuilles qu'une surface du $4^{ème}$ordre dans l'espace de dimension 3 peut vraiment avoir. En ce qui concerne ce problème purement algébrique, Jaume Llibre se pose une question qui, semble, peut être attaquée par la même méthode de variation continue des coefficients, et dont la réponse est une valeur correspondante pour la topologie des familles de courbes définies par systéme différentielles. Il s'agit de la question du nombre maximal et la position de cycles limites de Poincaré pour une systéme différentielle du premier ordre de degré donné à la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

où X et Y sont des fonctions intégrales rationnelles du $n^{ème}$ degré en x et y. Ecrits de façon homogène

$$X\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+Y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+Z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$$

où X , Y et Z sont des fonctions homogènes rationnelles intégrales du $n^{ème}$ degré en x, y, z, et ces derniers doivent être déterminés comme des fonctions du paramètre t.

Il est clair que le $16^{ème}$ problème de Hilbert est formulé en deux parties. La première partie concerne la disposition réciproque du nombre maximal de branches séparées d'une courbe algébrique et son extension aux variétés algébriques réelles non singulières. Dans la deuxième partie, il a cherché le nombre maximal et la position réelle de la limite du système différentiel (1). Habituellement, la première partie du $16^{ème}$ problème de Hilbert est étudiée par des recherches en géométrie algébrique réelle, tandis que la seconde partie est considérée par des mathématiciens travaillant dans des systèmes dynamiques ou des équations différentielles.

Hilbert a également souligné qu'il existe des connexions possibles entre ces deux parties. Certaines de ces connexions sont décrites dans l'enquête sur le $16^{ème}$ problème de Hilbert écrit par jibin Li, voir [12]. Dans ce qui suit, lorsque nous parlons du $16^{ème}$ problème de Hilbert. En 1988, Noel LIyd [14] a observé avec le $16^{ème}$ problème de Hilbert que l'aspect est émouvant est que l'hypothèse est algébrique, alors que la conclusion est topologique. Arnold en 1977 et 1983 (voir [1] et [2], respectivement) ont affaibli, infinitésimal ou tangentiel le $16^{ème}$ problème de Hilbert qui ne sera pas considéré ici, mais il existe d'excellentes enquêtes pour ce problème, voir par exemple l'enquête d'Ilyashenko [10] sur le $16^{ème}$ problème de Hilbert, le sondage déjà mentionné de Jibin Li, ou le livre de Colin Christopher et Chengzhi Li [8], ou l'enquête due à Kaloshin [11], ou celle de Yakovenko [24], ou plus récemment le travail de Binyamini, Novikov et Yakovenko [3].

Selon Smale [21], à l'exception de l'hypothèse de Riemann, la deuxième partie du $16^{ème}$ problème de Hilbert semble être le plus évasif des problèmes de Hilbert. Smale déclare la version moderne suivante de la seconde moitié du $16^{ème}$ problème de Hilbert.

Considérons l'équation différentielle polynomiale (1) dans $\mathbb{R}^2$. Y a-t-il K lié sur le nombre de cycles limites de la forme $K \leq d^q$ où d est le maximum des degrés de P et Q et q est une constante universelle ?

La distribution possible ou les configurations topologiques des cycles limites mentionnées comme position pour Hilbert a également intéressé beaucoup d'auteurs. Dans son ouvrage [7] sur le problème de $16^{ème}$ Hilbert, Coleman a dit : Pour $d > 2$, le nombre maximal d'yeux n'est pas connu, ni est-il connu quels patrons complexes d'yeux dans les yeux, ou les yeux entourant plus d'un point critique, peuvent exister. Ici, «œil» signifie un nœud de cycles limite. Nous verrons plus loin que certaines des questions sur les configurations topologiques possibles de cycles limites réalisées

par des équations différentielles polynomiales peuvent être facilement résolues.

Un autre problème très lié au $16^{ème}$problème de Hilbert est l'étude des bifurcations possibles des cycles limites. Encore une fois ce problème ne sera pas considéré ici, voir de bonnes informations à ce sujet dans l'enquête de jibin Li, ou les livres de Chritopher et ChengZhi Li, Yankian Ye [25], Zhifen Zang et al [26].

Ce mémoire est organisé en 3 chapitres qui se présentent comme suit :

Le premier chapitre comporte un rappel des notions préliminaires des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre on étudie le nombre maximum de cycles limites du système différentiel provenant de la perturbation du centre linéaire de dimension 4 suivant

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x).$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

n un entier positif, ε est un paramètre suffisamment petit et $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est un polynôme de la forme $F(x) = F_1(x) + F_N(x)$ avec F_K un polynôme homogène de degré k en les variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Dans le troisième chapitre on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier l'existence des cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1) - y + \varepsilon P(x, y, z) \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1) + x + \varepsilon Q(x, y, z) \\ \dot{z} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon R(x, y, z). \end{cases}$$

Où ε est un paramètre suffisamment petit et P, Q et R sont des polynômes arbitraires en les variables (x, y, z).

CHAPITRE 1

Notions Préliminaires

Ce chapitre contient quelques notions préliminaires des systèmes dynamiques.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tel que*

(1) $\psi(.,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue*
(2) $\psi(t,.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *est continue*
(3) $\psi(0,x) = x$
(4) $\psi(t+s,x) = \psi(t,\psi(s,x)) \ \ \forall t,s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

1.2 Flot

Définition 1.2.1 *On appelle flot du système différentiel* $\dot{x} = f(x)$ *où* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $f(x) \in \mathbb{R}^n$ *l'ensemble des applications* $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *définies par* $\phi_t(x_0) = \phi(t,x_0)$ *où* $\phi(t,x_0)$ *est la solution de ce système telle que* $\phi(0,x_0) = x_0$.

1.3 Point critique

Définition 1.3.1 *On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel non linéaire* $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *le point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(x_0) = 0$.

1.4 Point critique hyperbolique

Définition 1.4.1 *Soit le système différentiel non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

Soit x_0 un point critique de (1.1)*. Soit le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax \text{ ou } A = Df(x_0) \tag{1.2}$$

Ax est une bonne approximation de (1.1) *au voisinage de x_0. Un point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de A n'a de partie réelle nulle.*

1.5 Point singulier non dégénéré

Définition 1.5.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y). \end{cases} \tag{1.3}$$

On dira qu'un point singulier (x_0, y_0) du système différentiel (1.3) *est non dégénéré si*

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

1.6 Orbite périodique

Définition 1.6.1 *On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Gamma_t(x)$ du système différentiel non linéaire* (1.1) *telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant*

$$\Gamma(t+T, x) = \Gamma(t, x) \text{ pour } T > 0$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie la formule précédent est appelé période.

1.7 Cycle limite

Définition 1.7.1 *Un cycle limite est une orbite fermée isolé, c'est à dire au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermé. La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.*

1.8 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.8.1 *Supposons que le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1.4}$$

a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ *de période* T. *Soit*

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t))\, dt.$$

Si $\delta > 0$ *(resp.* $\delta < 0$*) alors l'orbite périodique* $(x(t), y(t))$ *est un cycle limite instable (resp.stable). Une orbite périodique* $(x(t), y(t))$ *ayant* $\delta \neq 0$ *est un cycle limite hyperbolique.*

1.9 Solution stable et asymptotiquement stable

Définition 1.9.1 *Soit le système*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ , x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

En suppose que $f(t,x)$ *satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solution [9]. Une solution* $\phi(t)$ *du système* (1.5) *telle que* $\phi(t_0) = \phi_0$ *est dit stable au sens de Lyapunov si :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *tel que pour toute solution* $x(t)$ *dont le valeur initiale* $x(t_0)$ *vérifie :*

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \quad \Rightarrow \ \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

si en plus : $\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$, *alors la solution* $\phi(t)$ *est un asymptotiquement stable.*

1.10 Classification des points d'équilibre de système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Considérons le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On supposera $\det A \neq 0$; L'origine est un seul point critique de ce système.
(1) Les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles

Supposons de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

_et le système se réduit à

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases}$$

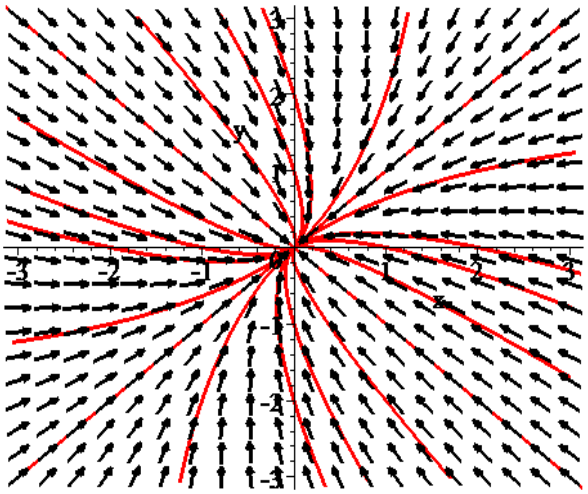
la solution du problème de Cauchy avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est donc

$$\begin{cases} x\,(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y\,(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

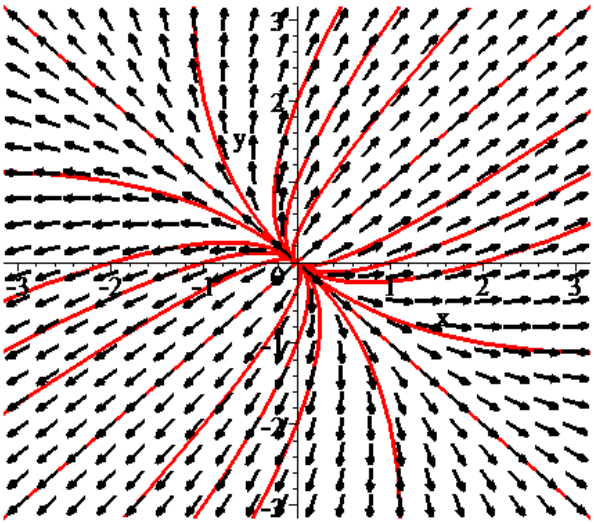
$$y = C\,|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\,,\ C \in \mathbb{R},$$

telle que C cst ,et la droite d'équation $x = 0$. Distinguons deux sous-cas
λ_2, λ_1 de même signe et, disons, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. On a alors $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$. On dit qu'on a affaire à un noeud impropre.
Si λ_1 et λ_2 sont < 0, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ le point d'équilibre $(0, 0)$ est noeud impropre stable



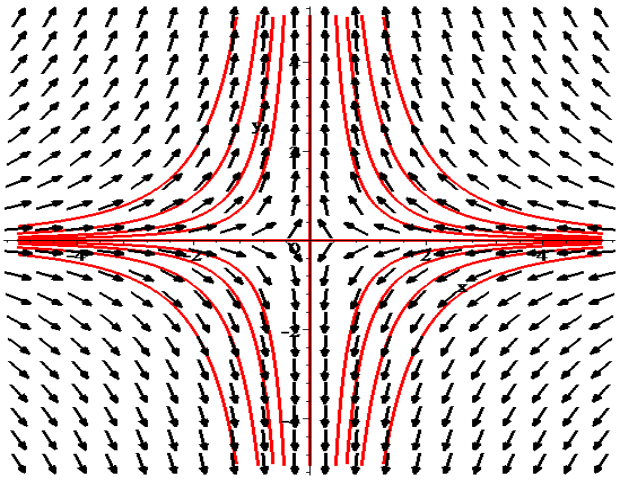
noeud impropre stable

Si λ_1 et λ_2 sont > 0, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ le point d'équilibre $(0, 0)$ est noeud impropre instable



Noeud impropre instable

si λ_1, λ_2 de signes opposés, par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il s'agit d'un col (selle) toujours instable

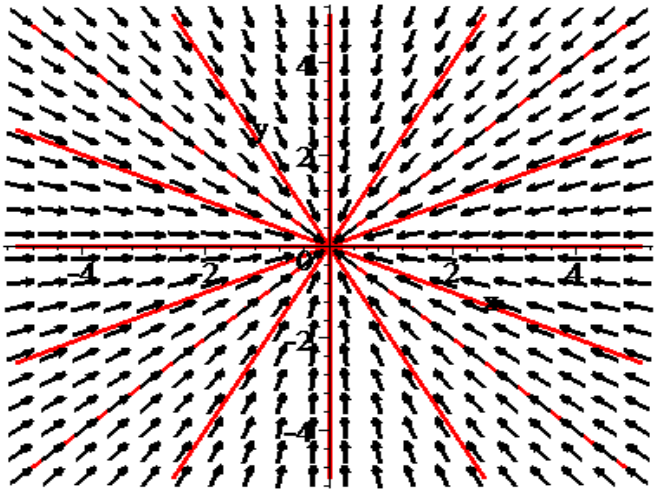


Selle

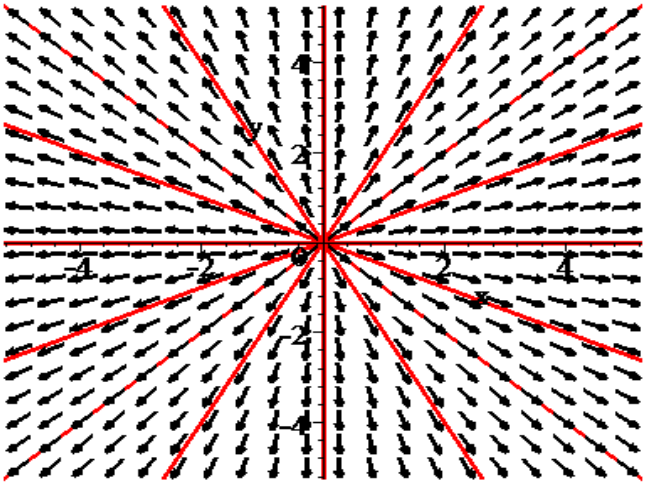
Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Deux cas sont possibles.
(**a**) A est diagonalisable. Alors A est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

ce sont les droites $y = \alpha x$ et $x = 0$. On dit qu'on a affaire à un noeud propre

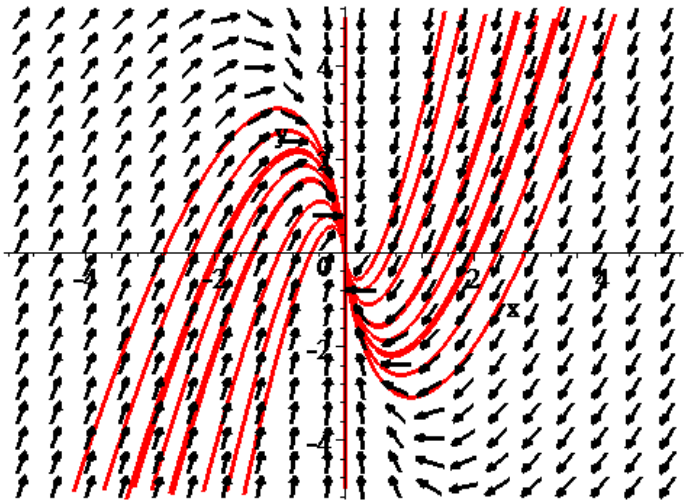


Noeud propre stable si : $\lambda < 0$

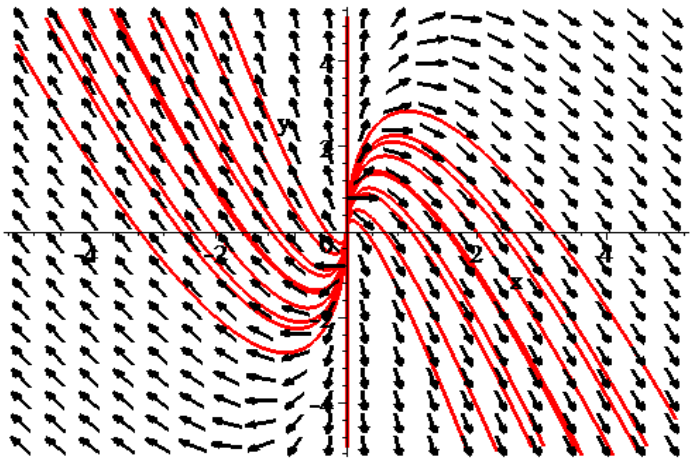


Noeud propre instable si : $\lambda > 0$

(**b**) A est non diagonalisable. Le point d'équilibre $(0, 0)$ est un noeud exceptionnel.



Noeud exceptionnel stable si : $\lambda < 0$

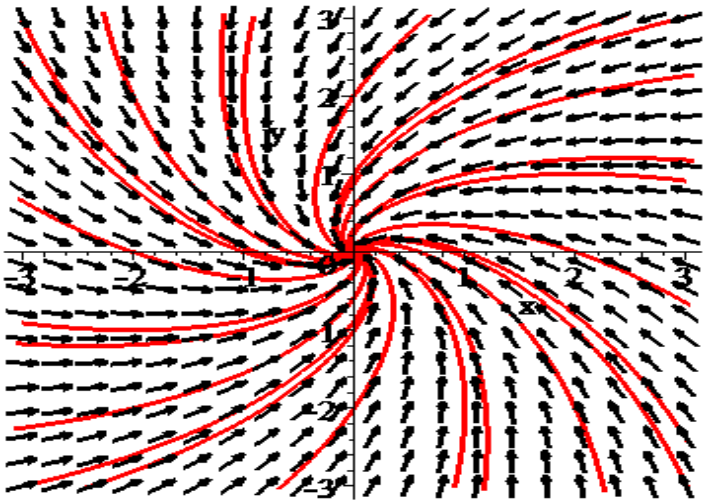


Noeud exceptionnel instable si : $\lambda > 0$

(2) Les valeurs propres de A sont complexes

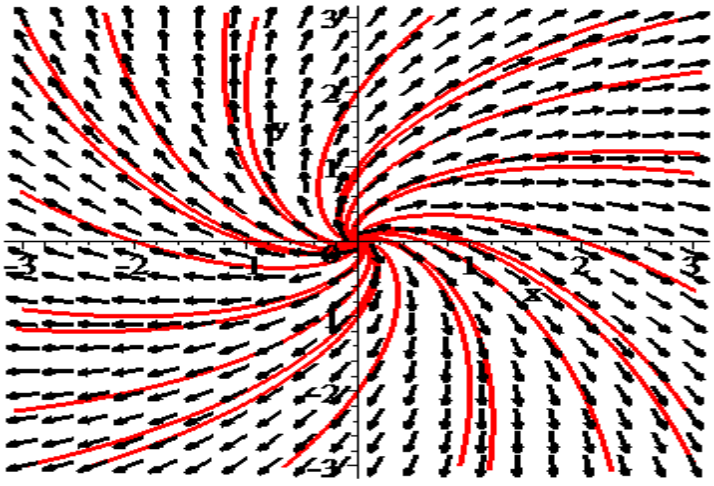
(a) Si λ_1 et λ_2 complexe conjuguées avec la partie réelle non nulle, ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$)

Le point d'équilibre $(0, 0)$ est foyer stable si $\alpha < 0$.



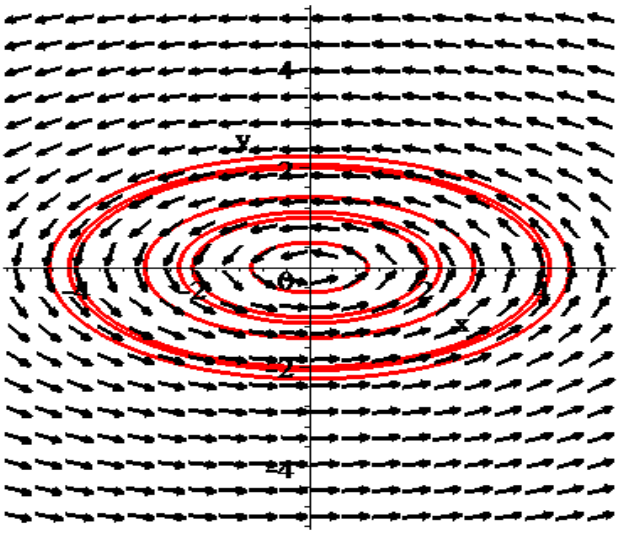
Foyer stable

Le point d'équilibre $(0, 0)$ est foyer instable si $\alpha > 0$.



Foyer instable

(b) Si λ_1 et λ_2 imaginaires pures, ($\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$) le point d'équilibre $(0, 0)$ est centre.



centre

1.11 Théorème de Bezout

Théorème 1.11.1 *Soient P_j, $j = 1, ..., n$ des polynomes en ces variables $(x_1, x_2, .., x_d)$ de dégré d_j, $j = 1, ..., n$.*
Considérons le système polynomial suivant

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, ..., x_d) = 0, \\ ..... \\ P_n(x_1, x_2, ..., x_d) = 0. \end{cases}$$

Où $(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par

$$d_1 \times d_2 \times ... \times d_n.$$

voir [20].

1.12 Intégrabilité des systèmes différentiels

Soient U un ouvert du plan et $(x(t), y(t))$ une solution du système (1.3) on note

$$\Delta^U_{(x,y)} = \{t \in \mathbb{R} \,|(x(t), y(t)) \in U\}$$

L'application $H : U \to \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système sur U si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.3) contenue dans U, i.e

$$H(x(t), y(t)) = cste,\ t \in \Delta^U_{(x,y)}$$

Définition 1.12.1 *On dit que le système différentiel* (1.3) *est intégrable sur un ouvert U du plan, s'il admet une intégrale première sur U.*

1.13 Fonctions homogènes de degré α

Définition 1.13.1 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si, pour tout réel strictement positif λ*

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

CHAPITRE 2

Bifurcation de cycles limites dans un centre à quatre dimensions

Dans ce chapitre on étudie le nombre maximum de cycles limites du système différentiel perturbé suivant

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x).$$

Où ε est un paramètre suffisamment petit et $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est un polynôme de la forme $F(x) = F_1(x) + F_N(x)$ avec F_K un polynôme homogène de degré k en les variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

2.1 Introduction et résultats principaux

Dans la théorie qualitative de l'équation différentielle, l'étude de leurs cycles limites est devenue l'un des sujets principaux. Pour une équation différentielle donnée ε un cycle limite est une orbite périodique de ε isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ε. Beaucoup de questions se posent sur les cycles limites des équations différentielles planaires. Deux lignes principales de recherche pour de telles équations sont, d'abord le $16^{ème}$ problème de Hilbert, voir par exemple [10],[12] et l'étude du nombre de cycles limites émergeant des orbites périodiques d'un centre quand on le perturbe à l'intérieur d'une classe donnée d'équations différentielles, voir, par exemple, le livre [8] et ses références. Et plus précisément le problème de centre linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

et perturbation de cela

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x,y), \end{cases}$$

à l'intérieur d'une classe donnée d'équations différentielles polynomiaux et étudier les cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire a attiré l'intérêt et la recherche de nombreux mathématiciens. Naturellement, ε est un petit paramètre. Voici notre principal concernant, on doit apporter ce problème à la dimension plus haute. Dans ce chapitre nous considérons le centre linéaire à quatre dimensions

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

avec n un entier positif et nous perturbons

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x). \tag{2.2}$$

Où ε est un paramètre suffisamment petit et $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est un polynôme de la forme $F(x) = F_1(x) + F_n(x)$ avec F_K un polynôme homogène de degré k en les variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Nos deux résultats principaux sont donnés dans les deux théorèmes suivants

Théorème 2.1.1 *Supposons que $n \geq 2$ est pair*
(a) Si $\varepsilon \neq 0$ est suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites de l'équation différentielle (2.2) qui bifurquent à partir des orbites périodiques du centre linéaire (2.1). Si la fonction de déplacement d'ordre ε n'est pas identiquement nulle est au plus $2n$.
(b) Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \varepsilon \left(2a_1 x_1 - 2^N b_1 x_1^{N-2} x_2 x_3\right) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon \left(-2a_3 x_1 - 2^N c_1 x_1^{N-2} x_2 x_3\right) \\ \dot{x}_3 = -N x_4 + \varepsilon \left(2a_2 x_1 - 2^N b_2 x_1^{N-1} x_2\right) \\ \dot{x}_4 = N x_3 + \varepsilon 2^N C_2 x_1^{N-1} x_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

admet $2n$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire (2.1).

Théorème 2.1.2 *Supposons que $n \geq 3$ est impair.*
(a) Si $\varepsilon \neq 0$ est suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites de l'équation différentielle (2.2) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire (2.1) si la

fonction de déplacement d'ordre ε n'est pas identiquement nulle est au plus $n(n+2)$.
(b) Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, il existe des équations différentielles (2.2) *ayant $n(n+2)$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire* (2.1) *si $n = 3, 5, 7, 9$.*

Conjecture 2.1.1 *L'énoncé (b) du théorème* 2.1.2 *est valable pour chaque $n \geq 3$ est impair.*
Il faut remarquer que le théorème 1.2 *n'a pas de signification pour $n = 1$ alors nous sommes perturbant le centre linéaire*

(2.1) *à l'intérieur de la classe des équations différentielles linéaires, et il est bien connu que les équations différentielles linéaires n'ont pas de cycles limites.*
On note que la perturbation polynomiale $F(x)$ des termes homogènes de degré n que nous considérons qu'il couvre complètement l'ensemble des perturbations polynomiales du système (2.2) *de degré $n = 2, 3$.*
Pour $n = 2$, ceci est évident, et pour $n = 3$, cela découle du fait qu'en utilisant des formes normales nous pouvons éliminer

tous les termes de degré 2 *dans la perturbation. Pour plus de détails sur ces formes normales, voir [17].*
Dans la section 2.2, *nous introduisons les résultats de base sur la méthode de moyennisation. Nous avons besoin pour*

prouver les théorèmes 2.1.1 *et* 2.1.2. *L'équation différentielle* (2.2) *est écrite sous la forme normale pour appliquer la méthode de moyennisation à la section* 2.3. *Dans la section* 2.4, *nous avons fait les calculs principaux liés à l'application de la méthode de moyennisation à nos équations différentielles* (2.2).

2.2 La méthode de moyennisation du premier ordre

Le but de cette section est de présenter la méthode de moyennisation du premier ordre telle qu'elle a été obtenue.
Dans [4] les fonctions moyennes sont données en fonction du degré de Brouwer. Nous rappelons ici que la continuité de certaines fonctions de dimension finie est une condition suffisante pour l'existence de son degré de Brouwer (voir [13] pour des définitions précises).

Théorème 2.2.1 *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x} = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \tag{2.4}$$

où $H : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f.\varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, $T-$périodiques en la première variable t, et D est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $h : D \to \mathbb{R}^n$ par

$$h(z) = \int_0^T H(s, z)\, ds, \tag{2.5}$$

et on suppose que
(i) H *et* R *sont localement Lipschitzienne par rapport à* x,
(ii) *pour* $a \in D$ *avec* $h(a) = 0$, *il existe un voisinage* V *tel que* $h(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in V \setminus \{a\}$ *et* $d_B(h, V, a) \neq 0$ (*ici* $d_B(h, V, a)$ *désignent le degré de Brouwer de* h *en* a).
Alors pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution* $T-$*périodique isolée* $\varphi(., \varepsilon)$ *de système* (2.4) *tel que* $\varphi(a, 0) = 0$.
Ici nous aurons besoin de quelques faits de la démonstration du théorème 2.2.1. *L'hypothèse* (i) *assure l'existence et l'unicité de chaque problème de valeur initiale sur l'intervalle* $[0, T]$.
Ainsi, pour tout $z \in D$, *il est possible de désigner par* $x(., z, \varepsilon)$ *la solution de* (2.4)*) avec l'initiale* $x(0, z, \varepsilon)$. *On considère*
aussi la fonction $\zeta : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *définie par*

$$\zeta(z; \varepsilon) = \int_0^T \left(\varepsilon H(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)\right) dt.$$

D'après la démonstration du théorème 2.2.1, *nous extrayons les faits suivants.*

Remarque 2.2.1 *Sous les hypothèses du théorème* 2.2.1 *pour tout* $z \in D$ *on obtient alors la relation*

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon).$$

En outre, la fonction ζ *peut-être écrit dans la forme*

$$\zeta(z, \varepsilon) = \varepsilon h(z) + o(\varepsilon^2).$$

Où h *est donné par* (2.5) *et le symbole* $o(\varepsilon^2)$ *désigne une fonction bornée sur chaque sous-ensemble compact de* $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ *multiplié par* ε^2.
On remarque que d'après la remarque 1, un zéro de la fonction de déplacement $\zeta(z, \varepsilon)$ *au temps* T *fournit les conditions initiales d'une orbite périodique du système de la période* T. *Nous remarquons également que* $h(z)$ *est la fonction de déplacement vers le haut à des conditions d'ordre* ε. *Par conséquent, les zéros de* $h(z)$, *quand* $h(z)$ *n'est pas identiquement nul, fournit également des orbites périodiques de la période* T.
Pour un système donné, il est possible que la fonction ζ *ne soit pas globalement différentiable, mais la fonction* h *est globalement différentiable. En fait, seule la différentiabilité dans certains voisinages d'un zéro isolé fixe de* f *pourrait suffire. Lorsque c'est le cas, on peut utiliser la remarque suivante pour vérifier l'hypothèse* (ii) *du théorème* 2.2.1.

Remarque 2.2.2 *Soit* $h : D \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* C^1, *avec* $h(a) = 0$, *où* D *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in D$. *Quand* a *est un simple zéro de* h *(c'est-à-dire que le Jacobien de* f *en* a *n'est pas nul), alors un voisinage* V *existe tel que* $h(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$. *Alors* $d_B(f, V, a) \in \{-1, 1\}$.

2.3 Système moyenné

On considère $F_1 = (F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4)$ et $F_N = (F_n^1, F_n^2, F_n^3, F_n^4)$, alors le système (2.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \varepsilon(F_1^1(x) + F_n^1(x)) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon(F_1^2(x) + F_n^2(x)) \\ \dot{x}_3 = -nx_4 + \varepsilon(F_1^3(x) + F_n^3(x)) \\ \dot{x}_4 = nx_3 + \varepsilon(F_1^4(x) + F_n^4(x)) \end{cases} \tag{2.6}$$

Lemme 2.3.1 *En faisant les changements des variables*

$$\begin{array}{ll} x_1 = r\cos\theta, & x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = \rho\cos(n(\theta+s)), & x_4 = \rho\sin(n(\theta+s)), \end{array}$$

le système (2.6) *s'écrit*

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + O(\varepsilon^2) \\ \dfrac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + O(\varepsilon^2) \\ \dfrac{ds}{d\theta} = \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{2.7}$$

où

$$\begin{aligned} H_1 &= (F_1^1 + F_n^1)\cos\theta + (F_1^2 + F_n^2)\sin\theta \\ H_2 &= (F_1^3 + F_n^3)\cos(n(\theta+s)) + (F_1^4 + F_n^4)\sin(n(\theta+s)) \\ H_3 &= 1/n\rho((F_1^4 + F_n^4)\cos(n(\theta+s)) - (F_1^3 + F_n^3)\sin(n(\theta+s)) \\ &\quad -1/r(F_1^2 + F_n^2)\cos\theta + (F_1^1 + F_n^1)\sin\theta). \end{aligned}$$

Preuve. le système (2.6) en les variables (θ, r, ρ, s) devient

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 + \dfrac{\varepsilon}{r}(\cos(F_1^2 + F_n^2)\cos\theta - \sin(F_1^1 + F_n^1)) \\ \dot{r} = \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s), \\ \dot{\rho} = \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s), \\ \dot{s} = \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s). \end{cases} \tag{2.8}$$

Nous remarquons que pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, $\dot{\theta}(t) > 0$ pour chaque $(t, (\theta, r, \rho, s)) \in \mathbb{R} \times D$. Maintenant nous éliminons la variable t dans le système ci-dessus en considérant θ comme la nouvelle variable indépendante. Il est facile de voir que le côté droit du nouveau système est bien défini et continu dans $\mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$, il est $2\pi-$périodique par rapport à la variable indépendante θ et localement lipschitzienne

par rapport à (r, ρ, s). A partir de (2.8), on obtient après une expansion par rapport au petit paramètre ε.
Dans ce qui suit, on suppose que

$$F_1^g + F_2^g = \sum_{i+j+k+L=1} a_{ijkl}^g x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l + \sum_{i+j+k+l=n} a_{ijkl}^g x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l$$

pour $g = 1, 2, 3, 4$.
Maintenant nous allons prouver un résultat technique dont on aura besoin plus tard.
■

Lemme 2.3.2 *Soit n un nombre entier non négatif et α, β sont des nombres réels. Les énoncés suivants sont valides.*
(a)

$$cos^n\alpha = \sum_{i=0}^{[n/2]} b_i \cos((n-2i)), b_i est\ cst$$

(b)

$$\sin^n \alpha = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n/2} b_i \cos((n-2i)\alpha) \ \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \sum\limits_{i=0}^{(n-1)/2} b_i \sin((n-2i)\alpha) \ \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$$

(c) *L'expression $\cos^i \alpha \sin^j \alpha \cos^k \beta \sin^l \beta$, où i, j, k et l sont des entiers non négatifs, est égal*

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{i+j}{2}\right]} \sum_{M=0}^{\left[\frac{k+l}{2}\right]} C_{mM} \cos(((i+j-2m)\alpha) \pm ((k+l-2M)\beta)),$$

ou

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{i+j}{2}\right]} \sum_{M=0}^{\left[\frac{k+l}{2}\right]} d_{mM} \sin(((i+j-2m)\alpha) \pm ((k+l-2M)\beta)),$$

si $i+j$ est pair ou impair, respectivement.

Preuve. La preuve des déclarations (a) et (b) suit immédiatement les identités
(I_1) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$,
(I_2) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$,
(I_3) $2\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$,
Pour analyser l'expression donnée en (c), à partir des énoncés (a) et (b), nous devons considérer seulement deux cas : (1) j et l impair ; (2) $j+l$ impair. C'est parce que

dans les autres cas c'est une somme de cosinus.
(1) On considère $j=2\mu+1$ et $l=2\sigma+1$ et on écrit le produit comme

$$\cos^i\alpha\sin^{2\mu}\alpha\cos^k\beta\sin^{2\sigma}\beta\sin\alpha$$

les quatre premiers termes de ce produit sont la somme des cosinus en utilisant à nouveau les énoncés (a) et (b). Maintenant en utilisant (I_2) nous concluons la preuve dans ce cas.
(2) Il suffit de considérer le cas $j=2\mu+1$ et $l=2\sigma$. Donc nous avons

$$\cos^i\alpha\sin^{2\mu}\alpha\cos^k\beta\sin^{2\sigma}\beta\sin\alpha$$

Par les énoncés (a) et (b) les quatre premiers termes de ce produit sont la somme des cosinus, et en utilisant (I_3) nous concluons la preuve. ■

2.4 Les fonctions $h_i(r,\rho,s)$ pour $i=1,2,3$

Nous allons maintenant calculer la fonction $h(r,\rho,s)=(h_1(r,\rho,s),h_2(r,\rho,s),h_3(r,\rho,s))$ donnée en (2.5) pour notre système (2.7).

Lemme 2.4.1 *Les énoncés suivants sont valides*

(a) Si n est pair alors

$$h_1(r,\rho,s)=a_1r+r^{n-1}\rho(b_1\sin ns+c_1\cos ns).$$

(b) Si n est impair alors

$$h_1(r,\rho,s)=a_1r+r^{n-1}\rho(b_1\sin ns+c_1\cos ns)+\sum_{M=0}^{(n-1)/2}d_M^1r^{n-2M}\rho^{2M},$$

où a_1,b_1,c_1 et d_M^1 dépendent des coefficients de la perturbation.

Preuve. Afin d'organiser les calculs nous écrivons la fonction H_1 comme

$$H_1=H_1^1+H_1^N=(F_1^1\cos\theta+F_1^2\sin\theta)+(F_n^1\cos\theta+F_n^2\sin\theta).$$

nous allons appliquer le théorème 2.1 au système (2.7). La prochaine étape est de trouver la fonction de (2.5).
Soit h_1^1 une fonction définie par

$$\begin{aligned}h_1^1(r,\rho,s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_1^1(\theta,r,\rho,s)d\theta=\sum_{i+j+k+l=1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_{ijkl}^1x_1^ix_2^Jx_3^Kx_4^l\cos\theta+a_{ijkl}^2x_1^ix_2^Jx_3^Kx_4^l\sin\theta)d\theta\\ &= \frac{a_{1000}^1+a_{0100}^2}{2}r.\end{aligned}$$

Nous calculons maintenant

$$\begin{aligned}
h_1^n(r,\rho,s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1^n(\theta,r,\rho,s)d\theta \\
&= \sum_{i+j+k+l=n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^1_{ijkl}x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l\cos\theta d\theta + \sum_{i+j+k+l=n} a^2_{ijkl}x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l\sin\theta d\theta \\
&= \sum_{i+j+k+l=n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^1_{ijkl}r^{i+j}\rho^{K+l}\cos^{i+l}\theta\sin^j\theta\cos^k(n(\theta+s))\sin^l(n(\theta+s))d\theta \\
&\quad + \sum_{i+j+k+l=N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2_{ijkl}r^{i+j}\rho^{K+l}\cos^{i+l}\theta\sin^{j+1}\theta\cos^k(n(\theta+s))\sin^l(n(\theta+s))d\theta.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.3.2, nous avons

$$h_1^n(r,\rho,s) = \sum_{i+j+k+l=N} r^{i+j}\rho^{k+l}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{[i+J+1/2]}\sum_{M=0}^{[k+L/2]} C_{mM}^{ijkl}(\theta)d\theta,$$

où $C_{mM}^{ijkl}(\theta)$ une expression de la forme

$$\begin{aligned}
&C_{mM}^{ijkl}\cos(((i+j+1-2m)\theta)\pm((k+l-2M)n(\theta+s))) \\
&+d_{mM}^{ijkl}\sin(((i+j+1-2m)\theta)\pm((k+l-2M)n(\theta+s))).
\end{aligned}$$

Toutes ces intégrales par rapport à θ sont nulles sauf lorsque

$$i+j+1-2m = n(k+l-2M). \tag{2.9}$$

on remarque que $0 \le i+j+1-2m \le n+1$. Il y a donc deux possibilités $k+l-2M=0$ ou $k+l-2M=1$. Le premier cas à considérer est lorsque N est pair. Ensuite, nous montrerons que la possibilité $k+l-2M=0$ ne se produit jamais. Si $k+l-2M=0$ alors $k+l$ est pair. Donc $i+j$ est pair parce que n est pair. C'est une contradiction avec (2.9). En bref, nous avons $k+l-2M=1$ et cela implique de (2.9) $N-(k+l)+1-2m=n$. Donc $k+l+2m=1$. Donc $m=0$ et $k+l=1$, par conséquent $i+j=n-1$ et $M=0$. Enfin, on obtient $h_1^N(r,\rho,s) = r^{N-1}\rho(b_1\sin Ns + c_1\cos Ns)$ et ceci montre l'énoncé (a). Maintenant nous considérons le cas N est impair. Lorsque $k+l-2M=1$ on obtient le même que celui obtenu dans le cas n est pair, c'est-à-dire $r^{n-1}\rho(b_1\sin ns + c_1\cos ns)$. Nous considérons maintenant le cas $k+l-2M=0$. Pour chaque M varie de 0 à $\dfrac{(n-1)}{2}$, on obtient les termes $d_M^1 r^{n-2M}\rho^{2M}$. Dans ce cas, on obtient

$$h_1^n(r,\rho,s) = r^{n-1}\rho(b_1\sin ns + c_1\cos ns) + \sum_{M=O}^{(n-1)/2} d_M^1 r^{n-2M}\rho^{2M}$$

Et cela prouve l'énoncé (b). ■

Lemme 2.4.2 *Les énoncés suivants sont valides*

(a) Si n est pair alors

$$h_2(r, \rho, s) = a_2\rho + r^n(b_2 \sin ns + c_2 \cos ns)$$

(b) Si n est impair alors

$$h_2(r, \rho, s) = a_2\rho + r^N(b_2 \sin ns + c_2 \cos ns) + \sum_{M=O}^{(n-1)/2} d_M^2 r^{n-2M-1}\rho^{2M+1}$$

où $a_{2,}b_2, c_2$ et d_M^2 dépendent des coefficients de la perturbation.

Preuve. Comme dans le lemme 2.4.1, nous écrivons la fonction H_2 comme

$$H_2 = H_2^1 + H_2^N = (F_1^3 + F_n^3)\cos(n(\theta + s)) + (F_1^4 + F_n^4)\sin(n(\theta + S)).$$

En appliquant le théorème 2.2.1 au système (2.7) et en utilisant la même notation du lemme 2.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} h_2^1(r, \rho, s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_2^1(\theta, r, \rho, s)d\theta \\ &= \sum_{i+j+k+l=1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a_{ijkl}^3 x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l \cos(n(\theta + S)) \\ &\quad + a_{ijkl}^4 x_1^i x_2^J x_3^K x_4^l \sin(n(\theta + S)))d\theta \\ &= \frac{a_{0010+}^3 a_{0001}^4}{2}\rho \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant

$$h_2^n(r, \rho, s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_2^n(\theta, r, \rho, s)d\theta,$$

et obtenir une expression semblable à celle obtenue dans le lemme 2.4.1, sauf que les termes dont les intégrales sont non nécessairement nulles sont donnés par

$$i + j + -2m = n(k + l + 1 - 2M). \tag{2.10}$$

on remarque que $0 \leq i+j+-2m \leq n$. Il y a donc deux possibilités : $k+l+1-2M = 0$ ou $k + l + 1 - 2M = 1$. Supposons que n soit pair. Alors nous montrons que

$k+l+1-2M=0$ ne peut jamais se produire. Si elle se produit alors $k+l$ est impair. Ainsi $i+j$ est impair parce que n est pair. C'est une contradiction avec (2.10). On a $k+l+1-2M=1$ et il implique, en utilisant (2.10), que $n-(k+l)-2m=n$ et donc $k+l=0=m$. Si $k+l=0$. Alors $i+j=n$. Finalement nous obtenons $h_2(r,\rho,s)=r^N(b_2\sin ns+c_2\cos ns)$ et ceci prouve l'énoncé (a).
Maintenant nous considérons le cas n est impair. Lorsque $k+l+1-2M=1$ on obtient le même que celui obtenu dans le cas n est impair, c'est-à-dire $r^n(b_2\sin ns+c_2\cos ns)$. Lorsque $k+l+1-2M=0$ pour chaque M varie de 0 à $\dfrac{(n-1)}{2}$ on obtient les termes $d_M^2 r^{N-2M-1}\rho^{2M+1}$. Dans ce cas, on obtient

$$h_2^n(r,\rho,s)=r^n(b_2\sin ns+c_2\cos ns)+\sum_{M=0}^{(n-1)/2} d_M^2 r^{n-2M-1}\rho^{2M+1},$$

et cela prouve l'énoncé (b). ■

Lemme 2.4.3 *Les énoncés suivants sont valides.*

(a) Si n est pair alors

$$h_3(r,\rho,s)=a_3+r^{N-2}\rho(b_3\sin ns+c_3\cos ns)+r^N\rho^{-1}(d_3\sin ns+e_3\cos ns).$$

(b) Si n est impair alors

$$\begin{aligned} h_3(r,\rho,s) &= a_3+r^{n-2}\rho(b_3\sin ns+c_3\cos ns) \\ &\quad +r^n\rho^{-1}(d_3\sin ns+e_3\cos ns)+\sum_{M=0}^{(n-1)/2} d_M^3 r^{n-2M-1}\rho^{2M}, \end{aligned}$$

où a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 et d_M^3 dépendent des coefficients de la perturbation.
Preuve. Nous avons $H_3=H_3^1+H_3^N$ où

$$\begin{aligned} H_3^1 &= \frac{1}{n\rho}(F_1^4\cos(n(\theta+S))-F_1^3\sin((n(\theta+S)))-\frac{1}{r}(F_1^2\cos\theta-F_1^1\sin\theta), \\ H_3^n &= \frac{1}{n\rho}(F_n^4\cos(n(\theta+S))-F_n^3\sin((n(\theta+S)))-\frac{1}{r}(F_n^2\cos\theta-F_n^1\sin\theta), \end{aligned}$$

en appliquant le théorème 2.2.1 au système (2.7) et en utilisant les mêmes arguments de lemme 2.4.1 et 2.4.2 nous obtenons

$$h_3^1(r,\rho,s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_3^1(\theta,r,\rho,s)d\theta=\frac{a_{0010}^4-a_{0001}^3}{2n}-\frac{a_{1000}^2-a_{0100}^1}{2}$$

Nous calculons maintenant

$$h_3^n(r, \rho, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_3^n(\theta, r, \rho, s) d\theta.$$

De la même façon que pour les lemmes 2.4.1 et 2.4.2, nous obtenons deux sommes à la forme

$$\begin{aligned} h_3^n(r, \rho, s) &= \sum_{i+j+k+l=N} r^{i+j} \rho^{k+l-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\left[\frac{i+j/}{2}\right]} \sum_{M=0}^{\left[\frac{k+l+1}{2}\right]} C_{mM}^{ijkl}(\theta) d\theta \\ &+ \sum_{i+j+k+l=N} r^{i=j-1} \rho^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\left[\frac{i+j+1/}{2}\right]} \sum_{M=0}^{\left[\frac{k+l}{2}\right]} E_{mM}^{ijkl}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

où $C_{mM}^{ijkl}(\theta)$ est une expression de la forme

$$\begin{aligned} &C_{mM}^{ijkl} \cos(((i+j-2m)\theta) \pm ((k+l+1-2M)n(\theta+s))) + \\ &d_{mM}^{ijkl} \sin(((i+j-2m)\theta) \pm ((k+l+1-2M)n(\theta+s))), \end{aligned}$$

et $E_{mM}^{ijkl}(\theta)$ de la forme

$$\begin{aligned} &e_{mM}^{ijkl} \cos(((i+j-2m)\theta) \pm ((k+l+1-2M)n(\theta+s))) + \\ &f_{mM}^{ijkl} \sin(((i+j-2m)\theta) \pm ((k+l+1-2M)n(\theta+s))). \end{aligned}$$

Les termes dont les intégrales sont non nécessairement nulles sont donnés par

$$i + j + 1 - 2m = n(k + l + 1 - 2M) \tag{2.11}$$

dans la première somme et par

$$i + j + 1 - 2m = n(k + l + 1 - 2M) \tag{2.12}$$

Dans la seconde somme. Les mêmes arguments utilisés dans les lemmes 2.4.1 et 2.4.2 montrent que si n est pair, les termes restants sont $r^{n-2}\rho(b_3 \sin ns + c_3 \cos ns)$ dans la première somme et $r^n \rho^{-1}(d_3 \sin ns + e_3 \cos ns)$ dans la seconde somme. Si n est impair en plus des termes obtenus lorsque N est pair à la première somme et a des termes de la forme $r^{n-2M+1}\rho^{2M-2}$ avec M varie de 1 à $\dfrac{(n+1)}{2}$, et la seconde somme et a des termes de la forme $r^{n-2M-1}\rho^{2M}$ avec M varie 0 à $\dfrac{(n-1)}{2}$. ■

Lemme 2.4.4 *Soient n, α et β des entiers non négatifs tels que $\alpha + \beta = N$*

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t \cos(n(t+s))dt = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\beta/2}\pi}{2^{N-1}} \cos(ns) & \text{si } \beta \text{ est pair} \\ \dfrac{(-1)^{(\beta+1)/2}\pi}{2^{N-1}} \sin(ns) & \text{si } \beta \text{ est impair} \end{cases}$$

$$(b)\quad \int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t \sin(n(t+s))dt = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\beta/2}\pi}{2^{N-1}} \sin(ns) & \text{si } \beta \text{ pair} \\ -\dfrac{(-1)^{(\beta+1)/2}\pi}{2^{n-1}} \cos(ns) & \text{si } \beta \text{ impair} \end{cases}$$

Preuve. L'expression $\cos^\alpha t \sin^\beta t$ peut être écrite comme

$$\cos^\alpha t \sin^\beta t \cos(n(t+s)) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^\alpha \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^\beta \cos(n(t+s)).$$

Dans l'expression du membre de droite, il faut considérer seulement les termes e^{it} et e^{-it} tels que le degré le plus haut c-à-d $\alpha+\beta=n$, parce que l'intégral des autres termes sur l'intervalle $[0,2\pi]$ sont zéro. Donc nous obtenons

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{e^{iNt}+(-1)^\beta e^{-int}}{2i^\beta}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\beta/2}}{2^{N-1}} \cos(nt) & \text{si } \beta \text{ pair} \\ \dfrac{(-1)^{(\beta-1)/2}}{2^{n-1}} \sin(nt) & \text{si } \beta \text{ impair} \end{cases}$$

pour l'expression $\cos(n(t+s)) = \cos(nt)\cos(ns) - \sin(nt)\sin(ns)$, il suit l'énoncé (a).
On définit l'intégrale

$$I(s) = \int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t \cos(n(t+s))\, dt.$$

Nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t \cos(n(t+s))\, dt = \frac{-I'(s)}{n}$$

Par conséquent l'énoncé (b) suit de l'énoncé (a). ■

Lemme 2.4.5 *Si n est pair alors la fonction h_3 du lemme 2.4.3 est telle que $b_3 = -c_1, c_3 = -b_1, d_3 = \dfrac{-c_2}{n}$ et $e_3 = \dfrac{b_2}{n}$.*

Preuve. Afin de simplifier la preuve, soit $a^1_{ijkl}x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$ un monôme de F_n^1 tel que $i+j=n-1$, $k=0$ et $l=1$. Lorsque nous calculons les expressions h_1 et h_3 , alors ce monôme apparaît dans h_1 est égal

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^1_{ijkl} \cos^{i+1}\theta \sin^j \theta \sin(n(\theta+s))\, d\theta, \tag{2.13}$$

et dans h_3 est égal

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_{ijkl}^1 \cos^i\theta \sin^{j+1}\theta \sin\left(n\left(\theta+s\right)\right) d\theta. \tag{2.14}$$

Si $k=0$ et $l=1$ alors, par le lemme 2.4.4, on a (2.13) est égal à $(-1)^{j/2} a_{ijkl}^1 \sin\left(ns\right)/2^n$ si j est pair, et à $-(-1)^{(j+1)/2}\ a_{ijkl}^1 \cos\left(ns\right) 2^n$ si j impair, et (2.14) est égal à $(-1)^{(j+1)/2} a_{ijkl}^1 \sin\left(ns\right)/2^n$ si $j+1$ est pair, et à $-(-1)^{(j+2)/2}\ a_{ijkl}^1 \cos\left(ns\right) 2^n$ si $j+1$ est impair. Pour j est impair le coefficient du monôme apparaît dans une somme qui détermine le coefficient de $r^{n-1}\rho\cos\left(ns\right)$ dans h_1, et apparaît également dans une somme qui détermine le coefficient de $r^{n-2}\rho\sin\left(ns\right)$ dans h_3 avec le signe opposé. De façon similaire pour j est impair le coefficient du monôme apparaît dans une somme qui détermine le coefficient de $r^{N-1}\rho\sin\left(Ns\right)$ dans h_1, apparaît dans une somme qui détermine le coefficient de $r^{n-2}\rho\cos\left(ns\right)$ dans h_3 avec le même signe. Nous pouvons faire de même pour tous les monômes de F_n^2, F_n^3, et F_n^4, et vérifiez facilement que $b_3=-c_1$, $c_3=-b_1$, $d_3=\dfrac{-c_2}{n}$ et $e_3=\dfrac{b_2}{n}$. ■

2.5 Cas N est pair

Dans cette section nous montrerons le théorème 2.1.1.
Si n est pair, nous avons

Proposition 2.5.1 *Si n est pair, nous avons*

$$\begin{array}{l} h_1 = h_1\left(r,\rho,s\right) = a_1 r + r^{n-1}\rho\left(b_1\sin\left(ns\right)+c_1\cos\left(ns\right)\right) \\ h_2 = h_2\left(r,\rho,s\right) = a_2\rho + r^{n}\left(b_2\sin\left(ns\right)+c_2\cos\left(ns\right)\right) \\ h_3 = h_3\left(r,\rho,s\right) = a_3 + r^{n-2}\rho\left(-c_1\sin\left(ns\right)+b_1\cos\left(ns\right)\right) \\ \qquad + r^{n}\rho^{-1}\left(-nc_2\sin\left(ns\right)+nb_2\cos\left(ns\right)\right) \end{array} \tag{2.15}$$

Preuve. Il résulte des lemmes 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.5. ■

2.5.1 Preuve du théorème 2.1.1

D'après la Proposition 2.5.1, les fonctions h_1, h_2 et h_3 sont données par (2.15). Nous appelons $r^{n-1}=B, \rho/r=A, \sin ns=z$ et $\cos ns=w$. Après ce changement de variables

$$\begin{array}{rcl} \tilde{h}_1\left(A,B,z,w\right) & = & h_1/r = a_1 + AB\left(b_1 z + c_1 w\right) \\ \tilde{h}_2\left(A,B,z,w\right) & = & h_2/r = a_2 A + B\left(b_2 z + c_2 w\right) \\ \tilde{h}_3\left(A,B,z,w\right) & = & \rho h_3/r = a_3 A + BA^2\left(-c_1 z + b_1 w\right) + B\left(-nc_2 z + nb_2 w\right) \\ \tilde{h}_4\left(A,B,z,w\right) & = & z^2 + w^2 - 1. \end{array}$$

Soit $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i(A, B, z, w)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
On résout alors

$$\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4\right) = (0, 0, 0, 0).$$

On doit donc résoudre l'équation $\tilde{h}_2 = 0$ on obtient

$$B = -\frac{Aa_2}{b_2 z + c_2 w}.$$

Substitution B dans $\tilde{h}_1 = 0$, on obtient

$$A = \sqrt{\frac{a_1(b_2 z + c_2 w)}{a_2(b_2 z + c_2 w)}}, \text{ et donc } B = -\frac{1}{b_2 z + c_2 w}\sqrt{\frac{a_1(b_2 z + c_2 w)}{a_2(b_2 z + c_2 w)}}a_2.$$

Maintenant en substituant A et B dans $\tilde{h}_3 = 0$ on obtient

$$\frac{B_1 z^2 + B_2 zw + B_3 w^2}{(b_1 z + c_1 w)(b_2 z + c_2 w)} = 0 \tag{2.16}$$

où

$$\begin{aligned} B_1 &= a_3 b_1 b_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_2 N, \\ B_2 &= -a_1 b_1 b_2 + a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 c_1 c_2 - a_2 b_1 b_2 n + a_2 c_1 c_2 n. \\ B_3 &= -a_1 b_1 c_2 + a_3 c_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 n. \end{aligned}$$

Les zéros de (2.16) sont $w = z = 0$ ou une paire de lignes droites de croisement passant par l'origine, ainsi le nombre maximum de zéros de (2.16) et $z^2 + w^2 = 1$ est quatre. Notons que pour chaque zéro (A, B, z, w) de $\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4\right) = (0, 0, 0, 0)$. Avec $A > 0$ and $B > 0$, on peut trouver n zéros (r, ρ, s) de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$. Dans notre cas n est pair, de sorte que les zéros (r, ρ, s) obtenus à partir de (A, B, z, w) sont les mêmes obtenus de $(A, B, -z, -w)$. Cela complète la preuve que le nombre maximum de zéros de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$ est $2n$. Donc, Par le théorème 2.2.1, le nombre maximal de cycles limites obtenus par la méthode de moyennisation pour le système (2.2) est $2n$.
Cela prouve l'énoncé (a).
Maintenant, nous montrons que le système (2.3) a $2n$ cycle limite. En calculant h_1, h_2 et h_3 pour ce système on obtient

$$\begin{aligned} h_1(r, \rho, s) &= -2\sin\left(\sqrt{2}\pi\right) r + r^{n-1}\rho\left(\sin ns + 2\sin\left(\sqrt{2}\pi - ns\right)\right) \\ h_2(r, \rho, s) &= -\frac{2}{n}\left(\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)\rho + r^n\left(2\sin ns + \sin\left(\sqrt{2}\pi - ns\right)\right)\right) \\ h_3(r, \rho, s) &= 3 + r^{n-2}\rho((\cos ns - 2\cos(\sqrt{2}\pi - ns) \\ &\quad + r^n\rho^{-1}(-4\cos ns + 2\cos(\sqrt{2}\pi - ns)). \end{aligned}$$

Les zéros de $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$ sont

$$(r, \rho, s) = \left(1, 1, k\frac{2\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Et

$$(r, \rho, s) = \left(1, 2, \left(\sqrt{2}\pi + k\right)\frac{2\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Le déterminant jacobien de $h = (h_1, h_2, h_3)$ en $\left(1, 1, k\frac{2\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$ est égale

$$-12\,(N-1)\left(-5 + 4\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)\sin\left(\sqrt{2}\pi\right) \neq 0.$$

et en $\left(1, 2, \left(\sqrt{2}\pi + k\right)\frac{2\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$ est

$$12\,(n-1)\left(-5 + 4\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)\sin\left(\sqrt{2}\pi\right) \neq 0.$$

En appliquant le théorème 2.2.1, la preuve de l'énoncé (b) est effectuée.

2.6 Cas N est impair

Dans cette section, nous montrerons le théorème 2.1.2

Proposition 2.6.1 *Si N est impair*

$$\begin{aligned}
h_1(r, \rho, s) &= a_1 r + r^{N-1}\rho\left(b_1 \sin(Ns) + c_1 \cos(Ns)\right) + \sum_{M=0}^{(N-1)/2} d_M^1 r^{N-2M}\rho^{2M}, \\
h_2(r, \rho, s) &= a_2\rho + r^N\left(b_2 \sin(Ns) + c_2 \cos(Ns)\right) + \sum_{M=0}^{(N-1)/2} d_M^2 r^{N-2M}\rho^{2M+1} \\
h_3(r, \rho, s) &= a_3 + r^{N-2}\rho\left(-c_1 \sin(Ns) + b_1 \cos(Ns)\right) \\
&\quad + r^N\rho^{-1}\left(-Nc_2 \sin(Ns) + Nb_2 \cos(Ns)\right) + \sum_{M=0}^{(N-1)/2} d_M^3 r^{N-2M-1}\rho^{2M}.
\end{aligned}$$

Preuve. Il résulte des lemmes 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.5. ■

2.6.1 Preuve du théorème 2.1.2

Dans la proposition 2.6.1, les fonctions h_1, h_2 et h_3 sont données. Maintenant nous effectuons le changement

$$r^{N-1} = B,\ \rho/r = A,\ \sin Ns = z \text{ et } \cos Ns = w.$$

Les fonctions $\tilde{h}_1 = h_1/r$; $\tilde{h}_2 = h_2/r$; $\tilde{h}_3 = \rho h_1/r$ dans les nouvelles variables sont

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_1 &= a_1 + AB\left(b_1 z + c_1 w\right) + BP_1\left(A^2\right) \\
\tilde{h}_2 &= a_2 A + NB\left(b_2 z + c_2 w\right) + ABP_2\left(A^2\right) \\
\tilde{h}_3 &= a_3 A + BA^2\left(-c_1 z + b_1 w\right) + B\left(-c_2 z + b_2 w\right) + ABP_3\left(A^2\right) \\
\tilde{h}_4 &= z^2 + w^2 - 1
\end{aligned}$$

où

$$P_i\left(A^2\right) = \sum_{M=0}^{(N-1)/2} d_M^i A^{2M}, \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

on résout $\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3\right) = (0, 0, 0)$ et trouvons une solution $B = B\left(A^2\right)$, $z = AZ\left(A^2\right)$, $w = AW\left(A^2\right)$, où $B(u)$ est le quotient d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré $\dfrac{(N+3)}{2}$, $Z(u)$ et $W(u)$ sont le quotient d'un polynôme de degré $\dfrac{(N+2)}{2}$ par un polynôme du degré 2. En substituant z et w dans l'équation $\tilde{h}_4 = 0$, on obtient le quotient d'un polynôme de degré $N+2$ dans la variable A^2 par un polynôme de degré 4 en A^2. Ainsi, le nombre maximal de racines positives A du numérateur de $\tilde{h}_4$ est $N+2$. Pour chaque solution A_0 a au plus un $B_0 = B\left(A_0\right) > 0$ et une seule paire $(z_0, w_0) = \left(z\left(A_0\right), w\left(A_0\right)\right)$. Pour chaque paire (z_0, w_0) on trouve $s_1, ..., s_N \in [0, 2\pi)$ tel que $\sin Ns_i = z_0$ et $\cos Ns_i = w_0$ pour $i = 1, ..., N$. Ainsi, par le théorème 2.2.1, le nombre maximal de cycles limites obtenus par la méthode de moyennisation pour le système (2.2) est $N(N+2)$.
Ceci complète la preuve de l'énoncé (a).
Pour preuve de l'énoncé (b) du théorème 2.1.2 voir [6].

CHAPITRE 3

Bifurcation de cycles limites dans un centre à deux dimensions isochrones cylindre

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2+y^2-1\right) - y + \varepsilon P\left(x,y,z\right) \\ \dot{y} = y\left(x^2+y^2-1\right) + x + \varepsilon Q\left(x,y,z\right) \\ \dot{z} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varepsilon R\left(x,y,z\right). \end{cases}$$

Où ε est un paramètre suffisamment petit et P, Q et R sont des polynômes arbitraires en les variables (x, y, z).

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans la théorie des cycles limites, de nombreuses questions se posent, principalement celles dérivées du $16^{ème}$ problème de Hilbert. Il y a un intérêt particulier pour la question suivante relative aux champs vectoriels planaires : Combien de cycles limites émergent d'une perturbation d'un centre ?
Beaucoup d'auteurs ont récemment été attirés par ce sujet et ont réussi à obtenir des résultats très intéressants (voir par exemple le livre [8] et les références qui y figurent). Notre principale préoccupation est d'apporter ce problème à une plus grande dimension. Ainsi un problème général peut être considéré comme suit.
Soit Y un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une famille à un seul paramètre de solutions périodiques remplissant une surface bidimensionnelle (par exemple un cylindre $\mathcal{C}$). Soit Y_ε une perturbation de Y. Ensuite, nous demandons : Y_ε possède-t-il des cycles limites émergeant de $\mathcal{C}$? Combien, comment les calculons-nous?
Dans ce contexte, nous nous limitons à un système en trois dimensions. On constate que la méthode de moyennisation est un outil traitant de tels problèmes lorsque la

famille des orbites périodiques considérée est isochrone.
Considérons donc le problème de la bifurcation de solutions $T-$périodiques du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x) + \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x,\varepsilon) \tag{3.1}$$

avec $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0; \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $T-$périodiques en t, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x) \tag{3.2}$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques.
Une solution de ce problème est donnée en utilisant la théorie de moyennisation. Pour une introduction générale à la théorie de moyennisation voir les livres de Sanders et Verhulst [22], et de verhulst [23].
Soit $x(t,z)$ la solution du système non perturbé (3.2) telle que $x(0,z) = z$. La linéarisation du système non perturbé le long de la solution $x(t,z)$ s'écrit

$$\dot{y}(t) = D_x F_0(t, x(t,z))\, y, \tag{3.3}$$

On note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.3), et $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées, i.e., $\xi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$.

Théorème 3.1.1 *Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \overline{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que*
(i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \overline{V}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $x(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (3.2) est T-périodique ;
(ii) Pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (3.3) telle que la matrice

$$M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(0) - M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(T)$$

contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions $k \times (n-k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha (n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.
On considère la fonction $\mathcal{F} : \overline{V} \to \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\int_0^T M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(t) F_1(t, x(t, \mathbf{z}_\alpha))\right) . \tag{3.4}$$

S'il existe $a \in V$ telle que $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ et $\det\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\alpha}\right)(a) \neq 0$, il existe une solution T-périodique $\varphi(t,\varepsilon)$ du système (3.1) telle que $\varphi(0,\varepsilon) \to \alpha$ quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 3.1.1 remonte à Malkin [16] et Roseau [19], pour une preuve plus courte voir [5].
L'objectif de ce travail est de montrer l'implémentation explicite du théorème 3.1.1 pour calculer des cycles limites qui bifurquent à partir d'un continuum d'orbites périodiques isochrones différent d'un centre linéaire. Par exemple de bifurquer d'un centre linéaire voir [15].
Plus précisément, on considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2+y^2-1\right) - y + \varepsilon P\left(x;y;z\right) \\ \dot{y} = y\left(x^2+y^2-1\right) + x + \varepsilon Q\left(x;y;z\right) \\ \dot{z} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varepsilon R\left(x;y;z\right). \end{cases} \tag{3.5}$$

Définie dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$ où P, Q et R sont des polynômes arbitraires en leurs variables. Le cylindre $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$
est invariant pour le système ou système non perturbé (3.5) avec $\varepsilon = 0$ i.e. si une orbite du système avec $\varepsilon = 0$ a un point sur le cylindre $\mathcal{C}$ alors toute l'orbite y est contenue. De plus l'orbite du système non perturbé qui, à l'instant $t = 0$ passe par le point $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, z_0) \in \mathcal{C}$ est

$$x\left(t\right) = \cos\left(t+\theta_0\right), \;\; y\left(t\right) = \sin\left(t+\theta_0\right), \quad z\left(t\right) = z_0 + \sin\left(t+\theta_0\right) - \sin\theta_0. \tag{3.6}$$

Ainsi toutes les orbites sur le cylindre sont périodiques avec la même période $T = 2\pi$.
Nous souhaitons étudier le nombre d'orbites périodiques du cylindre $\mathcal{C}$ en bifurcation dans des cycles limites du système (3.5) pour ε suffisamment petit. Nous voulons donc étudier le système (3.5) avec $\varepsilon = 0$ par un champ vectoriel polynomial arbitraire de $\mathbb{R}^3$ et nous n'étudions que les cycles bifurqués qui sont contrôlés par la fonction de déplacement dans un voisinage du cylindre jusqu'au premier ordre dans ε, ou équivalemment la méthode de moyennisation du premier ordre. Si ce premier ordre est identiquement nul, alors notre technique ne s'applique pas.
Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.1.2 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque racine simple z_0 du polynôme $\int_0^{2\pi} R\left(\cos\theta, \sin\theta, z_0 + \sin\theta\right) d\theta$, le système différentiel* (3.5) *a un cycle limite bifurquant à partir de l'orbite périodique* (3.6) *du cylindre $\mathcal{C}$ du système* (3.5) *avec $\varepsilon = 0$.*
Le théorème 3.1.2 *sera démontré dans la section* 3.2. *Plus intéressant que le résultat du théorème* 3.1.2 *lui-même est le moyen de le prouver.*

3.2 Preuve du théorème 3.1.2

Comme les orbites périodiques du système non perturbé (3.5) avec $\varepsilon = 0$ sont sur un cylindre, les meilleures coordonnées pour travailler avec sont les cylindriques. En

utilisant changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $z = z$, alors le système (3.5) devient

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \cos\theta + \varepsilon R\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right), \\ \dot{r} &= r^3 - r + \varepsilon\left[\cos\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) + \sin\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\right] \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{r}\left[\cos\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) - \sin\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Maintenant en prenant θ comme variable indépendante, le système (3.7) devient

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \cos\theta + \varepsilon R\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) + O_2 \\ \dot{r} &= r^3 - r + \varepsilon\left[\cos\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) + \sin\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\right] + O_2\end{aligned} \tag{3.8}$$

où le premier désigne la dérivée par rapport à θ et $O_2 = O\left(\varepsilon^2\right)$.
Soit R_0 un nombre réel positif arbitraire. En utilisant la notation du théorème 3.1.1 et du système (3.1) nous avons que notre système (3.7) peut être écrit en tant que système (3.1) en prenant

$\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ = \left\{(z,r) : z\in\mathbb{R},\ r>0\right\}$,
$x = (z,r)$,
$t = \theta$,
$F_0\left(\theta, x\right) = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ r^3 - r\end{pmatrix}$
$F_1\left(\theta, x\right) = \begin{pmatrix} R\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) \\ \cos\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) + \sin\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\end{pmatrix}$
$\alpha = Z_0,\ \beta\left(\alpha\right) = 1,\ z_\alpha = \left(z_0, 1\right),\ V = \left\{z_0\in\left(-R_0, R_0\right)\right\}$
$Z = \left\{z_\alpha = \left(z_0,1\right) : \left(z_0\in V\right)\right\}$
$x\left(\theta, z_\alpha\right) = \left(z_0 + \sin\theta, 1\right)$.

La matrice fondamentale M_{Z_α}est

$$M_{Z_\alpha}\left(\theta\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & e^{2\theta}\end{pmatrix}$$

ensuite nous avons

$$M_{Z_\alpha}^{-1}\left(\theta\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & e^{-2\theta}\end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$M_{Z_\alpha}^{-1}\left(0\right) - \ M_{Z_\alpha}^{-1}\left(2\pi\right) = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-4\pi}\end{pmatrix}.$$

En bref, notre système (3.7) satisfait toute l'hypothèse du théorème 3.1.1.
On définit

$$\begin{pmatrix} f_1\left(\theta, z, r\right) \\ f_2\left(\theta, z, r\right)\end{pmatrix} = M_{Z_\alpha}^{-1}\left(\theta\right) F_1\left(\theta, z, r\right).$$

Maintenant, d'après le théorème 3.1.1 on doit étudier les zéros $\alpha \in V$ du système $\mathcal{F}(\alpha) = 0$, où $\mathcal{F}$ est donné par (3.4). Plus précisément

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha) &= \mathcal{F}(z_0) = \int_0^{2\pi} f_1(\theta, x(\theta, z_\alpha))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} f_1(\theta, z_0 + \sin\theta, 1)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta, z_0 + \sin\theta)\, dt.
\end{aligned}$$

De cette façon nous concluons immédiatement que le théorème 3.1.2 suit du théorème 3.1.1.

Conclusion

La méthode de moyennisation est considérée comme les meilleures méthodes de perturbations pour étudier les cycles limites de systèmes différentiels perturbés. L'application de cette méthode du premier ordre aux systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ a donné des résultats intéressants.
Notre travail futur consistera à l'application de cette méthode du deuxième ordre au système

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x) + \varepsilon^2 G(x)$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sont des polynômes de degré N et M en les variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N \\ 0 & 0 & N & 0 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. Arnold, Loss of stability of self–oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 85 – 92.

[2] V.I. Arnold, Geometric Methods in Theory of Ordinary Differential Equations, Springer–Verlag, New York, 1983.

[3] G. Binyamini, D. Novikov and S. Yakovenko, On the number of zeros of Abelian integrals, Invent. Math. 181 (2010), 227 – 289.

[4] A. Buică and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math. 128 (2004), pp. 7 – 22.

[5] A. Buică, J.P. Franoise, J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, Communications on Pure and Applied Analysis 6 (2007) 103 – 111.

[6] CA Buzzi, J Llibre, JC Medrado, J Torregrosa. Bifurcation of limit cycles from a centre in $\mathbb{R}^4$ in resonance $1 : N$. Dynamical Systems 24.1(2009),123 – 137.

[7] C.S. Coleman, Hilbert's 16 th problem : How many cycles ? in Differential Equation Models, Modules in Applied Mathematics, Vol. 1 Springer–Verlag, New York, (1983), pp. 279 – 297.

[8] C. Christopher and C. Li, Limit Cycles of Differential Equations, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[9] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Manuel pour le Second Cycle de Mathématiques, Presses Universitaires de Grenoble, 1e édition sept. 1991, 2e éd. sept. 1996, 3e éd. fév. 2006.

[10] Yu.S. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), pp. 301 – 354.

[11] V. Kaloshin, Around the Hilbert–Arnol0d problem, On finiteness in differential equations and Diophantine geometry, CRM Monogr. Ser. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005), pp. 111 – 162.

[12] J. Li, Hilbert's 16 th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng. 13 (2003), pp. 47 − 106.

[13] N.G. Lloyd, Degree Theory, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1978.

[14] N.G. Lloyd, Limit cycles of polynomial systems, some recent developments, in New Directions in Dynamical Systems, ed. T. Bedford & J. Swift, London Math. Soc. Lecture Notes, Vol. 127, (1988), pp. 192 − 234.

[15] J. Llibre, M.A. Teixeira, J. Torregrosa, Limit cycles bifurcating from a $k-$dimensional isochronous center contained in $\mathbb{R}^n$ with $k \leq n$, Mathematical Physics, Analysis and Geometry 10 (2007) 237 − 249.

[16] I.G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956 (in Russian).

[17] J. Murdock, Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems, Springer Monographs in Math Springer, New York, 2003.

[18] H. Poincaré, Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 5(1891), 161 − 191; 11 (1897), 193 − 239.

[19] M. Roseau, Vibrations non linaires et thorie de la stabilit, in : Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 8, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966 (in French).

[20] I. R. Shafaravich, Basic algebric geometry, Springer, 1974.

[21] S. Smale, Mathematical problems for the next century, Math. Intelligencer 20 (1998), no. 2, 7 − 15.

[22] J.A. Sanders, F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, in : Applied Mathematical Sciences, vol. 59, Springer, 1985.

[23] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer, 1991.

[24] S. Yakovenko, Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16 th problem, On finiteness in differential equations and Diophantine geometry, CRM Monogr. Ser. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005), pp. 41 − 109.

[25] Yanqian Ye, Theory of Limit Cycles, Translations of Math. Monographs, Vol. 66, Amer. Math. Soc, Providence, 1986.

[26] Zhifen Zhang, Tongren Ding, Wenzao Juang and Zhenxi Dong, Qualitative Theory of Differential Equations, Translations of Math. Monographs, Vol. 101, Amer. Math. Soc, Providence, 1992.

Appendice

Dans cet appendice d'apres le logiciel de Maple on calculer et simplifier les formules difficiles et tracer les courbes.