People's Democratic and Republic of Algeria
Ministry of High Education and Scientific Research
Echahid Cheick Larbi Tebessi University - Tebessa -
Faculty of Exact Sciences an Sciences of nature and life
Department of Mathematics
Laboratory of Mathematics, Informatics and Systems (LAMIS)

Thesis Presented to obtain a Doctoral Degree Graduation

Speciality: Mathematics

Option: Applied Mathematics

Entitled

مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة في فضاء متري معمم وتطبيقاتها

من إعداد الطالب:
رضوان شايب

لجنة المناقشة:

الاسم واللقب	الصفة	الرتبة	الجامعة
عبد الحق حفظ الله	رئيسا	*MCA*	جامعة الشيخ العربي التبسي - تبسة -
فيصل مرغادي	مشرفا	*Prof*	جامعة الشيخ العربي التبسي - تبسة -
هشام رامول	مناقشا	*MCA*	جامعة خنشلة
خالد سعودي	مناقشا	*Prof*	جامعة خنشلة
تقي الدين أوصيف	مناقشا	*Prof*	جامعة أم البواقي
خالد براح	مناقشا	*MCA*	جامعة الشيخ العربي التبسي - تبسة -
عبد الحميد عيادي	ضيفا	*Prof*	جامعة أم البواقي

تاريخ المناقشة:
05 أكتوبر 2025

تشكر وعرفان:

اللهم لك الحمد حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه، عدد خلقك ورضى نفسك وزنة عرشك ومداد كلماتك، اللهم لك الحمد ولك الشكر حتى ترضى، ولك الحمد ولك الشكر إذا رضيت، ولك الحمد ولك الشكر بعد الرضى.

أما بعدُ،

اتباعا لقول النبي صلى الله عليه وسلم "لا يشكر الله من لا يشكر الناس" فإنني أتوجه بالشكر إلى العائلة الكريمة، بدء من **الوالدين** الذين اكتنفاني بدعائهما وجهدهما أقصى ما يمكن، فاللهم جازهما عنا خير الجزاء، واجلعنا ممن يشفع لهما في الدنيا والآخرة.

ثم الشكر الجزيل إلى **الزوجة الكريمة**، التي تحملت سهري وتعبي، وتحملت انشغالي عنها في كثير من الأحيان خلال سنوات مرت، فكانت نعم الرفيق ونعم السند، ثم الشكر بعد ذلك إلى ريحانة القلب وضوء العين، إلى روح الروح، إلى الابنة المكرمة "**سارة**".

ثم الشكر إلى أصدقائي الأقرب فالأقرب، وإلى كل زملائي الطلبة والأساتذة، وأخص بالذكر صديقي ورفيق دربي الأستاذ المحترم "**مشري هاني**"، ثم أثني بالصديق الذي كانت له علي مزية لا أنساها له، الأستاذ "**غالي عبد الفتاح**".

ثم شكر خاص جدا إلى المشرف على الأطروحة: البروفيسور "**مرغادي فيصل**" على جهوده وتوجيهاته القيمة وحسن معاملته.

كما أتوجه بجزيل الشكر إلى الأستاذ "**موهوب زهير**" على مجهوداته المبذولة معنا في نشر بعض المقالات، وإلى الأستاذ "**هشام رمول**" على ما بذله من جهد وإعانة لنا، ما كنا سنتجاوزها لولا تدخلاته.

وأخيرا وليس آخرا، على المرء أن يشكر نفسه أحيانا على صبره طيلة هذه السنوات، ومن جرب تجربتي، يعرف مقالتي.

كما أتوجّه بجزيل الشكر والامتنان إلى السادة أعضاء لجنة المناقشة الأفاضل، الذين تفضلوا بقبول مناقشة هذه الأطروحة، وأثرَوا العمل بملاحظاتهم القيّمة وتوجيهاتهم السديدة. إنّ حضورهم ومساهماتهم العلمية قد زادت من قيمة هذا الجهد المتواضع، كما أضفت على المناقشة طابعًا علميًا رفيعًا.

إلى أساتذتي الأفاضل، أعضاء اللجنة، كل عبارات الشكر والتقدير، عرفانًا بجميل صنيعكم، وتقديرًا لما بذلتموه من وقت وجهد في قراءة هذا العمل ومناقشته وإثرائه.

الفهرس

الملخص 2

Abstract 3

Résumé 4

ترميزات 5

مقدمة عامة 7

1 أساسيـــــات 10

1.1 الفضاءات $b-$ مترية 14

2.1 التطبيقات التقليصية وبعض مبرهنات النقط الثابتة 29

3.1 مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة 42

4.1 الدوال متعددة القيم 46

2 مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة للتطبيقات وحيدة القيم 51

1.2 مقدمة 52

2.2 مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة 52

3 مبرهنات النقاط الثابتة 71

1.3 مبرهنات النقاط الثابتة للتقليصات المعممة 73

2.3 النقاط الثابتة للتطبيقات غير المُوسّعة المُعممة 84

3.3 التطبيقات $F-$ تقليصية المعممة 92

4.3 مبرهنات نقاط التطابق 96

4 تطبيقات 101

1.4 استقرار أولام-هايرز Ulam-Hyers لمسألة النقطة الثابتة 101

2.4 لمعادلات الدالية للبرمجة الديناميكية 105

3.4 المعادلات التكاملية-تفاضلية 108

قائمة المراجع 116

الملخص

في هذه الأطروحة تحصلنا على مبرهنات للنقاط الثابتة المشتركة لتطبيقين أو أسرة تطبيقات باستعمال شرط تقليص معمم في فضاءات مترية معممة تُسمى: الفضاءات b – مترية، والتي تعتبر تعميم للفضاءات المترية. كما تحصلنا أيضا على نتائج حول النقطة الثابتة للتطبيقات متعددة ووحيدة القيم، باستعمال شرط تقليص من نوع هاردي-روجرز، مع دراسة للاستقرار بمفهوم أولام-هايرز لهذا النوع من التطبيقات. إضافة على ذلك، تم برهان وجود نقاط ثابتة للتطبيقات غير الموسعة المعممة لأول مرة في الفضاءات b – مترية دون استعمال شرط F – تقليصي على التطبيق. كما دعمنا هذه الدراسة بأمثلة مختلفة توضح قابلية تطبيق هذه المبرهنات. وأخيرا، تم تطبيق بعض النتائج على دراسة وجود حلول معادلات دالية للبرمجة الديناميكية، وكذا دراسة وجود حلول معادلات تكاملية-تفاضلية تطورية.

Abstract

In this thesis, we obtained common fixed-point theorems for two mappings or a family of mappings using a generalized contraction condition in generalized metric spaces known as b-metric spaces, which generalize metric spaces. Additionally, we derived results concerning fixed points for single-valued and multi-valued mappings using a Hardy-Rogers-type contraction condition, along with a study of stability in the sense of Ulam-Hyers for this class of mappings. Furthermore, the existence of fixed points for generalized non-expansive mappings was proved for the first time in b-metric spaces without employing an F-contractive condition on the mapping. These results were supported by various examples that demonstrate the applicability of these theorems. Finally, some results were applied to study the existence of solutions for functional equations arising in dynamic programming, as well as the existence of solutions for evolutionary integro-dffierential equations.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons obtenu des théorèmes de points fixes communs pour deux applications ou une famille d'applications en utilisant une condition de contraction généralisée dans des espaces métriques généralisés appelés espaces b-métriques, qui représentent une généralisation des espaces métriques. Nous avons également obtenu des résultats concernant les points fixes pour des applications à valeurs uniques et multiples, en utilisant une condition de contraction du type Hardy-Rogers, accompagnée d'une étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers pour cette classe d'applications. De plus, l'existence de points fixes pour des applications non expansives généralisées a été démontrée pour la première fois dans les espaces b-métriques sans recourir à une condition F-contractante sur l'application. Ces résultats ont été appuyés par divers exemples illustrant l'applicabilité des théorèmes. Enfin, certains résultats ont été appliqués pour étudier l'existence de solutions d'équations fonctionnelles en programmation dynamique, ainsi que l'existence de solutions pour des équations intégo-dffiérentielles évolutionnaires.

ترميزات

مجموعة الأعداد الطبيعية	$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$
مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة	$\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$
مجموعة الأعداد الصحيحة	$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\mathbb{R}$
مجموعة غير خالية	E
b-مسافة	D
فضاء b-متري بثابت $s \geq 1$ نرمز له اختصارا بـ: (E,D)	(E,D,s)
فضاء مُقاس ذو قياس μ	(Ω,A,μ)
فضاء لوبيغ ذو الأس p من المجال $(0,+\infty)$	$L^p(\Omega)$
مجموعة الدوال الحقيقية القيوسة المعرفة على Ω	$\mathscr{M}(\Omega)$
فضاء لوبيغ بأس متغير: $p:\Omega\to[1,+\infty)$	$L^{p(.)}(\Omega)$
الكرة المفتوحة ذات المركز a ونصف قطر r	$B(a,r)$
الكرة المغلقة ذات المركز a ونصف قطر r	$B[a,r]$
ملاصقة المجموعة F	$\bar{F}$
النهاية السفلى	$\liminf_{n\to+\infty}$
النهاية العليا	$\limsup_{n\to+\infty}$
مجموعة النقاط الثابتة للتطبيق T	$\mathrm{Fix}(T)$
تركيب T مع نفسه n مرة، مع اصطلاح أن: $T^0=I_E$	T^n
مجموعة النقاط الثابتة المشتركة بين T و S	$\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)$

متتالية تطبيقات	(T_n)
مجموعة النقاط الثابتة المشتركة بين التطبيقات T_n	$\cap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_n) = \{u^*\}$
عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من E	$\mathscr{P}(E)$
عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية والمغلقة من E	$\mathscr{C}(E)$
عائلة المجموعات الجزئية غير الخالية والمحدودة والمغلقة من E	$\mathscr{BC}(E)$
إلى b-مسافة بين المجموعتين A و B	$D(A,B)$
	$\delta(A,B) = \sup_{x \in A} D(x,B)$
b-مسافة المعممة لهاوسدورف	$H(A,B)$
تطبيق متعدد القيم	$T : E \to \mathscr{P}(E)$
بيان التطبيق T	$G(T)$
مجموعة النقاط الثابتة التامة للتطبيق متعدد القيم T	$\mathrm{SFix}(T)$
دالة غاما لأولر	$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx$

مقدمة عامة

إن النظرية المعروفة باسم "نظرية النقطة الثابتة" تعد من النظريات المهمة في الرياضيات، حيث تهدف بشكل رئيسي إلى دراسة مسألة النقطة الثابتة:

$$Tu = u; \qquad (0.1)$$

حيث أن المجهول u ينتمي إلى مجموعة E معطاة، والدالة $T: E \to E$ معلومة.
هذا النوع من المعادلات يظهر في مجالات مختلفة، بما في ذلك المعادلات غير الخطية، الدالية، التفاضلية العادية والجزئية، والتكاملية، وغيرها. يمكن تصنيف نظرية النقطة الثابتة إلى عدة فروع بناءً على الأساليب المستعملة لدراستها.
الفرع الأول هو نظرية النقطة الثابتة الطوبولوجية، حيث تُعتبر مبرهنة Brouwer للنقطة الثابتة أحد نتائجها المهمة. تركز هذه النظرية على الفضاءات الطوبولوجية E التي تمتلك خاصية النقطة الثابتة، والتي تعني أن كل دالة مستمرة $T: E \to E$ تملك على الأقل نقطة ثابتة في E. على سبيل المثال، تنص مبرهنة Brouwer على أنه إذا كان $K \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة غير خالية، متراصة ومحدبة، فإن كل دالة مستمرة من K نحو نفسها تملك على الأقل نقطة ثابتة.
الفرع الثاني هو نظرية النقاط الثابتة المتقطعة، التي تعتمد أساسًا على نظرية الترتيب والشبكات. إحدى النتائج الأساسية في هذا المجال هي مبرهنة Knaster-Tarski، التي تؤكد أنه إذا كان $(E, \leq)$ شبكة تامة والدالة $T: E \to E$ متزايدة، فإن مجموعة النقاط الثابتة للدالة T غير خالية.

الفرع الثالث: نظرية النقطة الثابتة المترية، والتي تعتمد على الفضاءات المترية وخصائصها. ومن النتائج الأساسية في هذا المجال مبرهنة Banach للنقطة الثابتة، التي قدمها سنة 1922 في أطروحته [12]. تعتمد هذه النظرية بشكل أساسي على مفهوم "التقليص" في الفضاءات المترية. يمكن صياغة مبرهنة Banach كما يلي: إذا كان (E, d) فضاءً متريًا تاما، وكانت $T: E \to E$ تقليصا، فإن T تمتلك نقطة ثابتة وحيدة في E. وهنا، تشير كلمة "تقليص" إلى كل دالة $T: E \to E$ تحقق شرط التقليص:

$$\exists \theta \in [0,1[; \forall u, v \in E; d(Tu, Tv) \leq \theta \times d(u, v).$$

طريقة البرهان على هذه المبرهنة تعتمد بشكل أساسي على المتتاليات التكرارية: $(u_{n+1} = Tu_n)$ بدءًا من قيمة ابتدائية $u_0 \in E$، حيث نبرهن أن هذه المتتالية تؤول إلى نقطة ثابتة للدالة T. يمكن

توسيع دراسة النقاط الثابتة لتشمل أنواعًا أخرى من المسائل، حيث تكون مسألة النقاط الثابتة حالة خاصة منها، ومن بين هذه الأنواع نذكر:

1. معادلة نقطة التطابق: تُكتب على الشكل $Tu = Su$، حيث T وS هما تطبيقان. وعندما يكون S هو التطبيق المطابق، تصبح المعادلة معادلة نقطة ثابتة.
2. معادلة النقطة الثابتة المشتركة: تُكتب على الشكل $Tu = Su = u$، وعندما تكون $T = S$، تؤول إلى معادلة نقطة ثابتة.
3. معادلة النقطة الثابتة لدالة متعددة القيم $T : E \to P(E)$: هنا تكون المعادلة على الشكل $u \in Tu$.

الطريقة الأكثر شهرة لدراسة النقاط الثابتة المترية تعتمد على تعريف مسافة على المجموعة وتحديد شرط التقلص الذي يحققه التطبيق، بعد ذلك، ندرس تقارب المتتالية التكرارية $(T^n u_0)$، المعروفة باسم: متتالية بيكار *Picard*، ونُبرهن أن نهايتها تُمثل نقطة ثابتة للتطبيق T.

هذه الطريقة تعتمد أساسا على:

1. خصائص الفضاء والمسافة المُعرَّفة عليه؛
2. شرط التقليص الذي يحققه التطبيق T.

الفضاءات المعروفة باستعمالها الواسع هي الفضاءات المترية، وهي بحد ذاتها تعميم للفضاءات الإقليدية. ومع ذلك، هناك أنواع أخرى من الفضاءات تُعتبر أكثر عمومية من الفضاءات المترية. وبالتالي، يمكن تعميم مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة بواسطة تعميم الفضاء أو تعميم شرط التقليص أو تعميمهما معا.

تتناول هذه الرسالة دراسة النقاط الثابتة للتطبيقات سواءً وحيدة القيمة أو متعددة القيم، بالإضافة إلى النقاط الثابتة المشتركة، باستخدام شرط تقيلص معمم يُعرف باسم تقليص هاردي-روجرز Hardy-Rogers على نوع من الفضاءات المترية المعمّمة يُسمى b-metric spaces التي نترجمها في هذه الرسالة بـ: الفضاءات b–مترية.

الفصل 1 يُقدِّم مفهوم الفضاءات b-مترية ، بما في ذلك بعض خصائصها الطوبولوجية والتوطئات الأساسية التي تُعدُّ وسائل ضرورية لبقية الرسالة. بعد ذلك، نعرض بعض الأنواع المعروفة من التقليصات ومبرهنات النقاط الثابتة المرتبطة بها، مثل F-تقليص F-contraction [88]، وتقليص كانان Kannan [47]، وتقليص Chatterjea [26]، وتقليص Reich [76]، والتقليصات من نوع Hardy-Rogers [39]، وF-تقليص من نوع Hardy-Rogers [27]، وغيرها. يمكن اعتبار هذا القسم جانب تاريخي من تطور مبرهنة بناخ. في القسم التالي، نُقدّم عدة مبرهنات

للنقاط الثابتة المشتركة، مع التركيز على تلك المتعلقة بالتقليصات المُعمّمة و F-تقليص دون تقديم أي براهين. القسم الأخير نُقدم فيه بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالتطبيقات متعددة القيم وبعض مبرهنات النقاط الثابتة التي لها علاقة بموضوع الأطروحة. بشكل عام، يُمثل هذا الفصل نظرة عامة حول بعض النتائج الحديثة المتعلقة بالتقليصات من نوع هاردي-روجرز وF-تقليص في الفضاءات المترية و b-مترية.

الفصل **2** سوف نَعرض فيه نتائجنا المتعلقة بالنقاط الثابتة المشتركة باستعمال التقليصات من نوع هاردي-روجرز في إطار الفضاءات b-مترية. النتيجة الرئيسية لهذا الفصل هي المبرهنة **2.2**، والتي تُعتبر الأساس لجميع النتائج اللاحقة في هذا الفصل. بعد عرض مختلف النتائج التي توصلنا إليها، مع تقديم أمثلة عديدة، قُمنا بمقارنة نتائجنا بنتائج بعض البحوث السابقة والتي سبق أن ذكرنا بعضها في الفصل **1**، لنتوصل في الأخير إلى أن نتائجنا تعمم بعضها وتحسن بعضها الآخر بشكل جيد، سواء في الفضاءات المترية أو b-مترية.

الفصل **3** نعرض النتائج المتعلقة بالنقاط الثابتة للدوال متعددة القيم في الفضاءات b-مترية التامة، باستخدام تقليصات من نوع هاردي-روجرز، أو ما نسميه لاحقا التقليصات المعممة. في القسم الثاني، تم البرهان لأول مرة على نتيجة تخص التطبقات غير الموسعة المعممة، سواء التطبيقات وحيدة القيم أو متعددة القيم.

بعد دراسة وجود النقاط الثابتة، نمر إلى استقرار مسائل النقاط الثابتة في الفصل الموالي **4**، حيث تم دراسة مسألة الاستقرار بمفهوم أولام-هايرز Ulam-Hyers . تحصلنا على نتائج مهمة في هذه الناحية، حيث أثبتنا استقرار مسألة النقطة الثابتة لفئة واسعة من التطبيقات تسمى: التطبيقات C-بيكار الضعيفة. من جهة أخرى تمت الإجابة عن سؤال مفتوح تم طرحه في الورقة [71] بخصوص برهنة استقرار أولام-هايرز لتطبيق T دون استعمال قُربية Proximinality قيمه.

نختتم هذا الفصل ببعض التطبيقات لنتائجنا، اخترنا لذلك دراسة وجود حلول للمعادلات الدالية للبرمجة الديناميكية، وحلول معادلات تكاملية-تفاضلية.

الفصل 1

أساسيات

مقدمة

يتناول هذا الفصل تقديم المفاهيم الأساسية االتي نحتاجها لاحقا، وهو مقسم إلى أربعة أقسام: القسم 1.1 نعرض فيه الفضاءات b-مترية مع تسليط الضوء على بعض خصائصها الطوبولوجية والتوطئات الأساسية التي تُعد حجر الأساس لنتائجنا، مثل التوطئتين 1.1 و1.1. يُقدّم القسم 2.1 بعض مبرهنات النقاط الثابتة المعروفة ذات الصلة بنتائج الأطروحة. في القسم 3.1، نعرض العديد من مبرهنات النقاط الثابتة المشتركة التي تعتمد على شروط تقليصية من نوع هاردي-روجرز و F-تقليص. وأخيرًا، يركز القسم 4.1 على المفاهيم الأساسية المتعلقة بالتطبيقات متعددة القيم وبعض مبرهنات النقاط الثابتة المتعلقة بها، خاصة تلك التي تستخدم شروط تقليصية من نوع هاردي-روجرز و F-تقليص. جميع مبرهنات النقاط الثابتة في هذا الفصل تُعرض دون برهان.

1.1 الفضاءات b- مترية

تعريف 1.1 [10]

نقول عن تطبيق $D : E \times E \longrightarrow [0, +\infty)$ إنه b-مسافة إذا تحققت الشروط التالية من أجل كل $u, v, w \in E$:

$$(B_1) \quad D(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$$

$$(B_2) \quad D(u, v) = D(v, u);$$

$$(B_3) \quad D(u, v) \leq s[D(u, w) + D(w, v)].$$

في هذه الحالة، نسمي الثلاثية (E, D, s) بـ: فضاء b-متري بثابت $s \geq 1$. للتبسيط، سنرمز إلى (E, D, s) بالزوج (E, D) في باقي هذه الأطروحة.

لنقدم بعض الأمثلة الاعتيادية.

مثـــال 1.1

لتكن $E = \mathbb{R}$ ونُعرّف D كالآتي:

$$D(u, v) = (u - v)^2; \qquad (1.1)$$

حينها تكون $(\mathbb{R}, D)$ فضاء b-متريًا بثابت $s = 2 \geq 1$. تحقق الشروط (B_1) و (B_2) واضح. الشرط (B_3) يتحقق مباشرة من المتباينة:

$$(u+v)^2 \leq 2\left(u^2+v^2\right); \qquad (1.2)$$

فنحصل على ما يلي:

$$D(u,v) = (u-w+w-v)^2 \leq 2\left((u-w)^2+(w-v)^2\right) = 2\left(D(u,w)+D(w,v)\right).$$

نحتاج إلى هذه التوطئة لعرض بعض الأمثلة الاعتيادية.

توطئـــة 1.1

لتكن $p \in (0,+\infty)$ و $u, v \in [0,+\infty)$.

1. إذا كان $p \geq 1$ فإن:

$$(u+v)^p \leq 2^{p-1}\left(u^p+v^p\right). \qquad (1.3)$$

2. إذا كان $0 < p < 1$ فإن:

$$(u+v)^p \leq u^p+v^p. \qquad (1.4)$$

برهان. نفرض أن $v > 0$ لأن المتباينة صحيحة لما يكون $v = 0$. من أجل كل $v > 0$، نعرّف الدالة $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ كما يلي:

$$f(u) = \frac{(u+v)^p}{u^p+v^p}.$$

مشتقتها $f'(u)$ تُعطى بالصيغة:

$$f'(u) = \frac{pv(u+v)^{p-1}(v^{p-1}-u^{p-1})}{(u^p+v^p)^2}.$$

إذا كان $p \geq 1$، فإن f تبلغ أكبر قيمة لها عند $u = v$. ومنه، من أجل كل $u \geq 0$، نحصل على $f(u) \leq f(v)$. بحساب $f(v)$:

$$f(v) = \frac{(2v)^p}{2v^p} = 2^{p-1}.$$

وعليه نستنتج:

$$\frac{(u+v)^p}{u^p+v^p} \leq 2^{p-1},$$

وهو ما يكافئ المتباينة (1.3).
في الحالة $0 < p < 1$، تبلغ f قيمتها الكبرى عند $u = 0$ أوعندما يقترب u من اللانهاية. بما أن $f(0) = 1$، نحصل على المتباينة (1.4). □

مثـــال 2.1

لكل $p \in [1, +\infty)$، نُعرّف التطبيق التالي:

$$D_p(u, v) = |u - v|^p. \tag{1.5}$$

بالاعتماد على المتباينة (1.3)، نستنتج أن $(\mathbb{R}, D_p)$ فضاء b-متري بثابت $s = 2^{p-1} \geq 1$.
في حالة $p > 1$، لدينا، على سبيل المثال:

$$D_p(1, -1) = 2^p > 1^p + 1^p = D_p(1, 0) + D_p(0, -1). \tag{1.6}$$

وعليه يكون $(\mathbb{R}, D_p)$ ليس متريا.

مثـــال 3.1

ليكن (E, d) فضاءً متريًا، لكل $p \geq 1$، يمكن تعريف تطبيق كما يلي:

$$D_p(u, v) = [d(u, v)]^p. \tag{1.7}$$

عندئذ لدينا: (E, D_p) هو فضاء b-متري بثابت $s = 2^{p-1} \geq 1$.

مثـــال 4.1

ليكن $E = L^p(\Omega)$ فضاء لوبيغ بمعامل $p \in (0, +\infty)$، أي فضاء الدوال القيوسة $f : \Omega \to \mathbb{R}$ حيث $\int_\Omega |f|^p < \infty$.
نُعرّف D_p كما يلي:

$$D_p(f, g) = \left[\int_\Omega |f - g|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

من المعروف أنه إذا كان $p \geq 1$، فإن $(L^p(\Omega), D_p)$ فضاء متري، بينما في حالة $0 < p < 1$، فهو ليس فضاءً متريًا.

لنفرض أن $0 < p < 1$، عندها لكل $u, v \in [0, +\infty)$ نجد:

$$|u+v|^p \leq u^p + u^p. \tag{1.9}$$

نحصل لكل $f, g, h \in L^p(\Omega)$:

$$\int_\Omega |f-g|^p \leq \int_\Omega |f-h|^p + \int_\Omega |h-g|^p.$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} D_p(f,g) &\leq \left[\int_\Omega |f-h|^p + \int_\Omega |h-g|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left[D_p(f,h) + D_p(h,g)\right]. \end{aligned}$$

إذن، الشرط (B_3) يتحقق لـ $s = 2^{\frac{1-p}{p}} > 1$. وبالتالي، في حالة $0 < p < 1$، يكون الفضاء $\left(L^p(\Omega), D_p\right)$ فضاء b-متريا بثابت $s = 2^{\frac{1-p}{p}}$.

مثـــال 5.1

ليكن (E_i, D_i)، حيث $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، فضاءات b-مترية بثوابت $s_i \geq 1$. نُعرّف $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ والتطبيق $D : E \times E \to [0, +\infty)$ كما يلي:

$$D(U,V) = \sum_{i=1}^{i=n} D_i(u_i, v_i); \tag{1.10}$$

حيث $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ و$V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. إذن، (E, D) هو فضاء b-متري بثابت $s = \max\limits_{1 \leq i \leq n} s_i \geq 1$.

مثـــال 6.1

نعتبر $(\Omega, \mathrm{A}, \mu)$ فضاء قيوسا، و $\mathscr{M}(\Omega)$ مجموعة الدوال الحقيقية القيوسة المعرفة على Ω.
من أجل كل دالة قيوسة $p : \Omega \to [1, +\infty)$ نعرف المجموعات التالية:
$\Omega_1(p) = \{x \in \Omega \mid p(x) = 1\}$

$\Omega_*(p) = \{x \in \Omega \mid 0 < p(x) < 1\}$. ونعرف p_+ و p_- كما يلي:

$$p_- = ess \inf_{x \in \Omega_*} p(x); \quad p_+ = ess \sup_{x \in \Omega_*} p(x). \tag{1.11}$$

نعرف فضاءات لوبيغ بأس متغير والتي نرمز لها عادة بـ:

$$E = L^{p(.)}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} d\mu < \infty \right\}. \tag{1.12}$$

نعرف على المجموعة E التطبيق التالي:

$$D(f,g) = \int_\Omega |f(x) - g(x)|^{p(x)} d\mu; \quad \forall f, g \in E. \tag{1.13}$$

واضح أن هذا التطبيق يحقق الشرطين (B_1) و (B_2) محققان. بالنسبة للشرط (B_3) يتحقق في حالة $p_+ < \infty$ من أجل الثابت: $s = 2^{p_+ - 1}$ ، لأنه لدينا:

$$\begin{aligned}
D(f,g) &= \int_\Omega |f(x) - g(x)|^{p(x)} d\mu \\
&\le \int_\Omega \left[|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \right]^{p(x)} d\mu \\
&\le \int_\Omega 2^{p(x)-1} \left[|f(x) - h(x)|^{p(x)} + |h(x) - g(x)|^{p(x)} \right] d\mu \\
&\le 2^{p_+ - 1} \left[\int_\Omega |f(x) - h(x)|^{p(x)} d\mu + \int_\Omega |h(x) - g(x)|^{p(x)} d\mu \right] \\
&= s \left[D(f,h) + D(h,g) \right].
\end{aligned}$$

نُعرّف الآن بعض المفاهيم الطوبولوجية لهذا النوع من الفضاءات التي نحتاجها في عملنا لاحقا.

تعريف 2.1

1. نقول عن متتالية (u_n) من E إنها متقاربة نحو $u \in E$ إذا وفقط إذا كان: $\lim_{n \to +\infty} D(u_n, u) = 0$ في $\mathbb{R}$، ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n \to +\infty} u_n = u$ في (E, D).
2. نقول عن المتتالية $\{u_n\}$ إنها متتالية كوشي إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m \ge N \implies D(u_n, u_m) < \epsilon). \tag{1.14}$$

3. نقول إن الفضاء (E, D) تام إذا وفقط إذا كانت كل متتالية كوشي هي متتالية متقاربة.

الخاصية التالية توضح العلاقة بين المتتاليات المتقاربة والكوشية، وكذلك وحدانية النهاية حالَ وجودها.

خاصـــية 1.1

ليكن (E,D) فضاء b-متري بثابت $s \geq 1$.

1. كل متتالية (u_n) في E متقاربة تملك نهاية وحيدة.
2. كل متتالية (u_n) متقاربة هي متتالية كوشي.

برهان. 1. لنفرض أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = v$، عندئذ يكون:

$$D(u,v) \leq s[D(u,u_n) + D(u_n,v)]. \qquad (1.15)$$

وبأخذ $n \to +\infty$، نحصل على $D(u,v) \leq 0$، وبالتالي $D(u,v) = 0$. ومن الشرط (B_1) نستنتج أن $u = v$.

2. يُستنتج الادعاء الثاني مباشرة من المتراجحة:

$$D(u_n,u_m) \leq s[D(u_n,u) + D(u,u_m)],$$

حيث u هي نهاية المتتالية (u_n).

□

تعريـف 3.1

ليكن $a \in E$ و $r > 0$. تُعرَّف الكرتان المفتوحة والمغلقة $B(a,r)$ و $B[a,r]$ على الترتيب، بمركز a ونصف قطر r، كما يلي:

$$B(a,r) = \{u \in E : D(a,u) < r\}, \qquad (1.16)$$

$$B[a,r] = \{u \in E : D(a,u) \leq r\}. \qquad (1.17)$$

1. نقول إن المجموعة الجزئية $U \subset E$ مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall u \in U, \exists r > 0 : B(u,r) \subset U. \qquad (1.18)$$

2. نقول إن المجموعة الجزئية $F \subset E$ مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها F^c مجموعة مفتوحة.

نرمز بـ: $\mathcal{T}_D$ لعائلة كل المجموعات المفتوحة من E. عندئذٍ تُشكل الثنائية $(E,\mathcal{T}_D)$ فضاءً طوبولوجيًا.

من جهة أخرى، يُحدث التقارب طوبولوجيا أخرى $\mathcal{T}$ على E. نُقدم الخواص التالية، ونُحيل القارئ إلى الورقة [1] للاطلاع على البرهان.

خاصـــية 1.1

1. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_D$.
2. لتكن (u_n) متتالية في E و $u \in E$. إذًا:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ في $(E,\mathcal{T}_D)$ كان إذا وفقط إذا $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ في (E,D).

خاصـــية 2.1

لتكن $F \subset E$. لدينا ما يلي:

1. $u \in \bar{F}$ إذا وفقط إذا وُجدت متتالية (u_n) في F بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$.
2. F مغلقة في E إذا وفقط إذا $F = \bar{F}$.

تعريـف 4.1

لتكن (E,D_1) و(F,D_2) فضاءين b-مترين بثابتين s_1 و s_2 على التوالي.

1. نقول إن التطبيق $T : E \to F$ مستمر عند $a \in E$ إذا وفقط إذا:

$$\forall \{u_n\} \subset E : \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} T(u_n) = T(a) \right).$$

2. نقول إن T مستمر على E إذا وفقط إذا كان T مستمرا عند كل $a \in E$.

سنعرض الآن بعض النتائج غير الاعتيادية في الفضاءات b-مترية، والتي قد تسبب بعض الصعوبات في الدراسة. على سبيل المثال، قد يكون التطبيق D غير مستمر، وقد تكون الكرة المفتوحة $B(a,r)$ ليست مجموعة مفتوحة، وكذلك قد تكون الكرة المغلقة ليست مغلقة.

مثـــال 7.1

[[67]] لتكن $E=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ والدالة:

$$D(u,v)=\begin{cases}0 & \text{إذا } u=v,\\ 1 & \text{إذا } u\neq v\in\{0,1\},\\ |u-v| & \text{إذا } u\neq v\in\{0\}\cup\left\{\frac{1}{2n}:n=1,2,\ldots\right\},\\ 4 & \text{في الحالات الأخرى .}\end{cases}$$

عندها:

1. D هو b-مسافة بثابت $s=4$.
2. D ليس مسافة على E.
3. D ليس مستمرا بالنسبة لكل متغير.
4. $B(1,2)$ ليست مجموعة مفتوحة.

برهان. 1. نلاحظ أنه في [1] تم اختيار قيمة $s=\frac{8}{3}$. ولكن بالنسبة لهذه القيمة، فإن الشرط (B_3) لا يتحقق. على سبيل المثال في الحالة $u=1,v=\frac{1}{2n},w=0$، نحصل على:

$$D(u,v)=4,\quad D(u,w)=1,\quad D(w,v)=\frac{1}{2n}.$$

بالتالي:

$$D(u,w)+D(w,v)=\frac{2n+1}{2n}.$$

ومن ثم، لكل $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{8n}{2n+1}\leq s,$$

مما يعني $s\geq 4$.

2. على سبيل المثال:

$$D\left(1,\frac{1}{4}\right)=4>1+\frac{1}{4}=D(1,0)+D\left(\frac{1}{4},0\right).$$

3. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}D\left(0,\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

لذا:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0 \text{ في } (E,D).$$

ولكن:

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(1,\frac{1}{2n}\right)=4\neq 1=D(1,0).$$

هذا يبين أن D ليس مستمرا بالنسبة لكل من المتغيرين.

4. لدينا $B(1,2)=\{0,1\}$، لذا $0\in B(1,2)$. لنأخذ $r>0$ ونختار $n\in\mathbb{N}$ بحيث:

$$D\left(0,\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}<r,$$

إذًا $\frac{1}{2n}\in B(0,r)$ ولكن $\frac{1}{2n}\notin B(1,2)$ لأن:

$$D\left(1,\frac{1}{2n}\right)=4>2.$$

وبالتالي، لكل $r>0$:

$$B(0,r)\not\subseteq B(1,2),$$

مما يعني أن $B(1,2)$ ليست مجموعة مفتوحة.

□

المبرهنة التالية مهمة جدا في الفضاءات b-مترية، فهي تعوض خاصية استمرار الـ b-مسافة D.

مبرهنـة 1.1

[6 ,43] لتكن (u_n) متتالية متقاربة نحو $u\in E$. عندئذٍ، من أجل كل $v\in E$:

$$\frac{1}{s}D(u,v)\leq \liminf_{n\to+\infty} D(u_n,v)\leq \limsup_{n\to+\infty} D(u_n,v)\leq sD(u,v). \qquad (1.19)$$

برهان. لدينا لكل $n\in\mathbb{N}$:

$$D(u_n,v)\leq sD(u_n,u)+sD(u,v); \qquad (1.20)$$

وأيضًا:

$$D(u,v)\leq sD(u,u_n)+sD(u_n,v).$$

بالتالي:

$$\frac{1}{s}D(u,v)-D(u,u_n)\leq D(u_n,v).$$

بأخذ $\limsup$ للطرفين في المتباينة الأولى و$\liminf$ في المتباينة الثانية، نحصل على النتيجة المطلوبة.

□

خاصـــية 3.1

[1] إذا كان D مستمرا بالنسبة لأحد المتغيرات، فإنه مستمر أيضًا بالنسبة للمتغير الآخر.

برهان. نفرض أن D مستمر بالنسبة للمتغير الأول، أي لكل $u, v \in E$: إذا $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ فإن $\lim_{n\to+\infty} D(u_n, v) = D(u, v)$. إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$، فإنه حسب الشرط (B_2):

$$\lim_{n\to+\infty} D(u, v_n) = \lim_{n\to+\infty} D(v_n, u) = D(v, u) = D(u, v).$$

وبالتالي، فإن D مستمر بالنسبة للمتغير الثاني. □

خاصـــية 4.1

[1] إذا كان D مستمر بالنسبة لأحد المتغيرات، فإنه لكل $a \in E$ و $r > 0$:

1. $B(a, r)$ مجموعة مفتوحة.
2. $B[a, r]$ مجموعة مغلقة.

برهان. 1. سوف نبرهن أن المجموعة $[B(a, r)]^c$ مغلقة. لتكن $\{u_n\} \subset [B(a, r)]^c$ بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$، لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$: $D(a, u_n) \geq r$. إذًا:

$$D(a, u) = \lim_{n\to+\infty} D(a, u_n) \geq r;$$

وبالتالي $u \in [B(a, r)]^c$، مما يعني أن $[B(a, r)]^c$ مغلقة، وهذا يعني أن $B(a, r)$ مفتوحة.

2. لتكن $\{u_n\} \subset B[a, r]$ بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$. لدينا $D(a, u_n) \leq r$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذًا:

$$D(a, u) = \lim_{n\to+\infty} D(a, u_n) \leq r;$$

أي أن $B[a, r]$ مجموعة مغلقة.

□

الآن نهتم بالمتتاليات التي تحقق المتباينة التالية:

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq \theta D(u_{n-1}, u_n). \qquad (1.21)$$

من المعروف أنه في الفضاءات المترية، إذا كان $0 \leq \theta < 1$، فإن المتتالية (u_n) تكون متتالية كوشي. علاوة على ذلك، إذا كان الفضاء تاما، فإن المتتالية تكون متقاربة.

أما في الفضاءات b-مترية، فإن الشرط الطبيعي الموضوع على θ هو $0 \leq \theta < \frac{1}{s}$، والتي تعتبر إحدى المشكلات التي تظهر في الفضاءات b-مترية.

تمت دراسة الحالة $0 \leq \theta < 1$ من قبل العديد من الباحثين، وتم تقديم عدة براهين لها، بما في ذلك تقديرات معدل التقارب. سنعرض في ما يلي بعض هذه النتائج.

النتيجة التالية تم إثباتها من طرفنا في الورقة البحثية [23].

توطئـــة 2.1

لتكن (u_n) متتالية في E بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$:

$$D(u_{n+1}, u_n) \leq R\theta^n. \tag{1.22}$$

حيث R عدد حقيقي موجب ثابت. عندئذٍ:

1. المتتالية (u_n) هي متتالية كوشي.
2. إذا كان (E, D) فضاءً تاما وu هو نهاية المتتالية (u_n)، فإن لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل عدد صحيح موجب N بحيث $s\theta^N < 1$، لدينا:

$$D(u_n, u) \leq s^2 A \left[\frac{s^2\theta^N}{1 - s\theta^N} + s + 1\right] \theta^{\lfloor \frac{n}{N} \rfloor N}, \tag{1.23}$$

حيث $\lfloor m \rfloor$ تمثل الجزء الصحيح للعدد m، و $A = R\left[\sum_{k=1}^{N-1} s^k + s^{N-1}\right]$.

3. إذا كان $s\theta < 1$، فإننا نحصل على:

$$D(u_n, u) \leq \left(\frac{Rs^2}{1 - s\theta}\right)\theta^n. \tag{1.24}$$

برهان. لبعض الاختصار نستعمل أحيانا الترميز: $D(u_n, u_{n+1}) = D_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. سنقسم البرهان إلى عدة خطوات:

1. نختار $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\theta^N < \frac{1}{s}$؛ على سبيل المثال، $N = \left\lfloor -\frac{\ln(s)}{\ln(\theta)} \right\rfloor + 1$. نضع $\theta^N = t$. من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نكتب $n = pN + r$ حيث $p = \lfloor \frac{n}{N} \rfloor$ و $0 \leq r < N$. وبالتالي، لكل $n \in \mathbb{N}$، نجد:

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq Rt^p.$$

2. نعرف متتالية مساعدة $v_n = u_{nN}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. عندئذ نجد:

$$\begin{aligned}
D(u_{pN}, u_{(p+1)N}) &\leq sD(u_{pN}, u_{pN+1}) + sD(u_{pN+1}, u_{pN+N}) \\
&\leq sD(u_{pN}, u_{pN+1}) + s^2 D(u_{pN+1}, u_{pN+2}) + s^2 D(u_{pN+2}, u_{pN+N}) \\
&\vdots \\
&\leq sD_{pN} + s^2 D_{pN+1} + \cdots + s^{N-1} D_{pN+N-1} \\
&\leq R\left[st^p + s^2 t^p + \cdots + s^{N-1} t^p + s^{N-1} t^p\right] \\
&\leq R\left[\sum_{k=1}^{N-1} s^k + s^{N-1}\right] t^p = At^p.
\end{aligned}$$

وبالتالي، من أجل كل $p \in \mathbb{N}$، نستنتج أن:

$$D(v_p, v_{p+1}) \leq At^p.$$

لنرمز لهذه القيمة بـ $\tilde{D}_n = D(v_n, v_{n+1})$. بعد ذلك، باستخدام الاستقراء، نجد أن:

$$\begin{aligned}
D(v_n, v_{n+m}) &\leq sD(v_n, v_{n+1}) + sD(v_{n+1}, v_{n+m}) \\
&\vdots \\
&\leq s\tilde{D}_n + s^2 \tilde{D}_{n+1} + \cdots + s^{m-1} \tilde{D}_{n+m-2} + s^{m-1} \tilde{D}_{n+m-1} \\
&\leq Ast^n + As^2 t^{n+1} + \cdots + As^{m-1} t^{n+m-2} + As^{m-1} t^{n+m-1}.
\end{aligned}$$

وعليه، نجد:

$$\begin{aligned}
D(v_n, v_{n+m}) &\leq Ast^n\left[1 + (st) + (st)^2 + \cdots + (st)^{m-2} + s^{m-2} t^{m-1}\right] \\
&= Ast^n\left[\frac{1 - (st)^{m-1}}{1 - st} + \frac{(st)^m}{s^2 t}\right].
\end{aligned}$$

بما أن $0 \leq t < \frac{1}{s}$، فإن ذلك يبسط إلى:

$$D(v_n, v_{n+m}) \leq Ast^n\left[\frac{1}{1 - st} + \frac{(st)^m}{s^2 t}\right].$$

وبالتالي، لكل $n, m \in \mathbb{N}$، نجد:

$$D(v_n, v_m) \leq Ast^n\left[\frac{1}{1 - st} + \frac{(st)^{m-n}}{s^2 t}\right]. \qquad (1.25)$$

هذا يثبت أن (v_n) هي متتالية كوشي.

3. الآن ننتقل لإثبات أن (u_n) هي متتالية كوشي. أولاً، لأي $p \in \mathbb{N}$ و $0 \leq r \leq r' < N$، نجد:

$$D(u_{pN}, u_{pN+r}) \leq At^p; \tag{1.26}$$

$$\sigma(u_{pN+r}, u_{(p+1)N}) \leq At^p; \tag{1.27}$$

$$\sigma(u_{pN+r}, u_{pN+r'}) \leq At^p. \tag{1.28}$$

لنأخذ $n, m \in \mathbb{N}$ حيث $N \leq n < m$، ولنفترض أن $p = \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$ و $p' = \left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor$. إذاً $p \leq p'$، ونميز الحالتين:

الحالة 1. عندما $p = p'$، أي $pN \leq n \leq m < (p+1)N$، نستخدم (1.26) لنجد:

$$D(u_n, u_m) \leq At^p.$$

الحالة 2. عندما $p < p'$، أي $pN \leq n < (p+1)N \leq p'N \leq m < (p'+1)N$، نجد:

$$\begin{aligned} D(u_n, u_m) &\leq sD(u_n, u_{(p+1)N}) + sD(u_{(p+1)N}, u_m) \\ &\leq sD(u_n, u_{(p+1)N}) + s^2 D(u_{(p+1)N}, u_{p'N}) + s^2 D(u_{p'N}, u_m). \end{aligned}$$

باستخدام (1.25), (1.26), (1.27), و (1.28)، نجد:

$$\begin{aligned} D(u_n, u_m) &\leq sAt^p + s^2 Ast^{p+1} \left[\frac{1}{1-st} + \frac{(st)^{p'-p-1}}{s^2 t} \right] + s^2 At^{p'} \\ &\leq sAt^p + s^2 Ast^{p+1} \left[\frac{1}{1-st} + \frac{(st)^{p'-p-1}}{s^2 t} \right] + s^2 At^p. \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$D(u_n, u_m) \leq sAt^p \left[1 + \frac{s^2 t}{1-st} + (st)^{p'-p-1} + s \right]. \tag{1.29}$$

المتباينة (1.29) تؤكد أن (u_n) هي متتالية كوشي، مما يكمل إثبات التصريح الأول للتوطئة.
عند أخذ النهاية السفلية للطرفين في (1.29) لما $m \to +\infty$، أي عندما $p' \to +\infty$، واستخدام المبرهنة (1.19)، نحصل على:

$$D(u_n, u) \leq s^2 A \left[\frac{s^2 t}{1-st} + s + 1 \right] t^p.$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المتباينة (1.23).
بالنسبة للنقطة الثالثة من التوطئة: بتطبيق (1.22) وشرط (B_3)، نجد أنه لكل $n, p \in \mathbb{N}$، نحصل

على:

$$\begin{aligned} D(u_n,u_{n+p}) &\le s\left[D(u_n,u_{n+1})+D(u_{n+1},u_{n+p})\right] \\ &\le D(u_n,u_{n+1})+s^2\left[D(u_{n+1},u_{n+2})+D(u_{n+2},u_{n+p})\right] \\ &\le \sum_{k=0}^{p-2} s^{k+1}\sigma_{n+k}+s^{p-1}D_{n+p-1} \\ &\le R\left[\sum_{k=0}^{p-2} s^{k+1}\theta^{n+k}+s^{p-1}\theta^{n+p-1}\right] \\ D(u_n,u_{n+p}) &\le R\left[\frac{s}{1-s\theta}+(s\theta)^{p-1}\right]\theta^n. \end{aligned} \tag{1.30}$$

بأخذ النهاية السفلى في (1.30)، عندما $p\to+\infty$ وتطبيق المبرهنة (1.19) حيث $s\theta<1$، نصل بسهولة إلى المتباينة في (1.24). وهذا ينهي برهان التوطئة. □

في التوطئة التالية، نقدم تقديراً آخر لمعدل التقارب.

توطئـــة 3.1

ليكن (E,D) فضاءً b-متريا تاما بثابت $s\ge 1$، وليكن (u_n) متتالية في E. نفرض أنه يوجد $\theta\in[0,1)$ بحيث:

$$\forall n\ge 1:\quad D(u_{n+1},u_n)\le\theta D(u_n,u_{n-1}). \tag{1.31}$$

عندئذ:

1. المتتالية (u_n) تتقارب نحو نقطة $u\in E$.
2. لكل $n\in\mathbb{N}$ ولكل عدد صحيح ثابت N بحيث $s\theta^{2^N}<1$، نحصل على تقدير التقارب:

$$\sigma(u_n,u)\le\left[B\frac{s^{N+2}}{1-s\theta^{2^N}}\right]\theta^n, \tag{1.32}$$

حيث $B=\frac{\theta^2}{1-\theta}D(u_1,u_0)$.

3. إذا كان $\theta s<1$ و $\theta\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$، يمكن تحسين (1.32) كما يلي:

$$D(u_n,u)\le\left[\frac{s^2}{1-s\theta}D(u_1,u_0)\right]\theta^n. \tag{1.33}$$

برهان. تم إثبات الادعاء الأول في العديد من المقالات (انظر على سبيل المثال: برهان [83, 6 Lemma]). علاوة على ذلك، من خلال البرهان المقدم في [83, 6 Lemma]، لكل

$n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث $m > n + 2^N$، لدينا:

$$D(u_n, u_m) \leq C \frac{s^{N+1}}{1 - s\theta^{2^N}} \theta^n. \tag{1.34}$$

حيث $C = \frac{\theta}{1-\theta} D(u_1, u_2) \leq \frac{\theta^2}{1-\theta} D(u_0, u_1)$.
التقدير (1.32) ينتج من المبرهنة (1.19) وبرهان التوطئة 6 في [83]. بأخذ الحد الأدنى في (1.34) عندما $m \to +\infty$ وتطبيق المبرهنة (1.19)، نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} D(u_n, u) &\leq C \frac{s^{N+1}}{1 - s\theta^{2^N}} \theta^n \\ &\leq \frac{\theta^2}{1-\theta} D(u_0, u_1) \frac{s^{N+1}}{1 - s\theta^{2^N}} \theta^n. \end{aligned}$$

وهذا يؤدي إلى (1.32). بالنسبة لـ $s\theta < 1$، يمكننا استنتاج (1.33) باستخدام $R = D(u_1, u_0)$ في التقدير (1.24) من التوطئة 1.1. علاوة على ذلك، عندما $s\theta < 1$، فإن المقارنة بين الحدود العليا في (1.32) مع $N = 0$ و في (1.33) تعطي:

$$B \frac{s^2}{1 - s\theta} - \left[\frac{s^2}{1 - s\theta} D(u_1, u_0) \right] = \frac{s^2 D(u_1, u_0) \left(\theta^2 + \theta - 1\right)}{(1 - s\theta)(1 - s\theta)} > 0, \forall \theta \in \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right).$$

وبالتالي، يوفر (1.33) حدًا أكثر دقة من (1.32) ضمن $\theta \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$. □

توطئـــة 4.1

ليكن (u_n) متتالية في E. نفرض أنه يوجد $\theta \in [0, 1)$ بحيث تتحقق المتباينة (1.31)، عندها:

1. المتتالية (u_n) تتقارب نحو عنصر $u \in E$.
2. لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل عدد صحيح ثابت N بحيث $s^2\theta^N < 1$، لدينا:

$$D(u_n, u) \leq \frac{s^2 D(u_0, u_N)}{1 - s^2\theta^N} \theta^n. \tag{1.35}$$

هذا يوفر تقديرًا بديلاً للتقارب يكمّل النتائج السابقة.

برهان. ليكن $N \in \mathbb{N}$ بحيث $s^2\theta^N < 1$. لكل $n, m \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$D(u_n, u_{n+N}) \leq \theta^n D(u_0, u_N); \tag{1.36}$$

$$D(u_{N+n}, u_{N+m}) \leq \theta^N D(u_n, u_m). \tag{1.37}$$

بتطبيق المتباينة مثلثية، نحصل على:

$$\begin{aligned} D(u_n,u_m) &\le sD(u_n,u_{n+N}) + sD(u_{n+N},u_m) \\ &\le s\theta^n D(u_0,u_N) + s^2 D(u_{n+N},u_{m+N}) + s^2 D(u_{m+N},u_m) \\ &\le s\theta^n D(u_0,u_N) + s^2\theta^N D(u_n,u_m) + s^2\theta^m D(u_0,u_N). \end{aligned}$$

وعليه، نحصل على:

$$D(u_n,u_m) \le \frac{sD(u_0,u_N)}{1-s^2\theta^N}\left[\theta^n + s\theta^m\right]. \qquad (1.38)$$

وهذا يثبت أن (u_n) هي متتالية كوشي، وبالتالي فهي متقاربة نحو عنصر $u \in E$.
بأخذ النهاية السفلية في (1.38) لمّا $m \to \infty$، وتطبيق المبرهنة 1.1، نستنتج المتباينة (1.35)، وبذلك نكون قد أكملنا البرهان. □

ملاحظة 1.1.1

المبرهنة 1.1 تُعتبر تمديدا للمبرهنتين 1.1 و 1.1، حيث أنهما تستعملان شرطا أقوى. على وجه الخصوص، المتباينة (1.31) في المتراجحة التكرارية من الرتبة الأولى $D(u_{n+1},u_n) \le \theta D(u_n,u_{n-1})$ تستلزم (1.22) من المبرهنة 1.1، على الرغم من أن العكس ليس بالضرورة صحيحًا. من الجدير بالذكر أن (1.31) تؤدي إلى $D(u_{n+1},u_n) \le \theta^n D(u_1,u_0)$ مما يحقق (1.22) عندما يكون $R = D(u_1,u_0)$. بالإضافة إلى ذلك، فإن (1.22) في المبرهنة 1.1 تتحقق تحت شرط تكراري من الرتبة الثانية $D(u_{n+1},u_n) \le \theta D(u_{n-1},u_{n-2})$ وهو ما لا تستوعبه المبرهنتان 1.1 و 1.1.

2.1 التطبيقات التقليصية وبعض مبرهنات النقط الثابتة

تعريف 5.1

لنعتبر E مجموعة غير خالية، وتطبيق $T : E \to E$. نقول عن $u \in E$ إنها نقطة ثابتة للتطبيق T إذا كان $Tu = u$.

ترميز: نرمز إلى مجموعة النقاط الثابتة للتطبيق T بـ: $\mathrm{Fix}(T)$.
إذا كان للتطبيق T نقطة ثابتة وحيدة، فإننا نسمّيها u_T ونكتب: $\mathrm{Fix}(T) = \{u_T\}$.

تعريف 2.2.2

ليكن (E,D_1) و (F,D_2) فضاءين b-متريين، وليكن $T:E\to F$ تطبيقا.

1. نقول إن T ليبشيتزي إذا وُجد عدد حقيقي موجب θ بحيث:

$$D_2(Tu,Tv)\le\theta D_1(u,v); \qquad (1.39)$$

لكل $u,v\in E$.

2. إذا كان $\theta<1$، فإن T يسمى تطبيقًا تقليصيا أو تقليص اختصارا.

ملاحظة 1.2.1

نلاحظ أنه لدينا الاستلزامات التالية: إذا كان T تقليصا، فإن T تطبيق ليبشيتزي، مما يعني أن T مستمر بانتظام، وبالتالي T تطبيق مستمر.

تُصاغ مبرهنة بناخ Banach ، أو مبدأ التقليص لبناخ الشهير كما يلي:

مبرهنة 2.1

إذا كان (E,D) فضاء متريًا تاما، وكان $T:E\to E$ تقليصا، فإن:

1. $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$.
2. لأي $u_0\in E$، تتقارب المتتالية (T^nu_0) نحو النقطة الثابتة $u_T\in E$، مع التقدير التالي لكل $n\in\mathbb{N}$:

$$D(T^nu_0,u_T)\le\frac{\theta^n}{1-\theta}D(u_0,Tu_0). \qquad (1.40)$$

من المهم ملاحظة أن مبدأ التقليص لبناخ يعتمد بشكل أساسي على:

1. تمام الفضاء E;
2. شرط التقليص المحدد بواسطة المتباينة (1.39);
3. كون المتباينة (1.39) محققة كليا لأجل كل $u,v\in E$، مما يجعلها شرطًا تقليصيا كليا.

هذه الملاحظة تتيح لنا العديد من التعميمات لمبرهنة بناخ. بعض التعميمات تعدل الشرط التقليصي (1.39)، بينما البعض الآخر يستعمل التقليصات المحلية، بينما البعض يستعمل تمديدات للفضاء نفسه. سنعرض فيما يلي العديد من التعميمات المعروفة لمبرهنة بناخ. نبدأ بتعميم بسيط لمبرهنة بناخ.

إذا كان (E,D) فضاء متريًا تاما، ووُجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث T^n يكون تقليصا، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$.

برهان. بما أن T^n تقليص، فإنه يملك نقطة ثابتة وحيدة $u\in E$. بالإضافة إلى ذلك، نلاحظ أن $TT^nu=T^nTu=Tu$، مما يعني أن Tu هي أيضا نقطة ثابتة لـ T^n. وبسبب وحدانية هذه النقطة الثابتة، نستنتج أن $Tu=u$، أي أن u هو نقطة ثابتة لـ T. من أجل الوحدانية، نفرض أن v هو نقطة ثابتة لـ T، فإن v هو أيضًا نقطة ثابتة لـ T^n، لذا $u=v$. □

مثـــال 1.1

ليكن $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفًا كما يلي:

$$Tx=\begin{cases}0; & x\in\mathbb{Q}\\ 1; & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

إذن، T ليس تقليصًا، لأنه ليس مستمرا، ولكن لدينا $T^2\equiv 0$ وهو تقليص. لذا، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$.

تعريـف 6.1

1. نقول إن T تطبيق غير مُوسِّع إذا كان يحقق الشرط التالي لكل $u,v\in E$

$$D(Tu,Tv)\le D(u,v). \qquad (1.41)$$

2. نقول إن T تطبيق مُقلِّص إذا كانت المتباينة التالية محققة لكل $u,v\in E$ حيث $u\neq v$

$$D(Tu,Tv)<D(u,v). \qquad (1.42)$$

ملاحظة 2.2.1

نتائج المبرهنة 2.1 غير محققة عموما عندما يكون T تطبيقًا غير موسع أو تطبيقًا مُقلِّصا، وهذه الأمثلة توضح هذه الملاحظة.

مثـــال 2.1

1. ليكن $E = \mathbb{R}$ و D هي المسافة الاعتيادية على $\mathbb{R}$. التطبيق $Tu = u$ هو تطبيق غير موسِّع لأن: $|Tx - Ty| = |x - y|$. لكننا نلاحظ أن جميع النقاط $x \in \mathbb{R}$ هي نقاط ثابتة لـ T.
2. نعتبر التطبيق $Tu = \ln(e^u + 1)$. من أجل كل $u \in \mathbb{R}$ لدينا: $T'u = \frac{e^u}{e^u + 1}$، وبالتالي من أجل كل $x \neq y$

$$|Tu - Tv| = T'(c)\,|u - v|$$
$$< |u - v|$$

مما يدل على أن T هو تطبيق مقلِّص. ومع ذلك، ليس لـ T نقاط ثابتة في $\mathbb{R}$.

إذن، هناك شروط إضافية ضرورية للتطبيقات المُقلِّصة لضمان وجود النقاط الثابتة ووحدانيتها. في هذا السياق، قدَّم Edelstein [32] مبرهنة نقطة ثابتة للتطبيقات المُقلِّصة كما يلي:

مبرهنـة 4.1

[32] M. Edelstein, 1961 إذا كان T تطبيقًا مُقلِّصا يحقق الشرط التالي:
يوجد $u \in E$ حيث المتتالية $(T^n u)$ تملك متتالية جزئية متقاربة $(T^{n_i} u)$ حيث: $\lim_{i \longrightarrow +\infty} T^{n_i} u = \xi \in E$.
إذن ξ هي النقطة الثابتة الوحيدة لـ T.

من هذه المبرهنة، يتم استخلاص النتيجة المشهورة التالية:

مبرهنـة 5.1

Edelstein 1961 كل تطبيق مُقلِّص معرف على فضاء متري متراص يملك نقطة ثابتة وحيدة.

الرياضي Rakotch [74] برهن المبرهنة التالية، التي تعبر تعميما لمبرهنة بناخ وذلك بجعل ثابت

التقليص متغيرا تبعا لقيم $D(u,v)$.

مبرهنـة 6.1

[74] E. Rakotch, 1962 في فضاء متري تام (E,D)، إذا كان $T:E\to E$ يحقق الشرط:

$$\forall u,v\in E: D(Tu,Tv)\le \alpha(D(u,v))\,D(u,v); \qquad (1.43)$$

حيث $\alpha:[0,+\infty)\longrightarrow[0,1)$ هي دالة متناقصة.
إذن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$، ولكل $u\in E$ المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو النقطة الثابتة u_T.

لاحقا، قدم Boyd و Wong في الورقة [15] تعميماً لمبرهنة Rakotch كما يلي:

مبرهنـة 6.2.2

[15] W. D. Boyd, و W. S. J. Wong, 1969 ليكن (E,D) فضاء متريا تاما، و $T:E\longrightarrow E$ يحقق:

$$D(Tu,Tv)\le \varphi(D(u,v)); \qquad (1.44)$$

حيث: $\varphi:[0,+\infty)\longrightarrow[0;+\infty)$ هي دالة نصف-مستمرة من اليمين، و $\varphi(t)<t$ من أجل كل $t>0$.
إذن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$، ولكل $u\in E$ المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو النقطة الثابتة u_T.

ملاحظة 3.2.1

نقول أن: φ نصف-مستمرة من اليمين عند t_0 إذا كان:

$$\limsup_{t\to t_0^+}\varphi(t)\le\varphi(t_0).$$

وبالمقابل، نقول أن: φ نصف-مستمرة من اليسار عند t_0 إذا كان:

$$\limsup_{t\to t_0^-}\varphi\le\varphi(t_0).$$

وبالمثل، نقول أن: φ نصف-مستمرة من اليمين عند t_0 إذا كان:

$$\liminf_{t\to t_0^+}\varphi(t)\ge\varphi(t_0).$$

و نصف-مستمرة من اليسار عند t_0 إذا كان:

$$\liminf_{t \to t_0^-} \varphi(t) \geq \varphi(t_0).$$

بعد ذلك، برهن Geraghty [37] على المبرهنة التالية باستعمال الترميز التالي:
$\mathscr{S}$ هي أسرة الدوال $\alpha : (0,+\infty) \longrightarrow [0,1)$ التي تحقق الخاصية التالية:
$\alpha(t_n) \longrightarrow 1$ تكافئ $t_n \longrightarrow 0$.

مبرهنـة 7.2.2

[37] A. M. Geraghty, 1973 إذا كان (E,D) فضاء متريا تاما، وكان $T : E \to E$ تطبيقًا مُقلِّصا يحقق

$$\forall u, v \in E, u \neq v \Longrightarrow D(Tu,Tv) \leq \alpha(D(u,v))\, D(u,v). \qquad G$$

حيث $\alpha \in \mathscr{S}$. إذن $\mathrm{Fix}(T) = \{u_T\}$، ولكل $u \in E$ المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو u_T.

مفهوم التطبيق F-تقليصي الذي قدمه الرياضي Wardowski في ورقته البحثية [88]، يتضمن عائلة $\mathscr{F}$ للدوال $F : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ التي تتمتع بالخصائص التالية:

(F_1) الدالة F دالة متزايدة تماما، أي أنه إذا كان $a,b \in (0,+\infty)$ بحيث $a < b$، فإن $F(a) < F(b)$.

(F_2) المتتالية $\{t_n\} \subset (0,+\infty)$ تؤول إلى 0 إذا وفقط إذا كان $F(t_n) \longrightarrow -\infty$.

(F_3) يوجد ثابت $k \in]0,1[$ حيث:

$$\lim_{t \to 0^+} t^k F(t) = 0.$$

تعريـف 7.1 [88] D. Wardowski, 2012

نقول إن التطبيق T تطبيق F-تقليصي إذا وُجد $\tau > 0$ و $F \in \mathscr{F}$ بحيث أنه لكل $u,v \in E$ يتحقق:

$$D(Tu,Tv) > 0 \implies \tau + F(D(Tu,Tv)) \leq F(D(u,v)).$$

نتيجة لهذه الفكرة، يمكن الحصول على أنواع متعددة من التقليصات:

مثـــال 3.1

الدوال المعرفة بـ $F_1(t)=\ln(t)$، $F_2(t)=t+\ln(t)$ و $F_3(t)=-\frac{1}{\sqrt{t}}$ تحقق الشروط (F_1)-(F_3).

إذا كان T تطبيق F_1-تقليصي، فإنه يصبح تقليصًا اعتياديا:

$$D(Tu,Tv)\leq e^{-\tau}D(u,v).$$

إذا كان T تطبيق F_2-تقليصي، فإنه لكل $x,y\in E$ حيث: $Tu\neq Tv$ لدينا:

$$\frac{D(Tu,Tv)}{D(u,v)}e^{D(Tu,Tv)-D(u,v)}\leq e^{-\tau}.$$

إذا كان T تطبيق F_3-تقليصي، فإنه لكل $u,v\in E$ حيث: $Tu\neq Tv$ يتحقق:

$$D(Tu,Tv)\leq\frac{1}{(1+\tau\sqrt{D(u,v)})^2}D(u,v).$$

من خلال هذا المفهوم الجديد، أثبت Wardowski المبرهنة التالية:

مبرهنـة 7.1

[88] Wardowski 2012 ليكن (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\to E$ تطبيق F-تقليصي. إذن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$، ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية (T^nu) تتقارب نحو u_T.

ملاحظة 4.2.1

1. نلاحظ أن كل F-تقليصي هو تطبيق مُقلِّص، لذا فهو تطبيق مستمر.
2. باختيار $F(t)=\ln t$، يصبح T تقليصًا، وبالتالي فإن مبرهنة Wardowski تُعتبر تعميمًا لمبرهنة بناخ.

في عام 2014، استعمل Piri و Kumam في [73] شروطًا أخرى على الدالة F:

(F_1) F دالة متزايدة تماما.

(F_2') $\inf F=-\infty$.

(F_3') F دالة مستمرة على $(0,+\infty)$.

وضح المؤلفان أن الشرطين (F_3) و(F_3') مستقلان عن بعضهما. باستخدام هذه الشروط الجديدة،

أثبت المؤلفان المبرهنة التالية:

مبرهنة 8.1

[73] Piri و Kumam 2014 إذا كان (E,D) فضاءً متريًا تاما، و T تطبيق F-تقليصي، حيث F تحقق الشروط (F_1) و(F_2') و(F_3')، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$؛ ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو u_T.

في عام 2018، قدم A. Lukàcs, S. ,Kàjanto [55] عائلة جديدة من الدوال $F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$، تم ترميزها بـ: $\mathscr{F}_{s,\tau}$ لكل $s\geq 1$ و$\tau>0$. تشمل هذه العائلة الدوال التي تحقق الشروط (F_1) و(F_3) بالإضافة إلى شرط جديد:

$(F_{s,\tau})$ إذا كان $\inf F=-\infty$ و$x,y,z\in(0,+\infty)$ بحيث:

$$\tau+F(sy)\leq F(z),\quad \text{و}\quad \tau+F(sx)\leq F(y)$$

إذن $\tau+F(s^2x)\leq F(sy)$.

أشار المؤلفان إلى أنه إذا كان $\inf F\neq-\infty$ أو $s=1$، فإن الشرط $(F_{s,\tau})$ يكون محققًا. تُعتبر هذه العائلة ذات أهمية خاصة في سياق الفضاءات b-مترية، مما يسمح لنا بعدم استعمال الشرط (F_2).

مبرهنة 9.1

[55] Lukàcs و Kàjanto 2018 إذا كان (E,D) فضاءً متريًا تاما، و T تطبيق F-تقليصي، حيث F تحقق الشرطين (F_1) و(F_3)، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$؛ ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو u_T.

بإمكاننا تمديد مبرهنتي Rakotch و Geraghty من خلال اعتبار τ دالة تحقق شروطا محددة. يُطلق على هذا المفهوم الجديد للتقليص اسم: تطبيق (τ,F)-تقليصي أو تطبيق F-تقليصي غير خطي.

تعريف 8.1

نقول عن تطبيق $T:E\to E$ إنه تطبيق (τ,F)-تقليصي إذا وُجدت دالتان $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ و$\tau:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ تحققان الشروط التالية:

(H_1) F تحقق الشرطين (F_1) و(F_2').

(H_2) $\lim_{t\longrightarrow r^+}\tau(t)>0,\forall r\geq 0$.

(H_3) $\forall u,v\in E: D(Tu,Tv)>0\implies \tau(D(u,v))+F(D(u,v))\leq F(D(u,v))$.

ينتج عن هذا التمديد مبرهنة جديدة يمكن النص عليها كالتالي:

مبرهنـة 10.1

[88] Wardowski 2018 إذا كان (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\to E$ تطبيق (τ,F)-تقليصي فإن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$، ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو النقطة الثابتة u_T.

في سياق آخر، تم تعريف أنواع أخرى من التقليصات بواسطة العديد من الباحثين. نستعرض فيما يلي أهم هذه التقليصات التي لها علاقة بنتائجنا.

مبرهنـة 11.1

[47] Kannan 1968 ليكن (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\to E$ تطبيق يحقق الشرط التالي:

$$\exists \alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\forall u,v\in E: D(Tu,Tv)\le \alpha\left[D(u,Tu)+D(v,Tv)\right]. \qquad (1.45)$$

إذن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$، ومن أجل كل $u\in E$، فإن المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو u_T.

مبرهنـة 12.1

[76] Reich 1971 ليكن (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\longrightarrow E$ تطبيق يحقق الشرط التالي:

$$\forall u,v\in E: D(Tu,Tv)\le aD(u,Tu)+bD(v,Tv)+cD(u,v); \qquad (1.46)$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+b+c<1$. إذن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$، ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية $(T^n u)$ تتقارب نحو النقطة الثابتة u_T.

يُظهر المثال التالي أن مبرهنة Reich أكثر عمومية من مبرهنتي Banach و Kannan.

مثـــال 4.1

ليكن $E=[0,1]$ و$T(u)=\frac{u}{3}$ لـ $0\le u<1$، و $T(1)=\frac{1}{6}$.

- T ليس تقليصًا بمفهوم بناخ لأنه غير مستمر.

- لدينا:

$$D\left(T(0),T\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}D(0,T(0))+\frac{1}{2}D\left(\frac{1}{3},T\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

لذا T ليس تقليصًا بمفهوم كنان.

- ولكنه تقليص بمفهوم Reich حيث:

$$a=\frac{1}{6},\quad b=\frac{1}{9},\quad c=\frac{1}{3}.$$

نوع آخر من التقليص تم تقديمه بواسطة Chatterjea [26].

مبرهنـة 13.1

[26] Chatterjea 1972 إذا كان (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\longrightarrow E$ تطبيقًا يحقق الشرط التالي:

$$\exists\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\forall u,v\in E:D(Tu,Tv)\leq\alpha[D(v,Tu)+D(u,Tv)]. \quad (1.47)$$

إذن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$؛ ولأي عنصر $u\in E$، فإن المتتالية (T^nu) تتقارب نحو النقطة الثابتة u_T.

يمثل تقليص هاردي-روجرز Hardy-Rogers تمديدا لتقليصات Kannan و Reich و Chatterjea.

تعريـف 9.1 [46, 60]

نقول إن التطبيق $T:E\to E$ تقليص معمم إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي لجميع $u,v\in E$:

$$D(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu); \quad (1.48)$$

حيث إن a,b,c,e,f ثوابت حقيقية موجبة مع $a+b+c+d+e<1$.

إذا كان $a+b+c+d+e=1$، فإن T يسمى تطبيقًا غير موسع معممًا.

ملاحظة 5.2.1

تُعرف التقليصات المعممة أيضًا باسم: التطبيقات التقليصية من نوع هاردي-روجرز.

باستخدام هذا النوع من التقليص، أثبت هاردي وروجرز في [39] المبرهنة التالية:

مبرهنة 14.1

[39] E. G. Hardy, و D. T. Rogers, 1973 ليكن (E,D) فضاءً متريًا تاما، وليكن $T:E\to E$ تقليصًا معممًا، إذن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$؛ ولكل $u\in E$، تتقارب المتتالية (T^nu) نحو u_T.

بالنسبة للتطبيقات غير الموسعة المعممة، أثبت Bogin [13] المبرهنة التالية:

مبرهنة 15.1

[13] J. Bogin, 1976 ليكن (E,d) فضاءً متريًا تاما، وليكن $T:E\to E$ تطبيقًا غير موسع معممًا، حيث $b=c=\beta>0;d=e=\gamma>0$، إذن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$؛ ولكل $u\in E$، تتقارب المتتالية (T^nu) نحو النقطة الثابتة u_T.

قدم Cosentino و Vetro [27] نوعا جديدا للتقليص، وذلك بدمج التقليص من نوع هاردي روجرز بالتطبيقات F-تقليصية كما يلي:

تعريف 10.1

ليكن (E,D) فضاءً متريًا، وليكن $T:E\longrightarrow E$ تطبيقًا. يسمى التطبيق T بـ:F-تقليص من نوع هاردي-روجرز إذا وُجدت دالة F تحقق (F_1)-(F_3)، و$\tau>0$ بحيث من أجل كل $u,v\in E$:

$$\tau+F(D(Tu,Tv))\leq F\left(\alpha D(u,v)+\beta D(u,Tu)+\gamma D(v,Tv)+\delta D(u,Tv)+LD(v,Tu)\right) \quad (1.49)$$

لكل $u,v\in E$ مع $D(Tu,Tv)>0$، حيث $\alpha+\beta+\gamma+2\delta=1;\gamma\neq 1$ مع $L\geq 0$.

تحصل المؤلفون على النتيجة التالية:

مبرهنة 16.1

[27] Cosentino و Vetro 2014 إذا كان (E,D) فضاءً متريًا تاما، و$T:E\to E$ تطبيق F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز، فإن $\mathbf{Fix}(T)\neq\emptyset$ وإذا تحقق أيضًا $\alpha+\delta+L\leq 1$، فإن $\mathbf{Fix}(T)=\{u_T\}$.

يمكننا استنتاج أن كل تطبيق F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز يُعتبر تطبيقا غير موسع معمما

وبالتالي فإن هذه المبرهنة تُعمِّم مبرهنة Bogin.

ملاحظة 6.2.1

باختيارات محددة نحصل على مبرهنات تم ذكرها سابقا، أو على تمديدات لها.

1. باختيار $\alpha = 1$ و$\beta = \gamma = \delta = L = 0$ في المبرهنة الأخيرة، نحصل على مبرهنة Wardowski.
2. باختيار $\alpha = \delta = L = 0$ و$\beta = \gamma = \frac{1}{2}$، نحصل على نسخة جديدة من مبرهنة Kannan.
3. باختيار $\alpha = \beta = \gamma = 1$ و$\delta = L = \frac{1}{2}$ نحصل على نسخة جديدة من مبرهنة Chatterjea.
4. باختيار $\delta = L = 0$ نحصل على نسخة جديدة من مبرهنة Reich.

في عام 2016، عرَّف Vetro [86] مفهوم التطبيق F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز كما يلي:

تعريف 11.1 (انظر [86, التعريف 03])

ليكن (E,D) فضاءً متريًا. يسمى التطبيق $T: E \to E$ تطبيقا F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز إذا وُجد $F \in \mathbb{F}$ و$\tau \in \mathbb{S}$ بحيث:

$$\begin{aligned} &\tau(D(u,v)) + F(D(Tu,Tv)) \leq F(\alpha D(u,v) + \beta D(u,Tu) \\ &+\gamma D(v,Tv) + \delta D(u,Tv) + LD(v,Tu)); \end{aligned} \tag{1.50}$$

لكل $u,v \in E$ مع $D(Tu,Tv) \neq 0$. حيث $\alpha+\beta+\gamma+2\delta = 1, \gamma \neq 1$، $\alpha+\gamma+L \leq 1$.

$\mathbb{F}$ هي عائلة الدوال $F:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ التي تحقق (F_1), (F_2) و(F_3);

و$\mathbb{S}$ هي عائلة الدوال $\tau:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ التي تحقق الشرط التالي:

$$\forall r \geq 0: \lim_{t \to r^+} \tau(t) > 0.$$

وقد أثبت المبرهنة التالية:

مبرهنة 17.1

ليكن (E,D) فضاءً متريًا تاما و$T: E \to E$ تطبيقًا. إذا وُجد $F \in \mathbb{F}$ مستمر و$\tau \in \mathbb{S}$ بحيث يكون T تطبيقا F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز، فإن $\mathrm{Fix}(T) = \{u_T\}$.

في عام 2018، عرَّف كل من Lukàcs و Kajànto [55] مفهوم التطبيق F-تقليصي الضعيف من نوع هاردي-روجرز:

تعريف 12.1 ([55, التعريف 1.5])

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا بثابت $s\geq 1$، و$\alpha,\beta,\gamma,\delta,L\geq 0$ أعدادًا حقيقية، و $T:E\to E$ تطبيقًا. إذا وُجد $\tau>0$ و$F\in\mathscr{F}_{s,\tau}$ بحيث لجميع $u,v\in E$ العلاقة $D(Tu,Tv)>0$ تستلزم:

$$\tau+F(sD(Tu,Tv))\leq F(\alpha D(u,v)+\beta D(u,Tu)+\gamma D(v,Tv)+\delta D(u,Tv)+LD(v,Tu)). \quad (1.51)$$

فإن T يسمى: تطبيق F-تقليصي ضعيف من نوع هاردي-روجرز.

باستخدام هذا النوع من التقليص، أثبتوا المبرهنة التالية::

مبرهنة 18.1

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s\geq 1$، و$T:E\to E$ Lukàcs 2018 و Kajànto تطبيق F-تقليصي ضعيف من نوع هاردي-روجرز. إذا تحقق أحد الشرطين $\alpha+\beta+\gamma+(s+1)\delta<1$ أو $\alpha+\beta+\gamma+(s+1)L<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$. بالإضافة إلى ذلك، إذا تحقق أيضًا $\alpha+\delta+L<s$، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u_T\}$.

قام درويش ورامول [30] بتمديد مفهوم التطبيق F-تقليصي من نوع هاردي-روجرز في إطار الفضاءات b-مترية كالتالي.

تعريف 10.2.2 (انظر [30, التعريف 9.3])

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا بثابت $s\geq 1$. يسمى $T:E\to E$ تطبيق F-تقليصي مُمدَّد من نوع هاردي-روجرز إذا وُجد $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ و$\tau\in S_\omega$ بحيث من أجل كل $u,v\in E$ التي تحقق: $D(Tu,Tv)\neq 0$ يكون :

$$\tau(D(u,v))+F(D(Tu,Tv))\leq F(\alpha D(u,v)+\beta D(u,Tu)+\gamma D(v,Tv)+\delta D(u,Tv)+LD(v,Tu)).$$

حيث: لكل $\omega\geq 1$، S_ω هي عائلة الدوال $\tau:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ التي تحقق الشرط التالي:

$$\forall\eta>0:\liminf_{t\to r}\tau(t)>0,\quad \text{حيث } r\in[\eta^+,\eta^+\omega].$$

تحت هذا النوع من التقليص، أثبتوا المبرهنتين التاليتين:

مبرهنة 19.1

Derouich و Ramoul 2020 ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s \geq 1$، و $T : E \to E$ تطبيق F-تقليصي ممددا من نوع هاردي-روجرز حيث F دالة متزايدة ومستمرة، وأحد الشرطين (H_s^1) أو (H_s^2) محقق، حيث:

$$(H_s^1)\ \alpha + \beta + \gamma + 2s\delta = \frac{1}{s},\ \text{و}\ \gamma \neq \frac{1}{s};$$
$$(H_s^2)\ \alpha + \beta + \gamma + 2sL = \frac{1}{s},\ \text{و}\ \beta \neq \frac{1}{s}.$$

إذا تحقق $s^2\alpha + s^3(\delta + L) \leq 1$، فإن $\mathrm{Fix}(T) = \{u_T\}$.

إذا كان $s^2\alpha + s^3(\delta + L) < 1$، يمكن الاستغناء عن شرط استمرارية الدالة F.

مبرهنة 20.1

Derouich و Ramoul 2020 في فضاء b-متري تام (E,D) بثابت $s \geq 1$، إذا كان $T : E \to E$ تطبيقا F-تقليصي ممددًا من نوع هاردي-روجرز وF دالة متزايدة، وتحقق أحد الشرطين (H_s^1) أو (H_s^2) مع $s^2\alpha + s^3(\delta + L) < 1$ فإن: $\mathrm{Fix}(T) = \{u_T\}$.

3.1 مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة

تعريف 1.3.2

ليكن E مجموعة غير خالية مع تطبيقين $T, S : E \to E$.

1. نعرف نقطة $u \in E$ على أنها نقطة تطابق لـ T و S إذا كان $Tu = Su$.
2. النقطة $u \in E$ هي نقطة ثابتة مشتركة لـ T و S إذا كانت $Tu = Su = u$.
3. إذا وُجد $u \in E$ بحيث $w = Tu = Su$، فإن w يُسمى نقطة تلاقٍ لـ T و S.

ملاحظة 1.3.1

1. إذا كانت u نقطة ثابتة مشتركة لـ T و S، فإن u أيضًا نقطة تطابق لـ T و S، ومع ذلك، فإن العكس ليس صحيحًا دائمًا.
2. النقطة u نقطة ثابتة مشتركة، يعني $u \in \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S)$.

نحتاج بعض أنواع التوافق، نقدمها في التعريف التالي.

تعريف 13.1

ليكن $T, S : E \to E$ تطبيقين على فضاء b-متري (E, D) بثابت $s \geq 1$.

1. [69] يُقال أن T و S تباديلين إذا كان: $TS = ST$.
2. [69] يُقال أن T و S تباديلين بشكل ضعيف إذا كانت المعادلة التالية صحيحة لجميع $u \in E$:

$$D(TSu, STu) \leq D(Tu, Su). \qquad (1.52)$$

3. [69] يُقال أن T و S هما متوافقين إذا كان: كلما كانت هناك متتالية (u_n) في E بحيث أن $\lim_{n\to+\infty} Tu_n = \lim_{n\to+\infty} Su_n = t$ من أجل $t \in E$، فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} D(TSu_n, STu_n) = 0.$$

4. يُقال أن T و S متوافقين بشكل ضعيف إذا كان T و S يتبادلان عند نقاط التطابق الخاصة بهما، أي:

$$\forall u \in E : Tu = Su \implies STu = TSu.$$

5. [69] يُقال أن T و S تقليصين بشكل ضعيف منتظم إذا كانت المعادلات التالية صحيحة لجميع $u \in E$:

$$D(STu, SSu) \leq D(Tu, Su) \quad \text{و} \quad D(TSu, TTu) \leq D(Tu, Su). \qquad (1.53)$$

خاصية 4.1

1. إذا كان T و S متبادلين، فإنهما بالتالي متبادلين بشكل ضعيف.
2. إذا كان T و S متبادلين بشكل ضعيف، فإنهما بالتالي متوافقين.

العكس ليس صحيحًا دائمًا.

الآن سنقدم بعض مبرهنات النقاط الثابتة المشتركة الهامة في عملنا، والتي سيتم تمديدها أو تكييفها لتتناسب مع الفضاءات b-مترية في هذه الأطروحة.

مبرهنة 21.1

Iseki 1974 [52] ليكن (E,D) فضاءً مترتيًا تاما، و $T_n : E \to E$ $(n \geq 0)$ متتالية من التطبيقات. نفرض أنه توجد أعداد موجبة α, β, γ بحيث من أجل كل $u, v \in E$ يتحقق:

(1.54)

$$D(T_n u, T_m v) \leq \alpha D(u,v) + \beta (D(u, T_n u) + D(v, T_m v)) + \gamma (D(u, T_m v) + D(v, T_n u));$$

حيث: $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$. عندئذ، يكون $\cap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_n) = \{u^*\}$.

النتيجة التالية، التي برهنها Faradji و Nourouzi سنة 2017 في [35]، تمدد هذه المبرهنة إلى الفضاءات b-مترية تحت شرط تقليصي من نوع هاردي-روجرز.

مبرهنة 22.1

[35] ليكن (E,D) فضاءً b-متريا تاما بثابت $s \geq 1$، و $T, S : E \to E$ تحقق:

(1.55)

$$D(Tu, Sv) \leq aD(u,v) + bD(u,Tu) + cD(v,Sv) + dD(u,Sv) + eD(v,Tu);$$

حيث أن a, b, c, d, e هي ثوابت موجبة بحيث:

1. $s^2 a + s^2 b + s^2 c + s^3 d + s^3 e < 1$;
2. $b = c$ أو $d = e$.

عندها، يكون $\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S) = \{u^*\}$.

قدم المؤلفون في [35] التعريفات والترميزات التالية.

تعريف 14.1

1. دالة $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ تُسمى دالة مسافة مغيرة إذا:
   - ψ مستمرة ومتزايدة تماما،
   - $\psi(t) = 0$ إذا وفقط إذا كان $t = 0$.
2. Φ هي عائلة التطبيقات $\phi : [0, +\infty)^2 \to [0, +\infty)$ التي تحقق:

- $(a,b) \neq (0,0)$ إذا كان $\phi(0,0) \geq 0, \phi(x,y) > 0$؛
- $\phi\left(\liminf_{n\to+\infty} a_n, \liminf_{n\to+\infty} b_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(a_n, b_n)$.

مبرهنة 23.1

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$، و Nourouzi و Faradji 2017 [35] $T,S: E \to E$ تحقق لكل $u,v \in E$:

$$\psi(sD(Tu,Sv)) \leq \frac{\psi\left(\frac{D(u,Sv)+\frac{D(v,Tu)}{s^3}}{s+1}\right)}{1+\phi(D(u,Sv),D(v,Tu))}; \qquad (1.56)$$

حيث أن ψ هي دالة مسافة مغيرة، و $\phi \in \Phi$ و T مستمر. عندئذ، يكون $\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S) = \{u^*\}$.

عندما يكون $\psi(t) = t$ و $\phi(x,y) = \frac{1}{s(s+1)\alpha} - 1$ حيث $\alpha \in \left[0, \frac{1}{s(s+1)}\right)$، نستنتج ما يلي:

نتيجة 1.1

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$، و Nourouzi و Faradji 2017 [35] $T,S: E \to E$ تحقق لكل $u,v \in E$

$$D(Tu,Sv) \leq \alpha\left(D(u,Sv) + \frac{1}{s^3}D(v,Tu)\right); \qquad (1.57)$$

حيث أن $\alpha \in \left[0, \frac{1}{s(s+1)}\right)$ و T مستمر. عندها، يكون $\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S) = \{u^*\}$.

باستخدام التطبيقات F-تقليصية، تم تقديم المبرهنات التالية في [19].

مبرهنة 24.1

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$، و $T,S: E \to E$ و Chen 2022 وآخرون تطبيقين، بحيث توجد دالة متزايدة $F: [0,\infty) \to \mathbb{R}$، و $\tau > 0$، و $0 \leq a,d,e < 1$ ؛ $0 < b,c < 1$ بحيث تحقق:

(1) $a+b+c+2sd < 1$ و $a+b+c+2se < 1$؛

(2) $s^2 < \frac{1}{pq}$ و $\frac{sb}{1-e} < 1$، حيث:

$$p = \frac{a+b+sd}{1-c-sd}, q = \frac{a+c+se}{1-b-se}.$$

(3) لكل $u, v \in E$: إذا كان $D(Tu, Sv) > 0$، فإن:

$$\tau + F(D(Tu, Sv)) \leq F(aD(u,v) + bD(u,Tu) + cD(v,Sv) + dD(u,Sv) + eD(v,Tu)).$$

(1.58)

عندها، يكون $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) = \{u^*\}$.

مبرهنة 25.1

Chen 2022 وآخرون ليكن T و S تطبيقين على فضاء b-متري تام (E, D) بثابت $s \geq 1$.
لتكن $a, b, c, d, e \in (0,1)$ ثوابت تحقق:

$$a+b+c+sd+se<1, \quad s^2c+s^2d+(s^3+s^4)(a+e)<1, \quad s^2b+s^2e+(s^3+s^4)(a+d)<1.$$

نعرف الدالة $\theta : [0,1]^5 \longrightarrow [0,1]$ كما يلي:

$$\theta(a,b,c,d,e) = \min\left\{\frac{1-s^2b-s^2e-(s^3+s^4)(a+d)}{1-s^3b-s^2e-s^3a}, \frac{1-s^2c-s^2d-(s^3+s^4)(a+e)}{1-s^3c-s^2d-s^3a}\right\}.$$

نفرض أنه إذا كان:

$\theta(a,b,c,d,e)\, D(u,Tv) \leq s^2 D(u,v)$ أو $\theta(a,b,c,d,e)\, D(v,Su) \leq s^2 D(u,v)$

يتحقق فإنه (1.59)

$$D(Tu,Sv) \leq aD(u,v) + bD(u,Tu) + cD(v,Sv) + dD(u,Sv) + eD(v,Tu)$$

عندها، يكون $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) = \{u^*\}$.

4.1 الدوال متعددة القيم

بالنسبة للتطبيقات متعددة القيم، سوف نستعمل الترميزات التالية:

1. $\mathscr{P}(E)$ يرمز إلى عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من E.
2. $\mathscr{C}(E)$ تشير إلى عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية والمغلقة من E.
3. $\mathscr{BC}(E)$ تتضمن كل المجموعات الجزئية غير الخالية والمحدودة والمغلقة من E.

4. بالنسبة لكل مجموعتين غير خاليتين A و B من E، نعرف $D(A,B)=\inf\{D(a,b): a\in A, b\in B\}$
إذا كانت $A=\{a\}$ نكتب $D(\{a\},B)=D(a,B)$.
وبالمثل لدينا: $D(\{a\},\{b\})=D(a,b)$.

5. تسمى المجموعة $A\in P(E)$ مجموعة قُربية إذا كان لكل $x\in E$، يوجد $a\in A$ بحيث أن $D(x,a)=D(x,A)$.

6. $\delta(A,B)=\sup_{x\in A} D(x,B)$.

7. بالنسبة لـ $A,B\in\mathscr{C}(E)$، نعرف b-مسافة المعممة لهاوسدورف H كما يلي:

$$H(A,B)=\begin{cases}\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}, & \text{إذا كان الحد الأعلى موجودًا},\\ \infty, & \text{إذا كان الحد الأعلى غير موجود}.\end{cases}$$

إذا كان $A,B\in\mathscr{BC}(E)$، فإنه لدينا $H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}$.

8. يُسمى التطبيق $T:E\to\mathscr{P}(E)$ بـ: تطبيق متعدد القيم على E.

تعريف 15.1

لنعتبر $T:E\to\mathscr{P}(E)$ تطبيقًا متعدد القيم.

1. بيان T هو المجموعة $G(T)=\{(u,v)\in E\times E: v\in Tu\}$.
2. نقول إن T مغلقًا إذا وفقط إذا كانت $G(T)$ مغلقة في $E\times E$.
3. نقطة $u\in E$ هي نقطة ثابتة لـ T إذا كان $u\in Tu$، والمجموعة التي تحتوي على جميع النقاط الثابتة لـ T هي: $\mathrm{Fix}(T)=\{x\in E: u\in Tu\}$.
4. يُقال إن $u\in E$ هو نقطة ثابتة تامة لـ T إذا كان $Tu=\{u\}$، مع مجموعة النقاط الثابتة التامة لـ T التي يرمز إليها: $\mathrm{SFix}(T)\subseteq\mathrm{Fix}(T)$.

توطئـــة 5.1

[17, 18, 81] ليكن (E,D) فضاء b-متريا بثابت $s\geq 1$. من أجل كل $A,B,C\in P(E)$ لدينا:

1. $D(x,A)\leq D(x,a)$ من أجل كل $a\in A$;
2. $\delta(A,B)\leq H(A,B)$;
3. $D(x,B)\leq H(A,B)$ من أجل كل $x\in A$;
4. $(\mathscr{BC}(E),H)$ هو فضاء b-متري بثابت s;
5. $D(x,A)\leq s[D(x,y)+D(y,A)]$ من أجل كل $x,y\in E$.

6. إذا كان (E,D) فضاء b-متريا تاما، فإن $(\mathscr{BC}(E),H)$ يكون أيضًا تاما.
7. من تعريف $D(x,A)$ نجد:

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A : D(x,a) < D(x,A) + \epsilon.$$

8. إذا كان $B \in \mathscr{C}(E)$, فإن: من أجل كل $a \in A$ و $q > 1$, يوجد $b(a,q) \in B$ بحيث $D(a,b) \leq q\delta(A,B)$.
9. إذا كانت A مغلقة، فإننا نحصل على: $x \in A$ إذا وفقط إذا كان $D(x,A) = 0$.

تعريف 16.1

ليكن $T : E \to P(E)$ تطبيقا متعدد القيم.

1. دالة $f : E \to E$ تسمى دالة اختيار من T إذا كان $f(u) \in Tu$ من أجل كل $u \in E$.
2. متتالية من التقريبات المتعاقبة لـ T هي كل متتالية (u_n) في E حيث يكون $u_{n+1} \in Tu_n$ وتتقارب نحو نقطة ثابتة لـ T.
3. يكون T تطبيق بيكار ضعيف إذا كان لكل $(u,v) \in G(T)$ يوجد متتالية من التقريبات المتعاقبة لـ T يبدأ من $u_0 = u$ و $u_1 = v$.
4. إذا كان T تطبيق بيكار ضعيف، فإن التطبيق $T^\infty : G(T) \to P(Fix(T))$ يعرف على النحو التالي: $T^\infty(u,v)$ هي مجموعة النقاط $w \in Fix(T)$ بحيث يوجد متتالية من التقريبات المتعاقبة تبدأ من (u,v) وتتقارب نحو w.
5. يُعرف التطبيق T بأنه تطبيق C–بيكار ضعيف إذا كان T تطبيق بيكار ضعيف و $C > 0$ ويوجد دالة اختيار f^* من T^∞ بحيث لكل زوج $(u,v) \in G(T)$ تتحقق المتباينة:

$$D\left(u, f^*(u,v)\right) \leq CD(u,v).$$

تعرف هذه المتباينة بتقدير السحب-إزاحة.

مثـــال 1.1

ليكن $E = \mathbb{R}$ و b-مسافة D_p معرفة بـ: $D_p(u,v) = |u-v|^p$ حيث $p \in [1,\infty)$. عندئذٍ: (E,D_p) يشكل فضاء b-متريا تاما بثابت $s = 2^{p-1}$.

01. لكل $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا $\{a,b\},\{\alpha,\beta\}\in\mathscr{BC}(E)$ و:

$$H(\{a,b\},\{\alpha,\beta\})=\max\{|\alpha-a|^p,|\alpha-b|^p,|\beta-a|^p,|\beta-b|^p\}. \quad (1.60)$$

كحالة خاصة، لدينا

$$H(\{a\},\{\alpha,\beta\})=\max\{|\alpha-a|^p,|\beta-a|^p\}. \quad (1.61)$$

02. لدينا $[\alpha,\beta]\in\mathscr{BC}(\mathbb{R})$ لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ مع $\alpha\leq\beta$.
عندئذٍ لدينا:

$$H(A,B)=\max\{|d-b|^p,|c-a|^p\} \quad (1.62)$$

نعرض في ما يلي بعض مبرهنات النقاط الثابتة للتطبيقات متعددة القيم، والتي ستكون مفيدة للمقارنة في الفصول اللاحقة.

مبرهنة 25.1

Dube 1972 و Singh ليكن (E,D) فضاء متريا تاما، و $T:E\to\mathscr{BC}(E)$ تطبيقًا متعدد القيم يحقق لكل $u,v\in E$:

$$H(Tu,Tv)\leq\beta[D(u,Tu)+D(v,Tv)];$$

حيث $\beta<\frac{1}{2}$. إذا كان T مستمرًا، فإن $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$.

مبرهنة 26.1

Iseki 1975 [45] ليكن (E,D) فضاء متريا تاما، و $T:E\to\mathscr{BC}(E)$ تطبيقًا متعدد القيم يحقق لكل $u,v\in E$:

$$H(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tu)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)];$$

حيث a,β,γ أعداد حقيقية موجبة و $a+2\beta+2\gamma<1$. إذن، $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$.

المبرهنة التالية تستعمل شرط تقليصي من نوع هاردي-روجرز على فضاءات b-مترية.

مبرهنــة 27.1

Chfiu 2017 و Petrusel, G. [25] ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s>1$، و $T:E\to\mathscr{P}(E)$ يحقق لكل $u,v\in E$

$$H(Tu,Tv)\le aD(u,v)+\beta[(u,Tu)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)]; \quad (1.63)$$

مع الشروط التالية:

(V_1) $a+\beta+2s\gamma<\dfrac{s-1}{s^2}$;

(V_2) $\beta+s\gamma<\dfrac{1}{s}$;

(V_3) T مغلق.

إذن، $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$.

مبرهنــة 28.1

Chfiu 2017 و Petrusel, G. [25] ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s>1$، و $T:E\to\mathscr{P}(E)$ يحقق (1.63) لكل $u,v\in E$، بحيث تحقق الشروط (V_1)-(V_3). إذا كان $\mathrm{SFix}(T)\neq\emptyset$، فإن $\mathrm{SFix}(T)=Fix(T)=\{u^*\}$.

الفصل 2

مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة للتطبيقات وحيدة القيم

1.2 مقدمة

في هذا الفصل، سنقدم نتائجنا المتعلقة بنظرية النقطة الثابتة المشتركة ضمن سياق الفضاءات b-مترية، باستخدام شروط تقليصية من نوع هاردي-روجرز. تم تخصيص القسم 2.2 لعرض النتائج الرئيسية، مع التركيز بشكل خاص على المبرهنة 2.2. ولتعزيز الفهم وإمكانية تطبيق هذه النتائج، نقدم أمثلة مختلفة توضح التطبيقات العملية لنتائجنا. علاوة على ذلك، سنبين كيف تمدد نتائجنا المبرهنات التي نوقشت في الفصل 1، كما هو موضح في المثالين 2.2 و2.2، والملاحظة 2.2. أما في القسم ??، فسنتناول بعض التطبيقات لهذه النتائج.

2.2 مبرهنات النقطة الثابتة المشتركة

لندأ أولاً بإثبات التوطئة التالية:

توطئـــة 1.2

ليكن $T,S:E\to E$ تطبيقين، بحيث توجد أعداد حقيقية موجبة a,b,c,d,e تحقق من أجل كل $u,v\in E$:

$$D(Tu,Sv)\le aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Sv)+dD(u,Sv)+eD(v,Tu); \tag{2.1}$$

مع الشروط $c+sd<1$ و$b+se<1$. عندئذٍ من أجل كل $u\in E$ تتحقق المتباينات التالية:

$$D(Tu,STu)\le \lambda_1 D(u,Tu); \tag{2.2}$$

$$D(TSu,Su)\le \lambda_2 D(u,Su). \tag{2.3}$$

حيث:

$$\lambda_1=\frac{a+b+sd}{1-c-sd};\quad \lambda_2=\frac{a+c+se}{1-b-se}.$$

برهان. بتعويض $v=Tu$ في المتباينة (2.1)، نحصل على

$$D(Tu,STu)\le aD(u,Tu)+bD(u,Tu)+cD(Tu,STu)+dD(u,STu)+eD(Tu,Tu);$$

وبما أن $D(Tu,Tu)=0$ و $D(u,STu)\le sD(u,Tu)+sD(Tu,STu)$، فإننا نجد:

$$(1-c-sd)D(Tu,STu)\le (a+b+sd)D(u,Tu).$$

وهذا يكافئ المتباينة (2.2). لإثبات المتباينة (2.3)، نضع $v = u$ ونستبدل u بـ Su. □

الآن نمر إلى أول نتيجة في هذا الفصل، والتي ستكون الأساس لكل النتائج الأخرى اللاحقة.

مبرهنـة 1.2

ليكن (E,D) فضاء b-متريًا تامًا، و$T,S:E\to E$ تطبيقين. نفرض وجود أعداد حقيقية موجبة a,b,c,d,e تحقق الشرط:

$$a+b+c+2s\max\{d,e\}<1; \qquad R$$

حيث المتباينة (2.1) محققة من أجل كل $u,v\in E$. علاوة على ذلك، إذا تحقق أحد الشرطين: $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$.

ملاحظة 1.2.2

من الجدير بالذكر أن الشرط (R) يستلزم حتما $\lambda_1\lambda_2<1$.

برهان. ليكن $u_0\in E$ ونعرّف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_{2n+1}=Tu_{2n}$ و$u_{2n}=Su_{2n-1}$. نميز حالتين كالتالي:

الحالة 1: إذا كان $n=2k$، باستخدام العلاقة (2.2) مع $u=u_{2k}$ نحصل على

$$D\left(Tu_{2k},STu_{2k}\right)\le\lambda_1 D\left(u_{2k},Tu_{2k}\right);$$

وبالتالي، نستنتج

$$D\left(u_{n+1},u_{n+2}\right)\le\lambda_1 D\left(u_n,u_{n+1}\right).$$

الحالة 2: إذا كان $n=2k+1$، باستخدام العلاقة (2.3) مع $u=u_{2k+1}$ نحصل على

$$D\left(Su_{2k+1},STu_{2k+1}\right)\le\lambda_2 D\left(u_{2k+1},Su_{2k+1}\right);$$

وبالتالي

$$D\left(u_{n+1},u_{n+2}\right)\le\lambda_2 D\left(u_n,u_{n+1}\right).$$

وبالتالي، نستنتج أنه لكل $n\in\mathbb{N}$ لدينا

$$D\left(u_{n+1},u_{n+2}\right)\le\lambda_1\lambda_2 D\left(u_{n-1},u_n\right);$$

وهذا يعطينا بالتراجع المتباينة التالية:

$$D\left(u_{n+1},u_{n+2}\right)\le\left[\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right]^n\left[\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right]^{-1}D\left(u_0,u_1\right)=R\lambda^n;$$

حيث $\lambda = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ و $R = \left[\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right]^{-1} D(u_0, u_1)$.

بناءً على التوطئة 1.1، نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عنصر $u^* \in E$.

والآن سوف نبرهن أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S)$.

- نفرض أن $sb + s^2e < 1$. باستخدام العلاقة (2.1) مع $u = u^*$ و $v = u_{2n-1}$ نحصل على

$$\begin{aligned} D(u^*, Tu^*) &\le sD(u^*, Su_{2n-1}) + sD(Su_{2n-1}, Tu^*) \\ &\le sD(u^*, u_{2n}) + saD(u^*, u_{2n-1}) + sbD(u^*, Tu^*) + scD(u_{2n-1}, Su_{2n-1}) \\ &\quad + sdD(u^*, Su_{2n-1}) + seD(u_{2n-1}, Tu^*) \\ &\le sD(u^*, u_{2n}) + saD(u^*, u_{2n-1}) + sbD(u^*, Tu^*) + scD(u_{2n-1}, u_{2n}) \\ &\quad + sdD(u^*, u_{2n}) + s^2eD(u_{2n-1}, u^*) + s^2eD(u^*, Tu^*). \end{aligned}$$

عندما $n \to \infty$، نجد:

$$D(u^*, Tu^*) \le sbD(u^*, Tu^*) + s^2eD(u^*, Tu^*).$$

وبالتالي، $(1 - sb - s^2e)\, D(u^*, Tu^*) \le 0$، وبما أن $1 - sb - s^2e > 0$ نستنتج $D(u^*, Tu^*) = 0$ أي $u^* = Tu^*$. لإثبات $u^* = Su^*$ لدينا:

$$\begin{aligned} D(u^*, Su^*) &= D(Tu^*, Su^*) \\ &\le aD(u^*, u^*) + bD(u^*, Tu^*) + cD(u^*, Su^*) + dD(u^*, Su^*) + eD(u^*, Tu^*) \\ &= cD(u^*, Su^*) + dD(u^*, Su^*); \end{aligned}$$

وهذا يتحقق فقط لما $u^* = Su^*$.

- نفرض أن $sc + s^2d < 1$. باستخدام العلاقة (2.1) مع $v = u^*$ و $u = u_{2n}$ نحصل على نفس النتائج.

لإثبات وحدانية هذه النقطة الثابتة، لنفرض أن هناك عنصراً $v^* \in E$ يحقق $v^* = Tv^*$. عندئذ، لدينا

$$\begin{aligned} D(v^*, u^*) &= D(Tv^*, Su^*) \\ &\le aD(v^*, u^*) + bD(v^*, Tv^*) + cD(u^*, Su^*) + dD(v^*, Su^*) + eD(u^*, Tv^*) \\ &\le aD(u^*, v^*) + dD(u^*, v^*) + eD(u^*, v^*). \end{aligned}$$

المتباينة الأخيرة تعطينا:

$$(1 - a - d - e)\, D(v^*, u^*) \le 0$$

مما يعني أن $D(u^*,v^*)=0$، أي أن $u^*=v^*$. وبنفس الطريقة، يمكن إثبات أن $\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$. وهذا ينهي البرهان.

□

ملاحظة 2.2.2

1. في هذه المبرهنة: لا يُشترط استمرارية التطبيقات T وS، ولا استمرارية التطبيق D.
2. إذا كان أحد التطبيقين T أو S مستمرًا، فيمكن إسقاط الشرط $(sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1)$.
3. إذا كان D مستمرًا و $s>1$، يمكن تخفيف الشرط إلى $(sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1)$.
4. إذا كان $T=S$ نحصل على مبرهنة نقطة ثابتة، لكنها بشروط أقوى من المبرهنة التي تحصلنا عليها في ورقتنا البحثية [23] والتي نقدمها في الفصل الموالي (انظر المبرهنة **2.3**).

مبرهنة 2.2

ليكن (E,D) فضاء متريا-b تاما. لنعتبر عائلة غير خالية $\{T_i\}_{i\in I}$ من التطبيقات على E بحيث: لكل $i,j\in I$ توجد أعداد موجبة $a_{i,j},b_{i,j},c_{i,j},d_{i,j}$ و $e_{i,j}$ تحقق الشروط التالية:

1. لكل $i,j\in I$ يتحقق (R).
2. من أجل كل $u,v\in E$:

$$D\left(T_iu,T_jv\right)\le a_{i,j}D(u,v)+b_{i,j}D\left(u,T_iu\right)+c_{i,j}D\left(v,T_jv\right)+d_{i,j}D\left(u,T_jv\right)+e_{i,j}D\left(v,T_iu\right). \quad (2.4)$$

إذا وُجد $i,j\in I$، بحيث يتحقق أحد الشرطين $sc_{i,j}+s^2d_{i,j}<1$ أو $sb_{i,j}+s^2e_{i,j}<1$ فإن: $\cap_{i\in I}\mathrm{Fix}(T_i)=\{u^*\}$.

برهان. لتلخيص البرهان، نفرض أولا أن المجموعة I وحيدة العنصر، أي $\{T_i\}_{i\in I}=\{T\}$. بوضع $S=T$ في (2.4) نستنتج أن الشرط (2.1) يتحقق، مما يسمح باستخدام المبرهنة **2.2** لتأكيد وجود نقطة ثابتة للتطبيق T: $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$.

الآن، نفرض وجود $i_0, j_0 \in I$ حيث:

$$sb_{i_0,j_0} + s^2 e_{i_0,j_0} < 1.$$

من المبرهنة 2.2، نستنتج أن $\mathrm{Fix}(T_{i_0}) \cap \mathrm{Fix}(T_{j_0}) \neq \emptyset$.
لنفرض أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_{i_0}) \cap \mathrm{Fix}(T_{j_0})$، ونبرهن أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_i)$ لكل $i \in I$.
بما أن $\lambda_{i,j}\lambda'_{i,j} < 1$، فإن $\min\{\lambda_{i,j}, \lambda'_{i,j}\} < 1$.
نفرض أن $\lambda'_{i,j} < 1$. في (2.4)، نضع $j = j_0$ و $u = v = u^*$ لنحصل على:

$$D\left(T_i u^*, T_{j_0} u^*\right) \leq a_{i,j_0} D(u^*, u^*) + b_{i,j_0} D(u^*, T_i u^*) + c_{i,j_0} D\left(u^*, T_{j_0} u^*\right) + d_{i,j_0} D\left(u^*, T_{j_0} u^*\right) + e_{i,j_0} D(u^*, T_i u^*).$$

لدينا $D\left(u^*, T_{j_0} u^*\right) = 0$ لأن $T_{j_0} u^* = u^*$، وعليه نحصل على:

$$D(T_i u^*, u^*) \leq b_{i,j_0} D(u^*, T_i u^*) + e_{i,j_0} D(u^*, T_i u^*).$$

هذا يعني:

$$\left(1 - b_{i,j_0} - e_{i,j_0}\right) D(T_i u^*, u^*) \leq 0,$$

وهذا يتحقق فقط في حالة $T_i u^* = u^*$.
إذا تحقق $\lambda_{i,j} < 1$، نأخذ $i = i_0$، $j = i$ و $u = v = u^*$، فنحصل على:

$$\left(1 - c_{i_0,i} - d_{i_0,i}\right) D(T_i u^*, u^*) \leq 0,$$

مما يعني أن $T_i u^* = u^*$.
إذن، في كلتا الحالتين نستنتج أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_i)$ لكل $i \in I$، وهو المطلوب.
من المبرهنة 2.2، نستنتج أن $\mathrm{Fix}\left(T_{j_1}\right) \cap \mathrm{Fix}(T_i) = \{u^*\}$ من أجل كل $i \in I$، مما يعني أن:

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Fix}(T_i) = \{u^*\}.$$

وبهذا يكتمل البرهان. □

مثـــال 1.2

في هذا المثال، نأخذ المجال $E = [0,1]$ مع b-مسافة المعرفة بـ: $D_p(u,v) = |u-v|^p$ حيث $p \geq 1$ و $s = 2^{p-1}$. نعرّف عائلة من التطبيقات $\mathscr{F} = \{T_t : E \longrightarrow E \mid t \in [0,1)\}$، حيث

$T_t u = \sin(tu)$ لكل $u \in E$. لدراسة أي تطبيقين T_t و$T_r \in \mathcal{F}$، نفرض دون فقدان العمومية أن $0 < r < t < 1$. لجميع $u, v \in E$، وباستخدام مبرهنة القيم المتوسطة، نجد:

$$D_p(T_t u, T_r v) = |\sin(tu) - \sin(rv)|^p \leq |tu - rv|^p.$$

من هنا، نميز أربع حالات مختلفة لدراسة خصائص التقليص للتطبيقين T_t وT_r.

- عندما $u \geq v$:

$$D_p(T_t u, T_r v) \leq |tu - rv|^p = t^p |u - \frac{r}{t} v|^p \leq t^p |u - rv|^p$$
$$\leq t^p |u - \sin(rv)|^p = t^p D_p(u, T_r v).$$

- عندما $u < rv$:

$$D_p(T_t u, T_r v) \leq |tu - rv|^p = r^p |\frac{t}{r} u - v|^p \leq r^p |tu - v|^p$$
$$\leq r^p |\sin(tu) - v|^p = r^p D_p(T_t u, v) \leq t^p D_p(T_t u, v).$$

- عندما $rv \leq u < v$ و$tu \leq rv$:

$$D_p(T_t u, T_r v) \leq t^p D_p(T_t u, v).$$

- عندما $tv \leq u < v$ و$tu > rv$:

$$D_p(T_t u, T_r v) \leq |tu - rv|^p = t^p |u - \frac{r}{t} v|^p \leq t^p |u - v|^p = t^p D_p(u, v).$$

وباختصار، لدينا:

$$D_p(T_t u, T_r v) \leq t^p \left[D_p(u, v) + D_p(T_t u, v) + D_p(u, T_r v) \right].$$

وعليه فإن التطبيقات T_t وT_r تحقق شرط التقليص (2.4) بثوابت $a = d = e = \mu^p$ و$b = c = 0$. من أجل $t < \frac{1}{\sqrt[p]{1+2^p}}$، يتحقق الشرط $a + b + c + 2s\min\{d, e\} < 1$. بحساب:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a + b + sd}{1 - c - sd} = \frac{t^p}{1 - 2^{p-1} t^p} < 1$$

نلاحظ أن الشروط $sb + s^2 e < 1$ و$sc + s^2 d < 1$ ليست ضرورية بسبب استمرارية T_t لكل $t \in [0, 1)$. بتطبيق المبرهنة 2.2 أو 2.2، نحصل على:

$$\bigcap_{0 \leq t < \frac{1}{\sqrt[p]{1+2^p}}} \mathrm{Fix}(T_t) = \{u^*\}.$$

على النقيض، نتائج بعض المبرهنات المذكورة في الفصل الأول تتحقق تحت شروط أكثر تقييدًا لـ t. المبرهنة 3.1 تعطينا:

$$\bigcap_{0\leq t<\frac{1}{2^{2-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{1+2^p}}} \mathrm{Fix}(T_t)=\{u^*\}.$$

وبالمثل، المبرهنة 3.1 تقول:

$$\bigcap_{0\leq t<\frac{1}{\sqrt[p]{2^{2p-2}+2^p}}} \mathrm{Fix}(T_t)=\{u^*\}$$

حيث الشرط $pq=\left(\frac{t^p+st^p}{1-st^p}\right)^2<\frac{1}{s^2}$ يتحقق فقط عندما $t<\frac{1}{\sqrt[p]{2^{2p-2}+2^p}}$. علاوة على ذلك، لا يمكن تطبيق المبرهنة 3.1 لأن الشرط (1.57) غير محقق.

يمكن أيضًا ملاحظة أن الشرط $s^2c+s^2d+(s^3+s^4)(a+e)<1$ يتحقق فقط لـ $t<\frac{1}{\sqrt[p]{1+2^p}}<\frac{1}{2^{2-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{1+2^p+2^{2p-1}}}$. وبالتالي، المبرهنات 3.1، 3.1، 3.1 تطبق على نطاق أكثر تقييدًا للمتغير t مقارنة بالمبرهنتين 2.2 و2.2.

على سبيل المثال، عندما $p=2$: - المبرهنة 3.1 تُطبق لـ $t\in\left[0,\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$. - المبرهنة 3.1 تُطبق لـ $t\in\left[0,\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)$. - المبرهنة 3.1 تُطبق فقط لـ $t\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$. - بينما المبرهنتين 2.2 أو 2.2 تُطبقان على نطاق أوسع: $t\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

أخيرًا، نلاحظ أن النقطة الثابتة المشتركة هي $u^\star=0$.

ملاحظة 3.2.2

لاحظ أن الدالة $f(n)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+2^n}}$ (حيث $n\geq 1$) هي دالة متزايدة، وأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+2^n}}=\frac{1}{2}$. لذلك يمكننا تمديد وجود النقطة الثابتة المشتركة من المبرهنة 2.2 أو المبرهنة 2.2 إلى العائلة الجزئية:

$$\mathscr{G}=\left\{T_t \mid t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

بينما، وفقًا للمبرهنة 3.1 والمبرهنة 3.1، يمكننا فقط تمديدها، على التوالي، إلى العائلتين

الجزئيتين:

$$\left\{T_t \mid t \in \left[0, \frac{1}{3}\right)\right\} \quad \text{و} \quad \left\{T_t \mid t \in \left[0, \frac{1}{5}\right)\right\}$$

لأن الدالتين $g(n) = \dfrac{1}{2^{2-\frac{2}{n}} \sqrt[n]{1+2^n}}$ و $h(n) = \dfrac{1}{2^{2-\frac{2}{n}} \sqrt[n]{1+2^n+2^{2n-1}}}$ هما دالتان متناقصتان، حيث $g(1) = \dfrac{1}{3}$ و $h(1) = \dfrac{1}{5}$.

ملاحظة 4.2.2

في هذا المثال، استخدام فضاء b-متري بقيم أكبر للثابت s يكون أكثر فائدة مقارنةً بالقيم الأصغر. يعود ذلك إلى أن القيم الأكبر لـ s تتيح نطاقًا أوسع من القيم الممكنة للمعامل t. على وجه الخصوص، يُفضل العمل في فضاءات b-مترية حيث يأخذ s قيمًا كبيرة جدًا مقارنةً بفضاء متري تقليدي (حيث $s = 1$).

إذا كان المجموعة I قابلة للعد، نحصل على مبرهنات مختلفة، نبدأ بالمبرهنة التالية.

مبرهنة 3.2

ليكن (E, D) فضاء b-متريًا تاما، ولنفرض وجود متتالية من التطبيقات $T_n : E \to E$ بحيث أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد أعداد موجبة a_n, b_n, c_n, d_n, e_n تحقق الشروط التالية:

1. لكل $n \in \mathbb{N}$، يتحقق $a_n + b_n + c_n + 2s\max\{d_n, e_n\} < 1$.
2. لكل $u, v \in E$:

$$D(T_n u, T_{n+1} v) \le a_n D(u, v) + b_n D(u, T_n u) + c_n D(v, T_{n+1} v) + d_n D(u, T_{n+1} v) + e_n D(v, T_n u). \quad (2.5)$$

إذا كان لكل $n \in \mathbb{N}$ يتحقق أحد الشرطين: $sb_n + s^2 e_n < 1$ أو $sc_n + s^2 d_n < 1$، فإن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fix}(T_n) = \{u^*\}$.

برهان. في المتباينة (2.5)، عند اختيار $n = 1$ نستنتج أن $\mathrm{Fix}(T_1) \cap \mathrm{Fix}(T_2) \neq \emptyset$. لنفرض أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_1) \cap \mathrm{Fix}(T_2)$، سنثبت باستخدام التراجع أن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

بالنسبة لـ $n = 1$ فإن النتيجة واضحة مما سبق. لنفرض أن $n \in \mathbb{N}$ وأن $u^* \in \mathrm{Fix}(T_n)$. بأخذ

$u^* = v = u^*$ في المعادلة (2.5) نحصل على:

$$D(T_n u^*, T_{n+1} u^*) \leq a_n D(u^*, u^*) + b_n D(u^*, T_n u^*) + c_n D(u^*, T_{n+1} u^*) + d_n D(u^*, T_{n+1} u^*) + e_n D(u^*, T_n u^*).$$

باعتبار أن $T_n u^* = u^*$، نحصل على:

$$D(u^*, T_{n+1} u^*) \leq c_n D(u^*, T_{n+1} u^*) + d_n D(u^*, T_{n+1} u^*).$$

وعليه:

$$(1 - c_n - d_n) D(u^*, T_{n+1} u^*) \leq 0.$$

نظرًا لأن $1 - c_n - d_n > 0$، فإن $D(u^*, T_{n+1} u^*) = 0$، وبالتالي $u^* = T_{n+1} u^*$. وبذلك، $u^* \in \mathrm{Fix}(T_{n+1})$. وعليه نستنتج أن $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(T_n) \neq \emptyset$.

بما أن $a_n + d_n + e_n < 1$، فإن $\mathrm{Fix}(T_1) \cap \mathrm{Fix}(T_2) = \{u^*\}$، مما يعني أن $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(T_n) = \{u^*\}$. □

مبرهنة 4.2

ليكن (E, D) فضاء b-متريًا تاما، ولنفترض وجود متتالية من التطبيقات $T_n : E \to E$، بحيث أنه لكل $n, m \in \mathbb{N}$ توجد أعداد حقيقية موجبة $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ و $e_{n,m}$ تحقق الشروط التالية:

1. لكل $n, m \in \mathbb{N}$ يتحقق الشرط (R)
2. لكل $u, v \in E$:

$$D(T_n u, T_m v) \leq a_{n,m} D(u, v) + b_{n,m} D(u, T_n u) + c_{n,m} D(v, T_m v) + d_{n,m} D(u, T_m v) + e_{n,m} D(v, T_n u). \quad (2.6)$$

إذا وُجد $m, n \in \mathbb{N}$ بحيث يتحقق أحد الشرطين $(sb_{n,m} + s^2 e_{n,m} < 1$ أو $sc_{n,m} + s^2 d_{n,m} < 1)$، فإن: $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(T_n) = \{u^*\}$.

مبرهنة 5.2

ليكن (E, D) فضاء b-متريًا تاما، ولنفرض وجود متتالية من التطبيقات $T_n : E \to E$ بحيث يتحقق:

$$D(T_n u, T_m v) \leq a D(u, v) + b D(u, T_n u) + c D(v, T_m v) + d D(u, T_m v) + e D(v, T_n u);$$

حيث:

1. الشرط (R) محقق.
2. أحد الشرطين $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$ محقق.

فإن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Fix}(T_n)=\{u^*\}$.

مثـــال 2.2

لنأخذ $E=[0,1]$ و $D(u,v)=|u-v|^p$ حيث $p\geq 1$، فإن (E,D) هو فضاء b-متري تام بثابت $s=2^{p-1}\geq 1$. لكل عدد طبيعي n نعرّف T_n كالتالي:

$$T_n(u)=\frac{1}{n+1}u+\frac{n}{2n+2}.$$

من أجل كل عدد طبيعي n وكل $u,v\in E$، نحصل على:

$$\begin{aligned}
D(T_nu,T_{n+1}v)&=|\frac{1}{n+1}u+\frac{n}{2n+2}-\frac{1}{n+2}v-\frac{n+1}{2n+4}|^p\\
&=|\frac{1}{n+1}u-\frac{1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}|^p\\
&=\frac{1}{(n+1)^p}|u-\frac{n+1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+2)}|^p\\
&=\frac{1}{(n+1)^p}|u-v+\frac{1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+2)}|^p\\
&\leq\frac{2^{p-1}}{(n+1)^p}|u-v|^p+\frac{2^{p-1}}{(n+1)^p}|\frac{1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+2)}|^p.
\end{aligned}$$

من ناحية أخرى:

$$\begin{aligned}
D(v,T_{n+1}v)&=|v-\frac{1}{n+2}v-\frac{n+1}{2n+4}|^p\\
&=|\frac{n+1}{n+2}v-\frac{n+1}{2n+4}|^p\\
&=(n+1)^p|\frac{1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+2)}|^p.
\end{aligned}$$

وبذلك يكون:

$$|\frac{1}{n+2}v-\frac{1}{2(n+2)}|^p=\frac{1}{(n+1)^p}D(v,T_{n+1}v).$$

أخيرًا، نجد:

$$D(T_n u, T_{n+1} v) \leq \frac{2^{p-1}}{(n+1)^p} D(u,v) + \frac{2^{p-1}}{(n+1)^p} \frac{1}{(n+1)^p} D(v, T_{n+1} v)$$
$$= \frac{2^{p-1}}{(n+1)^p} D(u,v) + \frac{2^{p-1}}{(n+1)^{2p}} D(v, T_{n+1} v).$$

وهذا يوضح أن المتباينة (2.5) محققة بالمعاملات: $a_n = \frac{2^{p-1}}{(n+1)^p}$، $c_n = \frac{2^{p-1}}{(n+1)^{2p}}$ و $b_n = d_n = e_n = 0$. بالإضافة إلى ذلك:

$$a_n + b_n + c_n + 2s\max\{d_n, e_n\} = \frac{2^{p-1}}{(n+1)^p} + \frac{2^{p-1}}{(n+1)^{2p}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{n+1}\right)^p + \left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)^p\right] < 1,$$

$$sb_n + s^2 e_n = 0 < 1.$$

بما أن جميع الشروط في المبرهنة 2.2 مستوفاة، فإنه توجد نقطة وحيدة $u^* \in [0,1]$ تحقق: $T_n u^* = u^*$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا من جهة أخرى: $s^2a + s^2b + s^2c + s^3d + s^3e = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{8}{n+1}\right)^p + \left(\frac{8}{(n+1)^2}\right)^p\right] < 1$، نجد أنه لا يتحقق بشكل عام. على سبيل المثال، لما $p = 3$، تفشل هذه المتباينة بالنسبة لـ $n \leq 3$، ولذلك فإن المبرهنة 3.1 تطبق فقط لما $n \geq 4$ ولا يمكن ضمان وجود نقطة ثابتة مشتركة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

علاوة على ذلك، فإن شرط التقليص-F من الصعب التحقق منه، مما يعقّد تطبيق المبرهنة 3.1. كما أن النتيجة 3.1 غير قابلة للتطبيق لأن الشرط (1.57) غير مستوفى، وبالمثل، فإن $s^2c + s^2d + (s^3 + s^4)(a + e) < 1$ يتحقق فقط لـ $n \geq 6$. وأخيرًا، فإن المبرهنة (1.59) يصعب أيضًا التحقق منها. نشير هنا إلى أن $u^* = \frac{1}{2}$.

من خلال اختيار قيم مناسبة للمعاملات a, b, c, d, e، يمكننا الحصول على بعض النتائج الفرعية من المبرهنة 2.2. باستخدام شرط التقليص لكان يمكننا الحصول على النتيجة التالية.

نتيجة 1.2

ليكن (E, D) فضاء b-متريا تاما و $T, S : E \to E$ بحيث يوجد أعداد حقيقية موجبة b, c تحقق:

$$D(Tu, Sv) \leq bD(u, Tu) + cD(v, Sv) \qquad (2.7)$$

مع $b + c < 1$. إذا كان أيضًا $\min\{b, c\} < \frac{1}{s}$، فإن $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) = \{u^*\}$.

من خلال أخذ $a=b=c=0$، نحصل على ما يلي.

نتيـجة 2.2

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$ و $T,S:E\to E$ تطبيقان بحيث يوجد أعداد حقيقية موجبة d,e تحقق الشروط التالية:

1. $\max\{d,e\}<\frac{1}{2s}$، $\min\{d,e\}<\frac{1}{s^2}$.
2. لكل $u,v\in E$

$$D(Tu,Sv)\leq dD(u,Sv)+e\sigma(v,Tu) \qquad (2.8)$$

إذن: $\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$.

من خلال وضع $d=e=0$، نجد النتيجة التالية.

نتيـجة 3.2

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما و $T,S:E\to E$ بحيث يوجد أعداد حقيقية موجبة a,b,c تحقق لكل $u,v\in E$:

$$D(Tu,Sv)\leq aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Sv) \qquad (2.9)$$

مع $a+b+c<1$. إذا كان أيضًا $\min\{b,c\}<\frac{1}{s}$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$.

مثـــال 3.2

لنأخذ $E=[0,1]$ و $D(u,v)=|u-v|^2$. الزوج (E,D) هو فضاء b-متري تام بثابت $s=2$. نعرف $T,S:E\to E$ بـ:

$$Tu=\begin{cases}\frac{1}{4}u, & \text{إذا كان } u\neq 1,\\ \frac{1}{5}, & \text{إذا كان } u=1.\end{cases} \quad \text{و} \quad Sv=\begin{cases}\frac{1}{5}v, & \text{إذا كان } v\neq 1,\\ \frac{1}{4}, & \text{إذا كان } v=1.\end{cases}$$

نعتبر $u,v\in E$. لدينا عدة حالات.

الحالة 1. إذا كان $u,v\in[0,1)$، فإن

$$D(Tu,Sv)=|\frac{1}{4}u-\frac{1}{5}v|^2\leq 2|\frac{1}{4}u|^2+2|\frac{1}{5}v|^2=\frac{1}{8}|u|^2+\frac{2}{25}|v|^2.$$

من ناحية أخرى، لدينا

$$D(u,Tu)=|u-\frac{1}{4}u|^2=\frac{9}{16}|u|^2 \text{ و } D(v,Sv)=|v-\frac{1}{5}v|^2=\frac{16}{25}|v|^2.$$

لذا نستنتج أن

$$D(Tu,Sv)\leq\frac{2}{9}D(u,Tu)+\frac{1}{8}D(v,Sv). \qquad (2.10)$$

الحالة 2. إذا كان $u\in[0,1)$ و $v=1$، فإننا نحصل على: $D(Tu,Sv)=|\frac{1}{4}u-\frac{1}{4}|^2=\frac{1}{16}|u-1|^2$، $D(u,Tu)=\frac{9}{16}u^2$ و $D(v,Sv)=|1-\frac{1}{4}|^2=\frac{9}{16}$. لذلك، نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}D(u,Tu)+\frac{1}{8}D(v,Sv)-D(Tu,Sv)&=\frac{1}{8}\left[x^2+\frac{9}{16}-\frac{1}{2}(u-1)^2\right]\\&=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}u^2+u+\frac{1}{16}\right]\geq 0.\end{aligned}$$

يترتب على ذلك أن المتباينة (2.10) محققة.

الحالة 3. إذا كان $v\in[0,1)$ و $u=1$، فإن $D(Tu,Sv)=|\frac{1}{5}-\frac{1}{5}v|^2=\frac{1}{25}(v-1)^2$، $D(u,Tu)=|1-\frac{1}{5}|^2=\frac{16}{25}$ و $D(v,Sv)=\frac{16}{25}v^2$. لذلك، نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}D(u,Tu)+\frac{1}{8}D(v,Sv)-D(Tu,Sv)&=\frac{2}{9}\times\frac{16}{25}+\frac{1}{8}\times\frac{16}{25}v^2-\frac{1}{25}(v-1)^2\\&=\frac{1}{25}\left[\frac{32}{9}+2v^2-(v-1)^2\right]\\&=\frac{1}{25}\left[v^2+2v+\frac{23}{9}\right]\geq 0.\end{aligned}$$

إذن، المتباينة (2.10) محققة أيضًا في هذه الحالة.

الحالة 4. إذا كان $v=1$ و $u=1$، فإن لدينا: $D(Tu,Sv)=|\frac{1}{4}-\frac{1}{5}|^2=\frac{1}{400}$، $D(u,Tu)=|1-\frac{1}{5}|^2=\frac{16}{25}$ و $D(v,Sv)=|1-\frac{1}{4}|^2=\frac{9}{16}$. هذا يعطينا:

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}D(u,Tu)+\frac{1}{8}D(v,Sv)-D(Tu,Sv)&=\frac{2}{9}\times\frac{16}{25}+\frac{1}{8}\times\frac{9}{16}-\frac{1}{400}\\&=\frac{32}{225}+\frac{9}{108}-\frac{1}{400}\geq 0.\end{aligned}$$

إذن، المتباينة (2.10) محققة في كل الحالات، وهذا يعني أن الشرط (2.1) محقق بالمعاملات $a=d=e=0$؛ $b=\frac{2}{9}$ و $c=\frac{1}{8}$.

بالإضافة إلى ذلك، نجد أن $\min\{b,c\}=2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}<1$. هذا يعني أن جميع شروط النتيجة2.2 والمبرهنة 2.2 محققة، مما يؤدي إلى $\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$.

لاحظ أن كلا من T و S غير مستمرين، مما يمنع تطبيق المبرهنة **3.1**. وبغض النظر عن شرط الاستمرارية، لا يمكن تطبيق المبرهنة **3.1**، لأن:

$$s^2a+s^2b+s^2c+s^3d+s^3e=4\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{8}=\frac{25}{18}\geq 1.$$

مثـــال 4.2

لنأخذ $E=[0,1]$، و $D(u,v)=(u-v)^2$ لكل $u,v\in[0,1]$. الزوج (E,D) هو فضاء b-متري تام بثابت $s=2$. ليكن $T,S:E\to E$ معرفة بـ:

$$Tu=\begin{cases}\frac{u}{2}, & u\neq 1\\ 0, & u=1.\end{cases} \quad \text{و} \quad Sv=\begin{cases}\frac{v}{2}, & v\neq 1\\ \frac{1}{4}, & v=1.\end{cases}$$

لكل $u,v\in E$، لدينا:

الحالة 1. إذا كان $u,v\in[0,1)$، نحصل على

$$D(Tu,Sv)=\frac{1}{4}(u-v)^2=\frac{1}{4}\left[u^2+v^2-2uv\right];$$
$$D(u,Sv)=\left(u-\frac{1}{2}v\right)^2=u^2+\frac{1}{4}v^2-uv;$$
$$D(v,Tu)=\left(v-\frac{1}{2}u\right)^2=v^2+\frac{1}{4}u^2-uv.$$

إذن، نحصل على:

$$\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)]-D(Tu,Sv)=\frac{2}{9}\left[\frac{5}{4}v^2+\frac{5}{4}u^2-2uv\right]-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{4}v^2+\frac{1}{2}uv$$
$$=\frac{1}{36}v^2+\frac{1}{18}uv+\frac{1}{36}u^2\geq 0.$$

الحالة 2. إذا كان $u\in[0,1)$ و $v=1$، نحصل على $D(Tu,Sv)=|\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}|^2$، $D(u,Sv)=|u-\frac{1}{4}|^2$ و $D(v,Tu)=\left(1-\frac{1}{2}u\right)^2=1+\frac{1}{4}u^2-u$. إذن نحصل على:

$$\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)]-D(Tu,Sv)=\frac{2}{9}\left[|u-\frac{1}{4}|^2+1+\frac{1}{4}u^2-u\right]-|\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}|^2$$
$$=\frac{2}{9}\left[\frac{5}{4}u^2-\frac{3}{2}u+\frac{17}{16}\right]-\frac{1}{16}\left[4u^2-4u+1\right]$$
$$=\frac{1}{36}u^2-\frac{1}{12}u+\frac{25}{144}=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}u^2-u+\frac{25}{12}\right]\geq 0.$$

إذن نستنتج

$$\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)]-D(Tu,Sv)\geq 0.$$

الحالة 3. إذا كان $v\in[0,1)$ و $u=1$، فنحصل على $D(Tu,Sv)=\frac{1}{4}v^2$؛ $D(v,Tu)=v^2$ و $D(u,Sv)=|1-\frac{1}{2}v|^2=\frac{1}{4}v^2-v+1$. بنفس الطريقة، نحصل على:

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)]-D(Tu,Sv)&=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{4}v^2-v+1+v^2\right]-\frac{1}{4}v^2\\&=\frac{1}{36}v^2-\frac{2}{9}v+\frac{2}{9}\geq 0.\end{aligned}$$

الحالة 4. إذا كان $u=1$ و $v=1$، فنحصل على $D(Tu,Sv)=\frac{1}{16}$؛ $D(u,Sv)=|1-\frac{1}{4}|^2=\frac{9}{16}$ و $D(v,Tu)=1$. إذن:

$$\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)]-D(Tu,Sv)=\frac{2}{9}\left[\frac{9}{16}+1\right]-\frac{1}{16}\geq 0.$$

أخيرًا، من أجل كل $u,v\in E$:

$$D(Tu,Sv)\leq\frac{2}{9}[D(u,Sv)+D(v,Tu)].$$

بما أن $s=2$، فإن $\frac{1}{4}=\frac{1}{s^2}=\frac{1}{2s}$. وعليه نجد: $d=\frac{2}{9}<\frac{1}{4}=\min\left\{\frac{1}{2s},\frac{1}{s^2}\right\}$. وفقًا للمبرهنة 2.2، يمكننا التأكيد أن $\mathrm{Fix}(T)\cap\mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}$.

من جهة أخرى، لا يمكن تطبيق المبرهنة 3.1 بسبب عدم استمرارية كلا من T و S. بالمثل، لا يمكن تطبيق المبرهنة 3.1 لأن الشرط $s^2a+s^2b+s^2c+s^3d+s^3e<1$ غير مستوفى، حيث أن

$$s^2a+s^2b+s^2c+s^3d+s^3e=2s^3d=8d=\frac{32}{9}>1.$$

وكذلك، لا يمكن تطبيق المبرهنة 3.1 لأن العديد من الشروط غير مستوفاة، مثل $b\neq 0$ و $pq<\frac{1}{s^2}$. في الواقع لدينا $b=0$ و $pq=\frac{16}{25}>\frac{1}{s^2}=\frac{1}{4}$. أيضًا، لا يمكن تطبيق المبرهنة 3.1 لأن:

$$s^2c+s^2d+(s^3+s^4)(a+e)=\frac{56}{9}>1.$$

ملاحظة 5.2.2

1. لنقارن بين الشروط:

$$s^2a+s^2b+s^2c+s^3d+s^3e<1 \quad \text{مع} \quad b=c \text{ أو } e=d; \tag{2.11}$$

$$a+b+c+2s\max\{d,e\}<1 \text{ مع } sb+s^2e<1 \text{ أو } sc+s^2d<1. \tag{2.12}$$

إذا كان $e=d$، فإن المعادلة (2.11) تؤول إلى (2.12). وهذا يوضح أن الشرط (2.12) في المبرهنة **2.2** أضعف من الشرط (2.11) في المبرهنة **3.1** التي تم تقديمها في الورقة [35].

2. في [35, النتيجة 5.2.] (انظر النتيجة **3.1**)، يفرض المؤلفون أن: $d=\alpha; e=\frac{\alpha}{s^3}$ مع الشرط الإضافي: $\alpha\in\left[0,\frac{1}{s(s+1)}\right)$ وأن T مستمر. على النقيض من ذلك، تتطلب النتيجة **2.2** الشرط: $\max\{d,e\}=\alpha<\min\left\{\frac{1}{2s},\frac{1}{s^2}\right\}$، وهو شرط أقل صرامة. الشرط (2.13) الذي يتم تحديده على النحو التالي $d\in\left[0,\frac{1}{s(s+1)}\right)$، بما أن $\min\left\{\frac{1}{2s},\frac{1}{s^2}\right\}\leq\frac{1}{s(s+1)}$. علاوة على ذلك، فإن الاستمرارية في النتيجة**2.2** ليست شرطًا ضروريا، بينما هي كذلك في النتيجة **3.1**. بالإضافة إلى ذلك، تكون متباينة التقليص:

$$D(Tu,Sv)\leq\alpha[D(u,Sv)+D(v,Tu)]; \tag{2.13}$$

أضعف من الشرط (1.57) في النتيجة **3.1**. وبالتالي، تبقى النتيجة **2.2** صالحة تحت الشرط (2.13)، بينما لا يمكن تطبيق النتيجة **3.1**، مما يبين التحسين الواضح للنتيجة **2.2** على النتيجة **3.1**.

3. لاحظ أن الشرط $a+b+c+2sd<1$ و $a+b+c+2se<1$ هو مكافئ للشرط $a+b+c+2s\max\{d,e\}<1$ المفترض في المبرهنة (2.1). ومع ذلك، في المبرهنة **3.1**، يفرض المؤلفون الشروط الإضافية $b\neq 0$ و $pq<\frac{1}{s^2}$، التي ليست مطلوبة في المبرهنة**2.2**. علاوة على ذلك، نلفت انتباه القارئ إلى أننا لا نحتاج إلى متباينة التقليص F-المفروضة في المبرهنة **3.1**. في الواقع، متباينة التقليص F-المفروضة في **3.1** تعني أنه بالنسبة لجميع $u,v\in E$:

$$F(D(Tu,Sv))<F(aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Sv)+dD(u,Sv)+eD(v,Tu));$$

نظرًا لأن F دالة متزايدة. وبالتالي، نجد أن

$$D(Tu,Sv) < aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Sv)+dD(u,Sv)+eD(v,Tu);$$

وهي ببساطة شرط التقليص (2.1). العكس بالطبع ليس صحيحًا دائما.

أخيرًا، نستنتج أن الشروط المفترضة في المبرهنة **2.2** أضعف من الشروط المفترضة في المبرهنة **3.1**.

4. من السهل ملاحظة أن الشروط $a+b+s^2c+s^2d+(s^3+s^4)(a+e)<1$، و $c+sd+se<1$ و $s^2b+s^2e+(s^3+s^4)(a+d)<1$ في المبرهنة **3.1** هي أقوى من الشروط $a+b+c+2s\max\{d,e\}<1$، و $sb+s^2d<1$ و $sc+s^2d<1$ المفترضة في المبرهنة **2.2** و **2.2**، بما أن $s\geq 1$. علاوة على ذلك، تُفترض شروط تكميلية أخرى في المبرهنة **3.1**، مما يظهر أن المبرهنتين **2.2** و **2.2** ونتائجهما تحسن بوضوح المبرهنة **3.1**.

أثبتنا للمرة الأولى، نتيجة وجود نقطة ثابتة مشتركة لتطبيقين T و S يحققان بشرط التقليص المعرف على النحو التالي:

$$D(Tu,Sv) \leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tu)+D(v,Sv)]+\gamma[D(u,Sv)+D(v,Tu)]. \quad \text{D}$$

حيث: $a+2\beta+2s\gamma=1$.

لإثبات هذه النتيجة، سنحتاج إلى توطئة مساعدة.

توطئـــة 2.2

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا بثابت $s\geq 1$. لنفرض وجود تطبيقيّن $T,S:E\to E$ يحققان الشرط D مع $a+2\beta+2s\gamma=1$. عندها، لجميع $u\in E$ يتحقق:

$$D(TSu,STSu)\leq (a+2\beta)D(u,Su)+\gamma D(Su,STSu); \qquad (2.14)$$

$$D(STu,TSTu)\leq (a+2\beta)D(u,Tu)+\gamma D(Tu,TSTu). \qquad (2.15)$$

برهان. بوضع $v=Tu$ في D، نحصل على:

$$D(Tu,STu)\leq aD(u,Tu)+\beta(D(u,Tu)+D(Tu,STu))+\gamma(D(u,STu)+D(Tu,Tu)).$$

بما أن $D(Tu,Tu)=0$ واستخدام B$_3$)، ينتج أن:

$$D(Tu,STu) \le aD(u,Tu)+\beta D(u,Tu)+\beta D(Tu,STu)+s\gamma D(u,Tu) + s\gamma D(Tu,STu).$$

وبالتالي نحصل على:

$$(1-\beta-s\gamma)D(Tu,STu) \le (a+\beta+s\gamma)D(u,Tu),$$

مما يؤدي إلى:

$$D(Tu,STu) \le \frac{a+\beta+s\gamma}{1-\beta-s\gamma}D(u,Tu)=D(x,Tx),$$

حيث أن $a+2\beta+2s\gamma=1$ يكافئ $\frac{a+\beta+s\gamma}{1-\beta-s\gamma}=1$. لاحظ أن $1-\beta-s\gamma\neq 0$. وبالتالي، نحصل على:

$$D(Tu,STu) \le D(u,Tu). \qquad (2.16)$$

بنفس الطريقة، نحصل على المتباينة التالية:

$$D(Su,TSu) \le D(u,Su). \qquad (2.17)$$

عن طريق استبدال u بـ Su، ووضع $v=TSu$ في D واستخدام (2.17)، نحصل على:

$$D(TSu,STSu) \le aD(Su,TSu)+\beta(D(Su,TSu)+D(TSu,STSu)) + \gamma(D(Su,STSu)+D(TSu,TSu)).$$

هذا يعني:

$$D(TSu,STSu) \le aD(u,Su)+\beta D(u,Su)+\beta D(u,Su)+\gamma D(Su,STSu),$$

مما يؤدي ببساطة إلى (2.14). وبالمثل، بعد استبدال u بـ STu، ووضع $v=Tu$ في D واستخدام (2.16)، نحصل على (2.15). □

مبرهنة 6.2

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما و $T,S:E\to E$ تطبيقين يحققان شرط التقليص D مع

$a+2\beta+2s\gamma=1$، و $\gamma\neq 0$، و $s\beta+s^2\gamma<1$. نفرض أيضًا أن الشرطين التاليين محققين:

$$D(Tu,TSTu)\leq kD(u,Tu), \quad \text{و} \quad D(Su,STSu)\leq kD(u,Su)$$

حيث $k<2s$. عندها، يكون:

$$\mathrm{Fix}(T)\cap \mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}.$$

برهان. لتكن $u_0\in E$، نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_{2n+1}=Tu_{2n}$ و $u_{2n}=Su_{2n-1}$ حيث $n\in\mathbb{N}$. من التوطئة 2.2، نحصل على:

$$\begin{aligned} D(TSu,STSu) &\leq (a+2\beta)D(u,Su)+\gamma D(Su,STSu)\\ &\leq (a+2\beta+k\gamma)D(u,Su)\\ &\leq \mu D(u,Su), \end{aligned}$$

حيث يمكن ملاحظة بسهولة أن $\mu=a+2\beta+k\gamma<a+2\beta+2s\gamma=1$. بنفس الطريقة، لدينا أيضًا:

$$D(STu,TSTu)\leq \mu D(u,Tu).$$

هذا يظهر أنه بالنسبة لكل $n\geq 2$:

$$D(u_n,u_{n+1})\leq \mu D(u_{n-1},u_{n-2}).$$

بالتالي، بالاستقراء، نحصل على:

$$\begin{aligned} D(u_n,u_{n+1}) &\leq \theta^{\frac{n-1}{2}}D(u_0,u_1)\\ &=\left(\sqrt{\mu}\right)^n\times\left(\sqrt{\mu}\right)^{-1}D(u_0,u_1)\\ &\Longrightarrow D(u_n,u_{n+1})\leq R\theta^n, \end{aligned}$$

حيث $\theta=\sqrt{\mu}=\sqrt{a+2\beta+k\gamma}<1$ و $R=\mu^{-1}D(u_0,u_1)$. ثم، وفقًا التوطئة 1.1، تتقارب المتتالية (u_n) إلى $u^*\in E$. باتباع نفس خطوات الإثبات في المبرهنة 2.2، نثبت أن:

$$\mathrm{Fix}(T)\cap \mathrm{Fix}(S)=\{u^*\}.$$

□

الفصل 3

مبرهنات النقاط الثابتة

تقديم

هذا الفصل مُقسَّم كما يلي:

1. يتناول القسم الأول **1.3** نتائجنا المتعلقة بالنقاط الثابتة للتطبيقات متعددة القيم باستخدام شرط تقليص هاردي-روجرز في سياق الفضاءات b-المترية، والذي أطلقنا عليه سابقًا: التقليصات المعممة أو التطبيقات التقلصية من نوع هاردي-روجرز. ويُعد المبرهنة الأساسية في هذا الجزء هي المبرهنة **1.3**، حيث استخدمنا شروطًا ضعيفة على المعاملات التي تظهر في شرط التقليص.
2. في القسم الثاني، ولأول مرة، تمكنا من الحصول على مبرهنة النقطة الثابتة للتطبيقات غير المُوسّعة المعممة في سياق الفضاءات b-المترية، والتي يمكن اعتبارها تمديدا لمبرهنة Bogin (راجع [13] أو المبرهنة **2.1** في الفصل الأول).

   كما تحصلنا أيضا على مبرهنات النقطة الثابتة للتقليصات المعممة والتطبيقات غير المُوسّعة المعممة وحيدة القيمة، والتي سبق وأن تم نشرها في الورقة البحثية [23].
3. في القسم **3.3** تكلمنا حول لتطبقات F-تقليصية حيث تحصلنا على نتائج أعم من المبرهنات المذكورة في الفصل الأول، سواء للتطبيقات وحيدة القيمة أو متعددة القيم. يمكن اعتبار هذا القسم مقارنة بين التقليصات المعممة والتطبيقات F-تقليصية.
4. في القسم **4.3** تناولنا فيه بعض مبرهنات نقاط التطابق التي يمكن برهانها انطلاقا من مبرهنات النقاط الثابتة.
5. القسم **1.4** مخصص لدراسة الاستقرار بمفهوم أولام-هايرز لمسألةالنقطة الثابتة، حيث تحصلنا على نتائج جيدة في هذا السياق بالنسبة للتطبيقات C-بيكار الضعيفة.

كما دعمنا هذه النتائج بأمثلة توضح قابليتها للتطبيق واستخدامها، وأجرينا مقارنة بين نتائجنا وبعض النتائج السابقة وخلصنا إلى أن هذه النتائج أكثر عمومية من سابقاتها، وخاصةً تلك التي تستخدم تطبيقات F-تقليص من نوع هاردي-روجرز.

1.3 مبرهنات النقاط الثابتة للتقليصات المعممة

نبدأ بأول مبرهنة أساسية في هذا الفصل.

مبرهنــة 1.3

لتكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$، وليكن $T : E \to \mathscr{C}(E)$ دالة متعددة القيم بحيث تحقق، لكل $u, v \in E$، الشرط التالي:

(3.1)

$$H(Tu,Tv) \leq aD(u,v) + bD(u,Tu) + cD(v,Tv) + dD(u,Tv) + eD(v,Tu);$$

حيث إن a,b,c,d,e هي أعداد حقيقية موجبة تحقق (R_1) أو (R_2) حيث:

$$a+b+c+2sd<1 \qquad R_1$$

$$a+b+c+2se<1 \qquad R_2$$

إذا تحقق الشرط $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$، فإن:

1. T تطبيق بيكار ضعيف؛
2. توجد دالة اختيار $f^* : G(T) \to Fix(T)$ لـ T^∞ تحقق

(3.2)

$$D(u,f^*(u,v)) \leq s^2\left[\sum_{k=1}^{N-1} s^k + s^{N-1}\right]\left[\frac{s^2(q\theta)^N}{1-s(q\theta)^N} + s + 1\right] D(u,v);$$

لكل $(u,v) \in G(T)$، حيث q هو أي عدد حقيقي موجب يحقق $1 < q < \frac{1}{\theta}$، و $\theta = \min\{\theta_1,\theta_2\}$ حيث $\theta_1 = \frac{a+b+sd}{1-c-sd}$ و $\theta_2 = \frac{a+b+se}{1-c-se}$، و N هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $s(q\theta)^N < 1$.

ملاحظة 1.1.3

إن المتباينة (3.2) تعني أن T هو تطبيق C-بيكار ضعيف بقيمة:

$$C = s^2\left[\sum_{k=1}^{N-1} s^k + s^{N-1}\right]\left[\frac{s^2(q\lambda)^N}{1-s(q\lambda)^N} + s + 1\right]$$

.

برهان. لنرمز $\theta_1 = \frac{a+b+sd}{1-c-sd}$، $\theta_2 = \frac{a+b+se}{1-c-se}$ و $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$، إذن $0 \leq \theta < 1$.
لدينا حالتان:

1. إذا كان $\theta = 0$، عندها نحصل على $a = b = d = 0$ أو $a = b = e = 0$. لنفرض أن $a = b = d = 0$. ليكن $u_0 \in E$، $u_1 \in Tu_0$ و $u_2 \in Tu_1$. بوضع $u = u_0$، $v = u_1$ في (3.1) نستنتج:

$$H(Tu_0, Tu_1) \leq cD(u_1, Tu_1) + eD(u_1, Tu_0).$$

بالإضافة إلى ذلك، لدينا:
$D(u_1, Tu_1) \leq D(u_1, u_2)$، لأن $u_2 \in Tu_1$.
$D(u_1, Tu_0) = 0$ لأن $u_1 \in Tu_0$.
وبالتالي، نحصل على:

$$H(Tu_0, Tu_1) \leq cD(u_1, u_2). \qquad (3.3)$$

إذا كان $c = 0$، فإن $H(Tu_0, Tu_1) = 0$. هذا يؤدي إلى أن $u_1 \in Tu_0 = Tx_1$، مما يعني أن $u_1 \in \mathrm{Fix}(T)$.
إذا كان $c \neq 0$، نختار $u_2 \in Tu_1$ بحيث تحقق الشرط التالي:

$$D(u_2, u_1) \leq \sqrt{c^{-1}} H(Tu_1, Tu_0). \qquad (3.4)$$

من (3.3) و(3.4) نستنتج:

$$D(u_1, u_2) \leq \sqrt{c} D(u_1, u_2);$$

وهذا صحيح فقط إذا كان $u_1 = u_2$، مما يدل على أن $u_1 = u_2 \in Tu_1$ أو ببساطة $u_1 \in \mathrm{Fix}(T)$.
بالنسبة للحالة $a = b = e = 0$، نستخدم نفس الخطوات.
نستنتج أنه في هذه الحالة: $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$، ويمكن أخذ متتالية التقريب المتتابعة المعرفة كما يلي: $u_n = u_1$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

2. لنفرض الآن أن $0 < \theta < 1$. لنأخذ q عددًا موجبًا بحيث $\frac{1}{\theta} < q < 1$. يمكننا على سبيل المثال أخذ $q = \sqrt{\theta^{-1}}$. لنأخذ $(u, v) \in G(T)$. يمكننا بناء متتالية (u_n) في E تبدأ بـ $u_0 = u$ و $u_1 = v$ بحيث، لجميع $n \geq 1$،

$$D(u_{n+1}, u_n) \leq qH(Tu_n, Tu_{n-1}). \quad \text{و} \quad u_{n+1} \in Tu_n$$

الآن نفرض أن R_1 محقق. عند وضع $u = u_{n-1}$ و $v = u_n$ في (3.1)، نحصل على:

$$H(Tu_{n-1}, Tu_n) \le aD(u_{n-1}, u_n) + bD(u_{n-1}, Tu_{n-1}) + cD(u_n, Tu_n) + dD(u_{n-1}, Tu_n) + eD(u_n, Tu_{n-1}).$$

وفقًا للتوطئة 4.1 وبما أن $u_n \in Tu_{n-1}$، لدينا ما يلي:

- $D(u_{n-1}, Tu_{n-1}) \le D(u_{n-1}, u_n)$;
- $D(u_n, Tu_n) \le H(Tu_{n-1}, Tu_n)$, لأن: $u_n \in Tu_{n-1}$;
- $D(u_n, Tu_{n-1}) = 0$، لأن: $u_n \in Tu_{n-1}$.

باستخدام التوطئة 4.1 مرة أخرى وتعريف التطبيق H، نحصل على:

$$\begin{aligned} D(u_{n-1}, Tu_n) &\le s\left[D(u_{n-1}, u_n) + D(u_n, Tu_n)\right] \\ &\le s\left[D(u_{n-1}, u_n) + H(Tu_{n-1}, Tu_n)\right]. \end{aligned}$$

من هذه النتائج، نجد أن:

$$H(Tu_n, Tu_{n-1}) \le aD(u_{n-1}, u_n) + bD(u_{n-1}, u_n) + cH(Tu_{n-1}, Tu_n) + sd(D(u_{n-1}, u_n) + H(Tu_{n-1}, Tu_n)).$$

وبالتالي، نحصل على:

$$(1 - sc - sd)\, H(Tu_n, Tu_{n-1}) \le (a + b + sd)\, D(u_{n-1}, u_n).$$

هذا يؤدي إلى:

$$H(Tu_n, Tu_{n-1}) \le \frac{a+b+sd}{1-c+sd} D(u_{n-1}, u_n) = \theta_1 D(u_{n-1}, u_n);$$

حيث أن $\theta_1 = \dfrac{a+b+sd}{1-c-sd} < 1$، بما أن $a + b + c + 2sd < 1$.

إذا فرضنا أن R_2 محقق، فإننا بوضع $x = x_n$ و $y = x_{n-1}$ واتباع نفس طريقة الإثبات في الحالة السابقة، نحصل على:

$$H(Tu_n, Tu_{n-1}) \le \theta_2 D(u_{n-1}, u_n).$$

حيث: $\theta_2 = \dfrac{a+b+se}{1-c-se} < 1$، لأن $a + b + c + 2se < 1$. لذلك، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نحصل على

$$H(Tu_n, Tu_{n-1}) \le \theta D(u_{n-1}, u_n).$$

وفقًا للمتباينة $D(u_{n+1}, u_n) \le qH(Tu_n, Tu_{n-1})$، نحصل على: $D(u_{n+1}, u_n) \le q\theta D(u_{n-1}, u_n)$.

باستخدام الاستقراء، نجد:

$$D(u_{n+1},u_n)\le (q\theta)^n D(u_0,u_1).$$

بما أن $q\theta<1$ ووفقًا للتوطئة 1.1، نستنتج أن المتتالية (u_n) تتقارب إلى عنصر ما $u^*=u^*(u,v,q)\in E$. بما أن $s(q\theta)^N<1$، فإن المتباينة (1.23) للتوطئة 1.1 يمكن تبسيطها إلى:

(3.5)

$$D(u_n,u^*(u,v,q))\le s^2\left[\sum_{k=1}^{N-1}s^k+s^{N-1}\right]\left[\frac{s^2(q\theta)^N}{1-s(q\theta)^N}+s+1\right]D(u_0,u_1).$$

لنثبت أن $u^*\in Tu^*$، أو بشكل مكافئ $D(u^*,Tu^*)=0$، لأن Tu^* هي مجموعة مغلقة.
نفرض أن $sb+s^2e<1$. من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، لدينا

$$\begin{aligned}
D(u^*,Tu^*)&\le sD(u^*,u_{n+1})+sD(u_{n+1},Tu^*)\\
&\le sD(u^*,u_{n+1})+sH(Tu^*,Tu_n)\quad \left(\text{نضع } u=u^* \text{ و } v=u_n\right)\\
&\le sD(u^*,u_{n+1})+saD(u^*,u_n)+sbD(u^*,Tu^*)+scD(u_n,Tu_n)\\
&\quad +sdD(u^*,Tu_n)+seD(u_n,Tu^*)\\
&\le sD(u^*,u_{n+1})+saD(u^*,u_n)+sbD(u^*,Tu^*)+scD(u_n,u_{n+1})\\
&\quad +sdD(u^*,u_{n+1})+s^2eD(u_n,u^*)+s^2eD(u^*,Tu^*).
\end{aligned}$$

لما $n\to+\infty$، نحصل على

$$D(u^*,Tu^*)\le sbD(u^*,Tu^*)+s^2eD(u^*,Tu^*).$$

هذا يؤدي إلى

$$\left(1-sb-s^2e\right)D(u^*,Tu^*)\le 0.$$

من الشرط $sb+s^2e<1$، نستنتج أن

$$D(u^*,Tu^*)=0.$$

وبالتالي، $u^*\in Tu^*$، لأن: Tu^* مجموعة مغلقة.
إذا فرضنا أن الشرط $sc+s^2d<1$ محقق، فإننا بوضع $v=u^*$ و $u=u_n$، نحصل على

$$D(u^*,Tu^*)\le scD(u^*,Tu^*)+s^2dD(u^*,Tu^*).$$

لذلك، $D(u^*,Tu^*)=0$ لنفس الأسباب السابقة.

في كلا الحالتين، لدينا $u^* \in Tu^*$، وبالتالي فإن المتتالية (u_n) هي متتالية من التقريبات المتعاقبة لـ T، وبذلك نكون قد أكملنا إثبات الجزء الأول.
بالنسبة للجزء الثاني، نأخذ $f^*(u,v) = u^*(u,v,q)$ من أجل قيمة ثابتة لـ q، و $n = 0$ في المتباينة (3.5)، فنحصل على المتباينة المطلوبة (3.2).
□

نُشير إلى أننا لا يمكننا أخذ النهاية لما $q \downarrow 1$ في الإثبات السابق، بما أن النقطة الثابتة $u^*(u,v,q)$ متعلقة أيضا بـ q، ولا يمكننا ضمان وجود النهايات:

$$\lim_{q\to 1} u^*(u,v,q) \quad \text{أو} \quad \lim_{q\to 1} D\left(u,u^*(u,v,q)\right).$$

ذلك لأن b-مسافة D قد لا تكون مستمرة وقد لا توجد هذه النهاية.

ملاحظة 2.1.3

1. إذا كان $s = 1$، يمكننا إزالة الشرط $sb + s^2e < 1$ أو $sc + s^2d < 1$.
2. إذا كان $s = 1$ و $b = c = d = e = 0$، نحصل على نظرية نادلر Nadler [65, المبرهنة 1].
3. إذا كان $a = d = e = 0$ و $b = c$، نحصل على تمديد لـ [31, المبرهنة 1]. هذه نسخة من مبرهنة كانان [47] للتطبيقات متعددة القيم.
4. إذا كان $a = b = c = 0$، نحصل على تمديد لمبرهنة Chatterjea [26] للتطبيقات متعددة القيم على فضاء b-متري تام.
5. إذا كان $d = e = 0$، نحصل على تمديد لمبرهنة Reich [76] للتطبيقات متعددة القيم في إطار الفضاءات b-مترية.
6. في [45, المبرهنة 1]، يفرض المؤلف أن $b = c$، $d = e$ و $a + 2b + 2e < 1$، للتطبيقات متعددة القيم المعرفة على فضاء متري تام $(s = 1)$. هذه حالة خاصة من المبرهنة **2.2**.

لدينا المبرهنة التالية التي تمدد المبرهنة **4.1** عندما يكون $b \neq c$ و $d \neq e$.

مبرهنة 2.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s \geq 1$، و$T : E \to \mathscr{C}(E)$ تطبيق يحقق الشرط: (3.1) لكل $u,v \in E$، حيث a,b,c,d,e هي أعداد حقيقية موجبة تحقق أحد الشرطين: R_1 أو R_2.
إذا تحقق أيضًا أحد الشرطين: $sb + s^2e < 1$ أو $sc + s^2d < 1$، و $\mathrm{SFix}(T) \neq \emptyset$ و

$a+d+e<1$، فإن $\mathrm{SFix}(T)=\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$.

برهان. بناءً على الشروط، لدينا $\mathrm{SFix}(T)\neq\emptyset$. لنفرض أن $u^*\in\mathrm{SFix}(T)$ و $v^*\in\mathrm{Fix}(T)$. إذا وضعنا $u=u^*$ و $v=v^*$ في (3.1) نحصل على:

$$\begin{aligned}D(u^*,v^*)=D(Tu^*,v^*)&\leq H(Tu^*,Tv^*)\\&\leq aD(u^*,v^*)+bD(u^*,Tu^*)+cD(v^*,Tv^*)+dD(u^*,Tv^*)+eD(v^*,Tu^*)\\&\leq aD(u^*,v^*)+(d+e)D(u^*,v^*).\end{aligned}$$

وبالتالي، نحصل على المتباينة التالية:

$$(1-a-d-e)D(u^*,v^*)\leq 0.$$

ولكن بما أن $a+d+e<1$، فإن هذا يؤدي بالضرورة إلى أن $D(u^*,v^*)=0$، مما يعني أن $u^*=v^*$. وبالتالي، $\mathrm{SFix}(T)=\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$. □

نتيجة 1.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$، و$T:E\to\mathscr{C}(E)$ تطبيق يحقق المتباينة:

$$H(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tu)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)];$$

لكل $u,v\in E$، حيث: a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق $a+2\beta+2s\gamma<1$.

إذا تحققت أيضًا أن $s\beta+s^2\gamma<1$ و $\mathrm{SFix}(T)\neq\emptyset$ مع $u^*\in\mathrm{SFix}(T)$، فإن $\mathrm{SFix}(T)=\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$.

برهان. هذه نتيجة مباشرة من المبرهنة 2.2 عن طريق أخذ $b=c=\beta$ و $d=e=\gamma$ في (3.1). في هذه الحالة، كل شرط من الشرطين R_1 أو R_2 يكافئ الشرط $a+2\beta+2s\gamma<1$. وبالمثل، فإن الشرط $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$ يكافئ الشرط $s\beta+s^2\gamma<1$. علاوة على ذلك، فإن الشرط $a+d+e<1$ يتحقق على الفور. إذ إن:

$$a+d+e=a+2\gamma\leq a+2s\gamma\leq a+2\beta+2s\gamma<1.$$

من المبرهنة 2.2، نستنتج أن $\mathrm{SFix}(T)=\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$. □

مثـــال 1.3

[3.2 Example ,25] ليكن $E=\mathbb{R}_+$، ولتكن المجموعات:

$$M_1=\left\{\frac{m}{3k+1} \mid m=0 \text{ أو } m=3^q; q\in\mathbb{Z}_+, k\in\mathbb{Z}_+\right\};$$
$$M_2=\left\{\frac{m}{3k+2} \mid m=3^q; q\in\mathbb{Z}_+, k\in\mathbb{Z}_+\right\};$$
$$M_3=E\setminus(M_1\cup M_2).$$

لنعتبر التطبيقات متعددة القيم $T_{\mu,\eta}: E\longrightarrow \mathscr{C}(E)$ المعرفة لكل $u\in E$ على النحو التالي:

$$T_{\mu,\eta}u=\begin{cases}\{\mu u\}, & u\in M_1;\\ \{\eta u\}, & u\in M_2;\\ \{\mu u,\eta u\}, & u\in M_3;\end{cases}$$

حيث $0<\eta\le\mu<1$. نعرف التطبيق D من $E\times E$ إلى $[0,+\infty[$ بـ: $D(u,v)=|u-v|^p$
حيث أن $p\ge 2$ هو عدد صحيح. يمكننا التحقق بسهولة أن D هو b-متري تام مع $s=2^{p-1}$.
لنثبت أن $T_{\mu,\eta}$ هي تقليصات من نوع هاردي-روجرز بالنسبة لـ D تحت شرط إضافي على المعامل μ.

برهان. لتبسيط الحسابات، نرمز لـ $T_{\mu,\eta}$ بـ T. سوف نميز الحالات التالية:

الحالة 1 عندما يكون $u,v\in M_1$، لدينا $\delta(Tu,Tv)=|\mu u-\mu v|^p=\mu^p|u-v|^p=\mu^pD(u,v)$ و $\delta(Tv,Tu)=|\mu v-\mu u|^p=\mu^pD(u,v)$. لذا، $H(Tu,Tv)=\mu^pD(u,v)$.

الحالة 2 عندما يكون $u,v\in M_2$، لدينا $\delta(Tu,Tv)=|\eta u-\eta v|^p=\eta^p|u-v|^p=\eta^pD(u,v)$ و $\delta(Tv,Tu)=|\eta v-\eta u|^p=\eta^pD(u,v)$. ومن ثم، فإن

$$H(Tu,Tv)=\eta^pD(u,v)\le\mu^pD(u,v).$$

الحالة 3 عندما يكون $u,v\in M_3$، لدينا $\delta(Tu,Tv)=|\mu u-\mu v|^p=\mu^p|u-v|^p=\mu^pD(u,v)$ و $\delta(Tv,Tu)=|\mu v-\mu u|^p=\mu^pD(u,v)$. لذا، $H(Tu,Tv)=\mu^pD(u,v)$.

الحالة 4 عندما يكون $u\in M_3$ و $v\in M_2$، لدينا $\delta(Tu,Tv)=|\mu u-\eta v|^p=\delta(Tv,Tu)$ $H(Tu,Tv)$. هناك حالتين مختلفتين:

1. عندما يكون $u>v$، نحصل على $H(Tu,Tv)=\mu^p|u-\frac{\eta}{\mu}v|^p\le\mu^p|u-\eta v|^p=\mu^pD(u,Tv)$.
2. عندما يكون $u<v$، يجب اعتبار حالتين فرعيتين:

إذا كان $u<\eta v$، فإن $H(Tu,Tv)=\eta^p|\frac{\mu}{\eta}u-v|^p\le\eta^p|\mu u-v|^p\le\mu^pD(v,Tu)$.

إذا كان $u > \eta v$، فإننا نحصل على

$$H(Tu,Tv) = \eta^p|\frac{\mu}{\eta}u - v|^p \leq \eta^p|\mu u - v|^p = \eta^p D(Tu,v) \leq \mu^p D(v,Tu);$$

لما $\mu u < \eta v$.

أو نحصل على:

$$H(Tu,Tv) = \mu^p|u - \frac{\eta}{\mu}v|^p \leq \mu^p|u - \eta v|^p = \mu^p D(u,Tv);$$

لما: $\mu u > \eta v$.

الحالة 5 عندما يكون $u \in M_2$ و $v \in M_3$، فإن $H(Tu,Tv) = |\eta u - \mu v|^p$. باستخدام نفس الطريقة، نحصل على:

إذا كان $u < v$، نحصل على $H(Tu,Tv) = \mu^p|\frac{\eta}{\mu}u - v|^p \leq \mu^p|\eta u - v|^p \leq \mu^p D(v,Tu)$.

إذا كان $u > v$، نحصل على $H(Tu,Tv) \leq \eta^p|u - \mu v|^p = \eta^p D(u,Tv) \leq \mu^p D(u,Tv)$ بشرط أن $v < \eta u$ أو $v > \eta u$ و $\mu v < \eta u$.

إذا كان $u > v$ و $v > \eta u$ و $\mu v > \eta u$، نحصل على:

$$H(Tu,Tv) = \mu^p|\frac{\eta}{\mu}u - v|^p \leq \mu^p|\eta u - v|^p = \mu^p D(v,Tu).$$

الحالة 6 عندما يكون $u \in M_3$ و $v \in M_1$، لدينا $H(Tu,Tv) = |\eta u - \mu v|^p$. هذه الحالة تؤدي إلى نفس النتائج كما في الحالة 5.

الحالة 7 عندما يكون $u \in M_1$ و $v \in M_3$، نحصل على نفس النتائج كما في الحالة 4.

الحالة 8 عندما يكون $u \in M_1$ و $v \in M_2$، نحصل على نفس النتائج كما في الحالة 4.

استنادًا إلى المناقشة السابقة، نستنتج أنه لكل $u,v \in E$، لدينا

$$H(Tu,Tv) \leq \mu^p D(u,v) + \mu^p D(u,Tv) + \mu^p D(v,Tu).$$

وعليه، فإن $T_{\mu,\eta}$ هي تقليصات معممة من نوع هاردي-روجرز بالنسبة لـ D مع $a = d = e = \mu^p$ و $b = c = 0$.

على سبيل المثال، عندما يكون $p = 2$، فإن الشرط R_1 و $sb + s^2e < 1$ من المبرهنة **1.3** يتحقق إذا وفقط إذا كان $0 \leq \mu < \frac{1}{\sqrt{5}}$. ومع ذلك، فإن الشرط $a + 2b + 2sc < \frac{s-1}{s^2}$ من [25, المبرهنة 1.2] يتحقق إذا وفقط إذا كان $0 \leq \mu < \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ولا يمكن تطبيقها عندما يكون $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \mu < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

هذا يوضح أن المبرهنة 1.3 تضمن وجود نقطة ثابتة للتطبيقات متعددة القيم $T_{\mu,\eta}$ على نطاق أوسع للوسيط $\mu \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[$ مقارنة بـ [25, المبرهنة 1.2]. علاوة على ذلك، نلاحظ أن $\mathrm{SFix}(T_{\eta,\mu}) \neq \emptyset$، حيث أن $0 \in \mathrm{SFix}(T_{\eta,\mu})$ لأن $T_{\eta,\mu}0 = \{0\}$. لذا، من المبرهنة 1.3، نستنتج أن $\mathrm{SFix}(T_{\mu,\eta}) = \{0\}$. □

مثـــال 2.3

لنعتبر $E = [0,1]$ مزوداً بـ مسافة-b $D(u,v) = |u-v|^p$ بثابت $s = 2^{p-1}$، حيث $p \geq 1$.
نعرّف عائلة من التطبيقات متعددة القيم $T : E \longrightarrow \mathscr{C}(E)$ بالشكل: $Tu = \left[e^{\mu(u-1)}, e^{\eta(u-1)}\right]$ حيث $0 < \eta \leq \mu < 1$.
لكل $u, v \in [0,1]$، لدينا $Tu = \left[e^{\mu(u-1)}, e^{\eta(u-1)}\right]$ و $Tv = \left[e^{\mu(v-1)}, e^{\eta(v-1)}\right]$. دون فقدان العمومية، نفرض أن $u < v$. بناءً على (1.62) نحصل على:

$$H(Tu,Tv) = \max\left\{|e^{\eta(u-1)} - e^{\eta(v-1)}|^p, |e^{\mu(u-1)} - e^{\mu(v-1)}|^p\right\}.$$

من مبرهنة القيم المتوسطة، نحصل بسهولة على:

$$\begin{aligned} H(Tu,Tv) &\leq \max\{|\eta(u-1) - \eta(v-1)|^p, |\mu(u-1) - \mu(v-1)|^p\} \\ &\leq \max\{|\eta u - \eta v|^p, |\mu u - \mu v|^p\} = \mu^p |u-v|^p. \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$H(Tu,Tv) \leq \mu^p D(u,v).$$

بما أن $\mu < 1$، نستنتج أن: $\mathrm{Fix}(T_{\eta,\mu}) \neq \emptyset$ حسب المبرهنة 1.3.
مع ذلك، فإن المبرهنتين 4.1 و4.1 لا يمكن تطبيقهما عندما $\mu \geq \left(\frac{2^{p-1}-1}{2^{2p-2}}\right)^{\frac{1}{p}}$. على سبيل المثال، إذا كان $p = 2$ و $\mu \geq \frac{1}{4}$، فإن الشرط (F_1) في المبرهنة 4.1 لا يتحقق.

يمكن عرض نتيجة بديلة باستخدام التقليصات البيانية المعممة من نوع هاردي-روجرز، حيث نفرض أن المتباينة (2.1) تتحقق فقط لكل $(u,v) \in G(T)$. تم مناقشة حالة تقليص بناخ ضمن إطار الفضاءات المترية في الورقة البحثية [71]. بشكل ملحوظ، من المتباينة (2.1) يمكن حذف الحد $eD(v,Tu)$ نظراً لأن $D(v,Tu) = 0$ عندما يكون $v \in Tu$. وعليه يمكن تحسين

المبرهنة [71, المبرهنة 1.4] عن طريق استعمال تقليص من نوع هاردي-روجرز تمديده إلى إطار الفضاءات b-مترية.

مبرهنة 3.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$ و$T:E\to\mathscr{C}(E)$ تطبيق بحيث لكل $(u,v)\in G(T)$

$$H(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tu)+dD(u,Tv). \quad (3.6)$$

حيث a,b,c,d أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+b+c+2sd<1$. إذا كان البيان $G(T)$ مغلقًا، فإن:

1. T هو تطبيق بيكار ضعيف؛
2. توجد دالة اختيار $f^*:G(T)\to Fix(T)$ من T^∞ بحيث تتحقق تقدير تراجع-إزاحة (3.2) لكل $(u,v)\in G(T)$.

برهان. باتباع الطريقة المستخدمة في إثبات المبرهنة **1.3**، يمكننا بناء متتالية (u_n) متقاربة نحو u^* بحيث: $u_{n+1}\in Tu_n$.

بوضع $u=u_{n-1}, v=u_n$ في المتباينة (3.6)، نحصل على: $D(u_{n+1},u_n)\leq q\theta D(u_{n-1},u_n)$،

حيث: $\theta=\dfrac{a+b+sd}{1-c-sd}$. بما أن $(u_n,u_{n+1})\in G(T)$، و$G(T)$ هي مجموعة مغلقة، فإن $(u^*,u^*)\in G(T)$، مما يعني أن $u^*\in Tu^*$. الخطوات الأخرى هي نفسها كما في إثبات المبرهنة **1.3**. □

ملاحظة 3.1.3

1. في سياق الفضاءات المترية، مع $b=c=d=e=0$ في المبرهنة **1.3**، نتحصل على [71, المبرهنة 1.4].
2. الشروط الإضافية $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$ المطلوبة في المبرهنة **1.3** غير ضرورية في المبرهنة **1.3**. من ناحية أخرى، فإن مغلوقية البيان $G(T)$ غير مطلوبة في المبرهنة **1.3**، مما يجعل النتيجة أكثر مرونة وقابلة للتطبيق على نطاق أوسع. المثال التالي يوضح هذه الحقيقة.

مثـــال 3.3

ليكن $E=[0,1]$ مع b-مسافة D المعرف بـ: $D(u,v)=(u-v)^2$. إذًا، فإن (E,D) هو فضاء تام.

لنعرف تطبيقا متعدد القيم $T:E\to P(E)$ بـ: $Tu=\left\{\frac{u}{2}\right\}$ لـ $0\leq u<1$ و $T1=\left[0,\frac{1}{10}\right]$.

لحساب $H(Tu,Tv)$, نميز الحالات التالية:

1. إذا كان $u,v\in[0,1)$، فإننا نحصل على: $H(Tu,Tv)=H\left(\left\{\frac{u}{2}\right\},\left\{\frac{v}{2}\right\}\right)=\frac{1}{4}D(u,v)$.
2. إذا كان $u\in[0,1)$ و $v=1$، فإننا نحصل على

$$H(Tu,Tv)=H\left(\left\{\frac{u}{2}\right\},\left[0,\frac{1}{10}\right]\right)=\max\left\{\frac{1}{4}u^2,\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{10}\right)^2\right\}.$$

هنا، لدينا $D(u,v)=(1-u)^2$، $D(u,Tu)=\frac{1}{4}u^2$، $D(v,Tv)=\frac{81}{100}$ و $D(v,Tu)=(1-\frac{u}{2})^2$. وهذا يعطي حالتين فرعيتين: $H(Tu,Tv)=\frac{1}{4}u^2$ أو $H(Tu,Tv)=\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{10}\right)^2$.

في كلا الحالتين، نحصل على المتباينة التالية

$$H(Tu,Tv)\leq\frac{1}{4}D(u,v)+\frac{25}{81}[D(u,Tu)+D(v,Tv)]. \qquad (3.7)$$

3. إذا كان $v\in[0,1)$ و $u=1$، فإن المتباينة (3.7) تتحقق أيضًا.

من هذه الحالات الثلاث، نستنتج أن T يحقق المتباينة (3.1) مع المعاملات: $a=\frac{1}{4};b=c=\frac{25}{81}$ و $d=e=0$.

الشروط R_1 و R_2 محققة لأن: $a+b+c+2sd=a+b+c+2se=\frac{281}{324}<1$. كما أن $sb+s^2e=sc+s^2d=1=\frac{50}{81}<1$. لذلك، جميع شروط المبرهنة **1.3** محققة، مما يتيح لنا الاستنتاج بأن T هو تطبيق بيكارد ضعيف.

ومع ذلك، لا يمكن تطبيق المبرهنة **1.3** لأن البيان $G(T)$ غير مغلق. على سبيل المثال، نعتبر المتتالية $(1-\frac{1}{n},\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})\in G(T)$، التي تحقق $\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

ومع ذلك، فإن $(1,\frac{1}{2})\notin G(T)$.

2.3 النقاط الثابتة للتطبيقات غير المُوسّعة المُعممة

في هذا القسم، نقوم بتمديد مبرهنة بوغين (المبرهنة 2.1) إلى إطار الفضاءات b-مترية والتطبيقات متعددة القيم. المبرهنة الرئيسية في هذا القسم هي التالية.

مبرهنـة 4.3

ليكن (E,ρ) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$ و $T:E\to\mathscr{C}(E)$ تطبيق متعدد القيم بحيث لكل $u,v\in E$

$$H(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tv)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)]; \tag{3.8}$$

حيث: a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق $a+2\beta+2s\gamma=1$ مع $\min\{\beta,\gamma\}\neq 0$.
إذا كان $s\beta+s^2\gamma<1$، فإننا نحصل على النتائج التالية:

1. T هو تطبيق بيكارد ضعيف.
2. يوجد دالة اختيار $f^*:G(T)\to \mathrm{Fix}(T)$ لـ T^∞ بحيث

$$D(u,f^*(u,v))\leq s^2\left[\sum_{k=1}^{N-1}s^k+s^{N-1}\right]\left[\frac{s^2(\sqrt{\eta})^N}{1-s(\sqrt{\eta})^N}+s+1\right](\sqrt{\eta})^{-1}D(u,v); \tag{3.9}$$

لكل $(u,v)\in G(T)$، حيث $\eta=\theta+q$. مع θ هو العدد المحدد في التوطئة ??، و q هو أي عدد موجب يحقق: $\eta<1$، و N هو أصغر عدد صحيح موجب يتحقق فيه $s(\sqrt{\eta})^N<1$.

إثبات هذه المبرهنة يتطلب بعض التوطئات الأساسية. أولاً، سوف نعرض هذه التوطئات ونثبتها، ثم نعود لبرهان هذه المبرهنة.

توطئـــة 1.3

ليكن $T:E\to\mathscr{C}(E)$ يحقق (3.8) حيث: a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+2\beta+2s\gamma=1$. عندئذ: من أجل كل $u\in E$ و $v\in Tu$ لدينا

$$H(Tu,Tv)\leq D(u,v).$$

برهان. لكل $u \in E$ و $v \in Tu$، نلاحظ من (3.8) و (B_3) ما يلي:

$$\begin{aligned} H(Tu,Tv) &\leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tu)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)] \\ &\leq aD(u,v)+\beta[D(u,v)+H(Tu,Tv)]+s\gamma D(u,v)+s\gamma D(v,Tv)+0 \\ &\leq (a+\beta+s\gamma)D(u,v)+(\beta+s\gamma)H(Tu,Tv). \end{aligned}$$

لذلك، نحصل على

$$H(Tu,Tv) \leq \frac{a+\beta+s\gamma}{1-\beta-s\gamma}D(u,v).$$

وبما أن $a+2\beta+2s\gamma=1$، يمكن استنتاج أن: $\frac{a+\beta+s\gamma}{1-\beta-s\gamma}=1$. ومن ثم، نحصل على النتيجة المطلوبة. □

توطئـــة 2.3

ليكن $T \to \mathscr{C}(E)$ يحقق الشرط (3.8) لكل $u,v \in E$، حيث أن a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+2\beta+2s\gamma=1$. إذن:

$$\forall \epsilon>0, \forall u \in E, \forall v \in Tu, \exists w \in Tv : D(v,w) \leq D(u,v)+\epsilon.$$

برهان. من تعريف $D(v,Tv)$، نجد:

$$\forall \epsilon>0, \forall u \in E, \forall v \in Tu, \exists w \in Tv : D(v,w) \leq D(v,Tv)+\epsilon.$$

من التوطئة **2.3** والشرط الأخير، نحصل على:

$$D(v,Tv) \leq H(Tu,Tv) \leq D(u,v) \implies D(v,w) \leq D(u,v)+\epsilon.$$

وهذا يكمل البرهان. □

توطئـــة 3.3

ليكن $T : E \to \mathscr{C}(E)$ يحقق الشرط: (3.8) لكل $u,v \in E$، حيث: a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+2\beta+2s\gamma=1$ مع $\beta \neq 0$. إذن، يوجد $0<\lambda<2s$ بحيث: لكل $u \in E v \in Tu$ يوجد $\epsilon>0$ $w \in Tv$ حيث:

$$H(Tu,Tw) \leq \lambda D(u,v)+\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\epsilon.$$

برهان. لنأخذ $\epsilon > 0$، $u \in E$ و $v \in Tu$. وفقًا للتوطئة 2.3، يوجد $w \in Tv$ بحيث $D(v,w) \leq D(u,v) + \epsilon$. من شرط التقليص (3.8)، نحصل على:

$$H(Tu,Tw) \leq aD(u,w) + \beta[D(u,Tu) + D(w,Tw)] + \gamma[D(u,Tw) + D(w,Tu)].$$

نذكر هنا المتباينات التالية:

- $D(u,w) \leq sD(u,v) + sD(v,w) \leq 2sD(u,v) + s\epsilon$;
- $D(u,Tu) \leq D(u,v)$ لأن: $v \in Tu$;
- $D(w,Tw) \leq H(Tv,Tw) \leq D(v,w) \leq D(u,v) + \epsilon$;
- $D(u,Tw) \leq sD(u,v) + sD(v,Tw) \leq sD(u,v) + sH(Tu,Tw)$;
- $D(w,Tu) \leq H(Tu,Tv) \leq D(u,v)$.

إذن نحصل على:

$$\begin{aligned} H(Tu,Tw) &\leq a(2sD(u,v) + s\epsilon) + \beta[D(u,v) + D(u,v) + \epsilon] \\ &\quad + \gamma[sD(u,v) + sH(Tu,Tw) + D(u,v)] \\ &\leq (2as + 2\beta + s\gamma + \gamma)D(u,v) + (as + \beta)\epsilon + s\gamma H(Tu,Tw) \end{aligned}$$

وعليه نجد:

$$H(Tu,Tw) \leq \lambda D(u,v) + \frac{as+\beta}{1-s\gamma}\epsilon;$$

حيث أن $\lambda = \dfrac{2as+2\beta+s\gamma+\gamma}{1-s\gamma}$. يمكن ملاحظة أن $1 - s\gamma = a + 2\beta + s\gamma \neq 0$، لأن: $a + 2\beta + 2s\gamma = 1$.

بالإضافة إلى ذلك، أخذًا في الاعتبار أن $\beta \neq 0$، نحصل على:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2as+2\beta+s\gamma+\gamma}{1-s\gamma} = \frac{2as+2\beta+s\gamma+\gamma}{a+2\beta+s\gamma} &= 1 + \frac{(2s-1)a+\gamma}{a+2\beta+s\gamma} \\ &\leq 1 + \frac{(2s-1)a+\gamma}{a+2\beta+\gamma} \leq 1 + (2s-1)\frac{a+\gamma}{a+2\beta+\gamma} < 2s. \end{aligned}$$

وعليه، نجد النتيجة المطلوبة. □

1.2.3 ملاحظة

نلاحظ أنه إذا كان $s > 1$، فإنه يمكن استبدال الشرط $\beta \neq 0$ بشرط أضعف هو $\max\{\beta,\gamma\} \neq 0$. لأنه، حتى إذا كانت $\beta = 0$، من السهل ملاحظة أنه:

$$\lambda - 2s = \frac{2as+2\beta+s\gamma+\gamma}{a+2\beta+s\gamma} - 2s = \frac{2as+s\gamma+\gamma}{a+s\gamma} - 2s = \frac{\gamma(1+s-2s^2)}{a+s\gamma} < 0$$

لـ $s>1$ و $\gamma\neq 0$.

توطئـــة 4.3

ليكن $T:E\to\mathscr{C}(E)$ تطبيقا يحقق الشرط: (3.8) لجميع $u,v\in E$، حيث: a,β,γ هي أعداد حقيقية موجبة تحقق: $a+2\beta+2s\gamma=1$ مع $\min\{\beta,\gamma\}\neq 0$.
إذن، يوجد $0<\theta<1$ حيث: لجميع $\epsilon>0$، $u\in E$، $v\in Tu$، يوجد $w\in Tv$ يحقق:

$$H(Tv,Tw)\leq\theta D(u,v)+\left(a+\beta+\gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon.$$

برهان. ليكن $\epsilon>0$، و $u\in E$ و $v\in Tu$. من التوطئة **2.3**، يوجد $w\in Tv$ يحقق: $D(v,z)\leq D(u,v)+\epsilon$.
باستعمال (3.8) نحصل على:

$$\begin{aligned}
H(Tv,Tw)&\leq aD(v,w)+\beta[D(v,Tv)+D(w,Tw)]+\gamma[D(v,Tw)+D(w,Tv)]\\
&\leq a(D(u,v)+\epsilon)+\beta(H(Tu,Tv)+H(Tv,Tw))+\gamma(H(Tu,Tw))\\
&\leq a(D(u,v)+\epsilon)+\beta(D(u,v)+D(v,w))+\gamma\left(\lambda D(u,v)+\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\epsilon\right)\\
&\leq aD(u,v)+a\epsilon+\beta D(u,v)+\beta D(u,v)+\beta\epsilon+\lambda\gamma D(u,v)+\gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\epsilon\\
&\leq(a+2\beta+k\gamma)D(u,v)+\left(a+\beta+\gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon\\
&=\theta D(u,v)+\left(a+\beta+\gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon.
\end{aligned}$$

مع: $\theta=a+2\beta+\lambda\gamma<a+2\beta+2s\gamma=1$. □

ملاحظة 2.2.3

تماماً مثل الملاحظة **2.3**، إذا كان $s>1$، فإن نتائج التوطئة **2.3** تبقى صحيحة تحت الشرط الضعيف $\gamma\neq 0$، بدلاً من الشرط $\min\{\beta,\gamma\}\neq 0$.

المبرهنة **2.3**. لتكن $u_0\in E$، و $u_1\in Tx_0$. إذا كان $Tu_0=Tu_1$، فإن u_1 هو نقطة ثابتة لـ T.
إذا كان $Tu_0\neq Tu_1$، وفقًا للتوطئة **2.3**، يمكننا اختيار $u_2\in Tu_1$ بحيث ($u=u_0$، $v=u_1$،

$w = u_2$). وبالتالي نحصل على:

$$H(Tu_1, Tu_2) \leq \lambda D(u_0, u_1) + \left(a + b + c\frac{as+b}{1-sc}\right)\epsilon_1;$$
$$D(u_1, u_2) \leq H(Tu_0, Tu_1) + \epsilon_1 \leq D(u_0, u_1) + \epsilon_1.$$

على نفس المنوال، نختار $u_3 \in Tu_2$ بحيث ($u = u_1$ ، $v = u_2$ ، $w = u_3$). عندئذٍ، لدينا:

$$H(Tu_2, Tu_3) \leq \lambda D(u_1, u_2) + \left(a + \beta + \gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon_2;$$
$$D(u_2, u_3) \leq H(Tu_1, Tu_2) + \epsilon_2.$$

بالاستقراء، نبني متتالية (u_n) في E بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$، لدينا $u_{n+1} \in Tu_n$ و:

$$H(Tu_n, Tu_{n+1}) \leq \lambda D(u_{n-1}, u_n) + \left(a + \beta + \gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon_n;$$
$$D(u_n, u_{n+1}) \leq H(Tu_{n-1}, Tu_n) + \epsilon_n.$$

حيث (ϵ_n) هي متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة. من المتراجحتين التاليتين:

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq H(Tu_{n-1}, Tu_n) + \epsilon_n;$$
$$H(Tu_{n-1}, Tu_n) \leq \lambda D(u_{n-2}, u_{n-1}) + \left(a + \beta + \gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon_{n-1};$$

نحصل على

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq \lambda\rho(u_{n-2}, u_{n-1}) + \left(a + \beta + \gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon_{n-1} + \epsilon_n.$$

يمكننا فرض أن $u_{n+1} \neq u_n$ لجميع $n \in \mathbb{N}$. وإلا فسيكون لدينا بالضرورة $u_n \in Tu_n$. لنختر عددًا موجبًا q يحقق: $0 < \lambda + q < 1$ ونختار المتتالية (ϵ_n) تحقق:

$$\left(a + \beta + \gamma\frac{as+\beta}{1-s\gamma}\right)\epsilon_{n-1} + \epsilon_n < qD(u_{n-2}, u_{n-1}).$$

نحصل عندئذ على:

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq \eta D(u_{n-2}, u_{n-1}); \qquad (3.10)$$

حيث $\eta = \lambda + q$. من (3.10)، نستنتج أنه لكل عدد طبيعي n، لدينا

$$D(u_n, u_{n+1}) \leq \left(\sqrt{\eta}\right)^n \left(\sqrt{\eta}\right)^{-1} D(u_0, u_1).$$

من التوطئة 1.1، نستنتج أن المتتالية (u_n) تتقارب إلى عنصر $u^* = u^*(u,v,q) \in E$.
لنثبت أن $u^* \in Tu^*$. لدينا:

$$\begin{aligned} D(u^*, Tu^*) &\le sD(u^*, u_{n+1}) + sD(u_{n+1}, Tu^*) \\ &\le sD(u^*, u_{n+1}) + sH(Tu^*, Tu_n) \\ &\le sD(u^*, u_{n+1}) + saD(u^*, u_n) + s\beta\left(D(u^*, Tu^*) + D(u_n, Tu_n)\right) \\ &\quad + s\gamma\left(D(u^*, Tu_n) + D(u_n, Tu^*)\right) \\ &\le sD(u^*, u_{n+1}) + saD(u^*, u_n) + s\beta D(u^*, Tu^*) + s\beta D(u_n, u_{n+1}) \\ &\quad + \gamma D(u^*, u_{n+1}) + s^2\gamma D(u_n, u^*) + s^2\gamma D(u^*, Tu^*). \end{aligned}$$

عندما $n \uparrow +\infty$، نحصل على:

$$D(u^*, Tu^*) \le s\beta D(u^*, Tu^*) + s^2\gamma D(u^*, Tu^*);$$

وهذا يؤدي إلى: $(1 - s\beta - s^2\gamma) D(u^*, Tu^*) \le 0$. بما أن $s\beta + s^2\gamma < 1$، فإننا نستنتج أن $D(u^*, Tu^*) = 0$، أي أن: $u^* \in Tu^*$.
النقطة الثانية يتم استنتاجها كما في إثبات المبرهنة 1.3. □

مبرهنة 5.3

نفرض أن الشروط المذكورة في المبرهنة 2.3 محققة، و $\mathbf{SFix}(T) \neq \emptyset$. إذن، فإن $\mathbf{SFix}(T) = \mathbf{Fix}(T) = \{u^*\}$.

برهان. باقتراض الشرط، لدينا $\mathbf{SFix}(T) \neq \emptyset$. لتكن $u^* \in \mathbf{SFix}(T)$ و لنفرض أن $v^* \in \mathbf{Fix}(T)$. باتباع نفس أسلوب الإثبات في المبرهنة 2.2، مع أخذ $b = c = \beta$ و $d = e = \gamma$، فإننا نحصل على: $(1 - a - 2\gamma) D(u^*, v^*) \le 0$. بما أن $\min\{\beta, \gamma\} \neq 0$، فإننا نحصل على $a + 2\gamma \le a + 2s\gamma < a + 2\beta + 2s\gamma = 1$. وهذا يعني أن $1 - a - 2\gamma > 0$. لذلك، فإن $D(u^*, v^*) = 0$، مما يؤدي إلى $u^* = v^*$. وهذا يترتب عليه $\mathbf{SFix}(T) = \mathbf{Fix}(T) = \{u^*\}$. □

ملاحظة 3.2.3

نظراً للملاحظة التالية، نحصل على مبرهنات نقطة ثابتة للتطبيقات وحيدة القيمة:
ليكن $T : E \to E$ تطبيق. يمكننا تعريف تطبيق متعدد القيم $\mathbb{T} : E \to \mathscr{C}(E)$ بواسطة:

$$\mathbb{T}u = \{Tu\}.$$

علاوة على ذلك، لدينا ما يلي:

$$H(\mathbb{T}u,\mathbb{T}v)=D(Tu,Tv);D(u,\mathbb{T}u)=D(u,Tu);D(v,\mathbb{T}v)=D(v,Tv);$$

$$D(u,\mathbb{T}v)=D(u,Tv);D(v,\mathbb{T}u)=D(v,Tu).$$

لذلك، يمكننا وضع المبرهنات التالية، والتي تم إثباتها أيضًا في ورقتنا البحثية [23].

مبرهنـة 6.3

[23] ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$، ولنفرض أنه يوجد تطبيق $T:E\longrightarrow E$ يحقق:

(3.11)

$$D(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu);$$

حيث: أحد الشرطين R_1 أو R_2 محقق.

لنرمز بـ: $\theta=\dfrac{a+b+s\lambda}{1-c-s\lambda}<1$ مع $\lambda=\min\{d,e\}$.

إذا كان T مستمراً أو كان $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$.

إذا كان أيضًا $a+d+e<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$.

مبرهنـة 7.3

[23] ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$، و $T:E\longrightarrow E$ تطبيق يحقق الشرط (3.11) لجميع $u,v\in E$، مع $a+b+c+s(d+e)=1$، حيث: $b+c\neq 0$ و $d+e\neq 0$.

إذا كان T مستمراً أو كان $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\neq\{u^*\}$.

برهان. باستخدام خاصية التناظر لـ b-مسافة D، نستنتج أن المتباينة (3.11) تؤدي إلى المتباينة التالية:

$$D(Tu,Tv)\leq aD(u,v)+\beta[D(u,Tu)+D(v,Tv)]+\gamma[D(u,Tv)+D(v,Tu)];$$

حيث $\beta=\dfrac{b+c}{2}$ و $\gamma=\dfrac{d+e}{2}$. بناءً على المبرهنة 2.3، نستنتج أن $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$. أما الوحدانية فتُستنتج مباشرة من $a+d+e<1$. □

مثـــال 1.3

لتكن $E=[0,2]$ مزودة بـ b-مسافة المعرفة بـ: $D(u,v)=(u-v)^2$ لجميع $u,v\in[0,2]$. الزوج (E,D) هو فضاء b-متري تام بثابت $s=2$. ليكن $T:E\to E$ التطبيق المعرف بـ:

$$Tu=\begin{cases}\dfrac{u}{2}, & u\neq 2\\ 0, & u=2\end{cases} \qquad (3.12)$$

أولاً، لنُبرهن أن T هو تقليص من نوع هاردي-روجرز مع $a=b=c=\frac{1}{4};\delta=L=0$. سنناقش فقط الحالة التي يكون فيها $Tu\neq Tv$، لأنه إذا كان $Tu=Tv$ فإن المتباينة (3.11) تكون محققة بداهة. لدينا من أجل كل $u\neq v$:

$$Tu\neq Tv \iff (u,v\in[0,2)\wedge u\neq v)\vee\big(u\in[0,2)\wedge y=v\big)\vee(v\in[0,2)\wedge u=2).$$

1. إذا كان $u,v\in[0,2)$، نجد:

$$D(Tu,Tv)=\frac{1}{4}(u-v)^2;\quad D(u,v)=(u-v)^2;\quad D(u,Tu)=\frac{1}{4}u^2;$$
$$D(v,Tv)=\frac{1}{4}v^2;\quad D(u,Tv)=\left(u-\frac{1}{2}v\right)^2;\quad D(v,Tu)=\left(v-\frac{1}{2}u\right)^2.$$

نلاحظ أنه:

$$D(Tu,Tv)\leq\frac{1}{4}D(u,v).$$

وعليه، فإن شرط التقليص محقق.

2. إذا كان $u\in[0,2)$ و $v=2$، فإننا نحصل أيضًا على:

$$D(Tu,Tv)=\frac{1}{4}u^2;\quad D(u,v)=(u-v)^2;\quad D(u,Tu)=\frac{1}{4}u^2;$$
$$D(v,Tv)=4;\quad D(u,Tv)=u^2;\quad D(v,Tu)=\left(2-\frac{1}{2}u\right)^2.$$

وعليه يكون:

$$D(Tu,Tv)\leq\frac{1}{4}D(v,Tv);$$

3. إذا كان $v\in[0,2)$ و $u=2$، فإننا نحصل على:

$$D(Tu,Tv)\leq\frac{1}{4}D(u,Tu);$$

مما يحقق شرط التقليص . إذن: تكون المتباينة (3.11) محققة لجميع $u,v\in E$، ونجد:

$$a+b+c+2sd=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1.$$

من الواضح أن T ليس مستمرًا. ومع ذلك، لدينا:

$$sb+s^2e=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<1;$$
$$a+d+e=\frac{1}{4}<1.$$

جميع شروط المبرهنة 2.3 محققة، وبالتالي فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$. بينما لا يمكن تطبيق كل المبرهنات [30, المبرهنة 13.3، المبرهنة 22.3، المبرهنة 26.3، المبرهنة 28.3]، لأن

$$a+b+c+2sd=a+b+c+2se=\frac{3}{4}>\frac{1}{s}=\frac{1}{2}.$$

3.3 التطبيقات F- تقليصية المعممة

باستعمال نتائجنا السابقة يمكن الحصول على نتائج متعلقة بالتطبيقات F-تقليصية المعممة.

مبرهنـة 8.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$. نفرض أنه توجد دالة $\tau:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ودالة متزايدة $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ بحيث أنه لجميع $u,v\in E$ مع $D(Tu,Tv)\neq 0$، لدينا:

(3.13)
$$\tau(D(u,v))+F(D(Tu,Tv))\leq F(aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu));$$

حيث يكون R_1 أو R_2 محققًا.

إذا كان T مستمرًا أو إذا تحقق أحد الشروط التالية: $sb+s^2e<1$ أو $sc+s^2d<1$، فإن $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$. علاوة على ذلك، إذا تحقق $a+d+e\leq 1$ فإن $\mathrm{Fix}(T)=\{u^*\}$.

برهان. بما أن: $\tau(D(u,v))>0$ و F دالة متزايدة، فإننا نحصل على

$$D(Tu,Tv)<aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu);\quad(3.14)$$

من أجل كل $u,v\in E$ حيث $D(Tu,Tv)>0$، وعليه يكون:

$$D(Tu,Tv)\le aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu).$$

بالتالي، فإن T هو تقليص معمم من نوع هاردي-روجرز. وفقًا للمبرهنة **2.3**، فإن $\mathbf{Fix}(T)\neq\emptyset$. نفرض أن $a+d+e\le 1$ محقق. باعتبار u^* و v^* عنصران من $\mathbf{Fix}(T)$، وبوضع $u=u^*$ و $v=v^*$ في (3.14)، نحصل على:

$$D(Tu^*,Tv^*)<aD(u^*,v^*)+bD(u^*,Tu^*)+cD(v^*,Tv^*)+dD(u^*,Tv^*)+eD(v^*,Tu^*).$$

ثم، نحصل على

$$(1-a-d-e)\,D(u^*,v^*)<0$$

إذا كان $D(u^*,v^*)\neq 0$ فإننا نحصل على $1<a+d+e$، وهذا شروط المبرهنة، وبالتالي نستنتج: $u^*=v^*$. وهو ما يدل على وحدانية النقطة الثابتة، مما ينهي البرهان. □

مبرهنـة 9.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\ge 1$، ودالة $\tau:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ودالة متزايدة $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ بحيث أنه لجميع $u,v\in E$ مع $D(Tu,Tv)>0$:

(3.15)

$$\tau(D(u,v))+F(sD(Tu,Tv))\le F\left(aD(u,v)+bD(u,Tu)+cD(v,Tv)+dD(u,Tv)+eD(v,Tu)\right);$$

حيث أحد الشرطين: $a+b+c+2sd<s$ أو $a+b+c+2se<s$ محقق.

إذا كان T مستمرًا أو إذا تحقق أحد الشروط التالية: $sb+s^2e<s$ أو $sc+s^2d<s$، فإن $\mathbf{Fix}(T)\neq\emptyset$. علاوة على ذلك، إذا تحقق $a+d+e\le s$ فإن $\mathbf{Fix}(T)=\{u^*\}$.

1.3.3 ملاحظة

[المقارنة مع نتائج التطبيقات F-تقليصية.] لنوضح أن شروط المبرهنة **2.3** و **3.3** أضعف من شروط المبرهنات [30, المبرهنة 13.3، المبرهنة 26.3] (المبرهنات **2.1** و **2.1**) عندما يكون $s>1$.

- أولًا، فرضنا أن F هي دالة متزايدة، وهي أضعف من فرض أن F هي دالة متزايدة تماما.
- الاستمرارية لـ F ليست ضرورية في مبرهنتنا.
- الشرط $\tau\in S_\omega$ غير ضروري في المبرهنة **3.3**.

- لدينا: (H_s^1) تستلزم (R_1) و (H_s^2) تستلزم (R_1)، لأن $\frac{1}{s} < 1$.
- الشروط الإضافية مثل $c \neq \frac{1}{s}$ و $b \neq \frac{1}{s}$ ليست ضرورية.
- من الشرط (H_s^1) نحصل على $c + sd = \frac{1}{s} - (a + b + sd)$ مع $a + b + sd \neq 0$.
إذا تحقق $a + b + sd = 0$، فإننا نحصل على $a = b = d = 0$ مما يعني أن $c = \frac{1}{s}$.
هذا يتناقض مع فرض أن $c \neq \frac{1}{s}$. ومن ثم نستنتج أن $c + sd < \frac{1}{s}$، أو بمعنى آخر $sc + s^2 d < 1$. وبالتالي، $(H_s^1) \Rightarrow sc + s^2 d < 1$. وبنفس الطريقة نحصل على: $(H_s^2) \Rightarrow sb + s^2 e < 1$. وبالتالي،

$$\left(\left(H_s^1\right) \vee \left(H_s^2\right) \right) \Longrightarrow \left[(R_1) \vee (R_2) \right] \wedge \left[\left(sc + s^2 d < 1\right) \vee \left(sb + s^2 e < 1\right) \right]$$

- الشرط $a+d+e < 1$ أضعف من $s^2 a + s^3 (d+e) \leq 1$، حيث لدينا $a+d+e < s^2 a + s^3 (d+e)$.
- لا يمكننا استنتاج تمديد لمبرهنة بناخ من أجل $s > 1$ من المبرهنات 2.1 و 2.1، لأنه إذا كانت $b = c = d = e = 0$، فإننا نحصل على $a = \frac{1}{s}$ وهو يتناقض مع الشرط الثاني $s^2 a \leq 1$.
- لا يمكننا استنتاج مبرهنة Chatterjea من المبرهنات 2.1 و 2.1 لما $s > 1$، لأنه إذا كانت $a = b = c = 0$، فإننا نحصل على $2sd = \frac{1}{s}$ أو $2se = \frac{1}{s}$ وعند دمج هذه الشروط مع الشرط $s^3 (d+e) \leq 1$، فإننا نحصل على $s \leq 1$، وهو يتناقض مع فرض أن $s > 1$.
- من ناحية أخرى، الشروط

$$\left[(R_1) \vee (R_2) \right] \wedge \left[\left(sc + s^2 d < 1\right) \vee \left(sb + s^2 e < 1\right) \vee (T \text{ مستمر}) \right]$$

للمبرهنة 2.3 و 3.3 تضمن أن $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$، في حين أن الشرط القوي $(H_s^1) \vee (H_s^2)$ في المبرهنات 2.1 و 2.1 (انظر المبرهنات [30, المبرهنة 13.3، المبرهنة 22.3، المبرهنة 26.3، المبرهنة 28.3]) لا يضمن أن $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. هذا يظهر فائدة أخرى للمبرهنة 3.3.

من هذه الملاحظات، نستنتج أن شروط المبرهنة 2.3 أضعف من الشروط الموضوعة في المبرهنات 2.1 و 2.1. علاوة على ذلك، نضمن أن $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ بشروط أضعف وأقل.

أخيرًا: يمكن القول أن المبرهنة 2.3 و 3.3 تمدد وتحسن المبرهنات 2.1 و 2.1 في حالة $s > 1$.

ملاحظة 2.3.3

[المقارنة مع نتائج التطبيقات F-تقليص الضعيف.] لنوضح أن المبرهنة 3.3 تحسن النتيجة [55, المبرهنة 2.5] (المبرهنة 2.1 في هذه الأطروحة).

1. من الشرط $a+b+c+(s+1)d<1$، نحصل على

$$d<\frac{1-\eta}{s+1};$$

ومن الشرط $a+b+c+2sd<s$، نستنتج

$$d<\frac{s-\eta}{2s};$$

حيث $\eta=a+b+c<1$. من الجهة الأخرى، لدينا

$$\frac{s-\eta}{2s}-\frac{1-\eta}{s+1}=\frac{s^2+(\eta-1)s-\eta}{2s(s+1)}>0;$$

وهذا يعني أن $\frac{1-\eta}{s+1}<\frac{s-\eta}{2s}$. ومن ثم، الشرط $a+b+c+(s+1)d<1$ يستلزم $a+b+c+2sd<s$. وبنفس الطريقة، نستنتج أن الشرط $a+b+c+(s+1)e<1$ يستلزم $a+b+c+2se<s$.

2. من الشرط $a+b+c+(s+1)d<1$، نحصل على $c+sd<1-a-b-d$. هذا يعني أن $sc+s^2d<s(1-a-b-d)<s$، لأن $1-a-b-d<1$. بنفس الطريقة، الشرط $a+b+c+(s+1)d<1$ يستلزم $sb+s^2e<1$.

وبالتالي، الشرط $a+b+c+(s+1)d<1$ يستلزم كلا من $a+b+c+2sd<s$ و $sc+s^2d<s$، والشرط $a+b+c+(s+1)e<1$ يستلزم كلا من $a+b+c+2se<s$ و $sb+s^2e<s$.

هذا يظهر أن الشروط في المبرهنة 2.3 أضعف من الشروط في المبرهنة 2.1.

مثـــال 1.3

لتكن $E=\{0,1,2\}$ مزودا بالمسافة $D(u,v)=(u-v)^2$. إذًا، فإنّ (E,D) هو فضاء b-متري تام بثابت $s=2$. نعرف $T:E\to E$ كما يلي: $T0=T1=0$ و $T2=1$. سنثبت أن T هو تطبيق غير موسع معمم مع $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$ و $\delta=L=\frac{1}{16}$.

1. إذا كان $u=0$ و $v=2$، فإن:

$$D(u,Tu)=0; \quad D(u,v)=4; \quad D(Tu,Tv)=1;$$
$$D(v,Tu)=4. \quad D(u,Tv)=1; \quad D(v,Tv)=1;$$

2. إذا كان $u=1$ و $v=2$، فإن

$$D(u,Tu)=1; \quad D(u,v)=1; \quad D(Tu,Tv)=1;$$
$$D(v,Tu)=4. \quad D(u,Tv)=0; \quad D(v,Tv)=1;$$

من خلال إجراء حسابات بسيطة، نلاحظ أن المتباينة (3.11) تتحقق لجميع $u,v\in E$. علاوة على ذلك، لدينا $b+c\neq 0$ و $d+e\neq 0$ وأن

$$a+b+c+s(d+e)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=1.$$

وبما أن T مستمر، فإنه يملك نقطة ثابتة وحيدة، وهي $u=0$. بحساب بسيط يمكن التأكد من أن الشرطين (H_s^1) و (H_s^2) غير محققين. لذا، لا يمكن تطبيق المبرهنات 2.1 و 2.1 (انظر [30, المبرهنة 13.3، المبرهنة 22.3، المبرهنة 26.3، المبرهنة 8.3]).

4.3 مبرهنات نقاط التطابق

نقدم في هذا القسم مبرهناتحول نقاط التطابق لتطبيقين يحققان نوع خاص من الشروط التقليصية.

مبرهنـة 10.3

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$، و $T,S:E\to E$ تطبيقان يحققان الشروط التالية:

(C_1) $T(E)\subseteq S(E)$ و $S(E)$ مجموعة مغلقة.

(C_2) من أجل كل $u,v\in E$

$$D(Tu,Tv)\le aD(Su,Sv)+bD(Su,Tu)+cD(Sv,Tv)+dD(Su,Tv)+eD(Sv,Tu),$$

حيث a,b,c,d,e أعداد حقيقية موجبة تحقق شروط المبرهنة 2.3 أو شروط المبرهنة 2.3.

إذن: يوجد على الأقل نقطة تطابق لـ T و S. إذا تحقق $a+d+e<1$، فإن نقطة التلاقي لـ T و S وحيدة، وإذا كانت T و S متوافقين ضعيفًا، فإن نقطة التلاقي هي النقطة الثابتة الوحيدة المشتركة لـ T و S.

برهان. أولاً نلاحظ أن $(S^{-1}(\{w\}))_{w\in S(E)}$ هي عائلة من المجموعات غير الخالية، باستخدام مسلمة الاختيار، يوجد مجموعة $X\subseteq E$ بحيث $S(X)=S(E)$، ويكون تطبيق $S:X\to S(E)$ تطبيقًا تقابليا.

نُعرف تطبيقًا جديدًا $G:S(X)\to S(X)$ على النحو التالي:

$$\forall w\in S(X):Gw=T(S^{-1}w).$$

لاحظ أن G معرف بشكل جيد لأن $T(E)\subseteq S(E)=S(X)$.

من الشرط (C_2) نحصل على أنه لجميع $z,w\in S(X)$:

$$\begin{aligned}D(Gz,Gw)&=D\left(T(S^{-1}z),T(S^{-1}w)\right)\\&\le aD(SS^{-1}z,SS^{-1}w)+bD(SS^{-1}z,TS^{-1}z)+cD(SS^{-1}w,TS^{-1}w)\\&\quad+dD(SS^{-1}z,TS^{-1}w)+eD(SS^{-1}w,TS^{-1}z)\\&\le aD(z,w)+bD(z,Gz)+cD(w,Gw)+dD(z,Gw)+eD(w,Gz).\end{aligned}$$

وعليه يكون G تقليصا معمما أو يكون تطبيقا غير موسع معمم، بتطبيق أحد المبرهنتين 2.3 أو 2.3، نستنتج أن: $\mathrm{Fix}(G)\neq\emptyset$.

ليكن $\zeta\in\mathrm{Fix}(G)$، لدينا: $G\zeta=\zeta$ مما يعني أن: $T(S^{-1}\zeta)=\zeta$. من ناحية أخرى، بما أن $\mathrm{Fix}(G)\subseteq S(X)$، فإنه يوجد $u^*\in X$ بحيث $\zeta=Su^*$. وبالتالي نستنتج أن:

$$T(S^{-1}\zeta)=\zeta\implies T(S^{-1}Su^*)=Su^*\implies Tu^*=Su^*.$$

وهذا يعني أن جميع النقاط الثابتة لـ G هي نقاط تطابق لـ T و S.

نفرض أن الشرط $a+d+e<1$ محقق، و $z_1,z_2\in E$ هما نقطتا تلاق لـ T و S، أي أنه يوجد $u^*,v^*\in E$ بحيث: $z_1=Tu^*=Su^*$ و $z_2=Tv^*=Sv^*$. باستخدام (C_2) مع $u=u^*$ و

$v = v^*$ نحصل على:

$$D(Tu^*, Tu^*) \le aD(Su^*, Sv^*) + bD(Su^*, Tu^*) + cD(Sv^*, Tv^*) + dD(Su^*, Tv^*) + eD(Sv^*, Tu^*).$$

ثم نحصل على:

$$D(Tu^*, Sv^*) \le aD(Tu^*, Sv^*) + dD(Tu^*, Tv^*) + eD(Sv^*, Tu^*).$$

مما يعني أن:

$$(1 - a - d - e)D(Tu^*, Sv^*) \le 0,$$

وتتحقق هذه المتباينة فقط إذا كانت $D(Tu^*, Sv^*) = 0$، وبالتالي $Tu^* = Sv^*$ مما يعني أن $z_1 = z_2$.

نفرض أن T و S متوافقتين ضعيفًا، و $w \in E$ هي نقطة تلاق لـ T و S، إذن يوجد $u^* \in E$ بحيث:

$$Tu^* = Su^* = w \Longrightarrow TSu^* = Tw \quad \text{و} \quad STu^* = Sw \Longrightarrow Sw = Tw.$$

ثم w هي أيضًا نقطة تلاق لـ T و S، وبالتالي نحصل على:

$$Sw = Tw = Tu^* = Su^* = w.$$

وهذا يعني أن w هي النقطة الثابتة الوحيدة المشتركة بين T و S. □

بوضع $b = c = d = e = 0$، نحصل على النتيجة الشهيرة التالية.

نتيـجة 1.3

ليكن (E, D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \ge 1$. لنفرض وجود تطبيقين $T, S : E \to E$ يُحققان الشرط (C_1)، وأنه لجميع $u, v \in E$ يتحقق:

$$D(Tu, Tv) \le aD(Su, Sv), \qquad (3.16)$$

حيث $a < 1$.

إذًا: يوجد نقطة تطابق وحيدة للتطبيقين T وS. وإذا كان T وS متوافقين بشكل ضعيف، فإن نقطة التطابق هذه هي النقطة الثابتة المشتركة الوحيدة لـ T وS.

لما $T = I$ نحصل على المبرهنة التالية، التي تستعمل شرط توسيع معمم. نلاحظ أنه لما $T = I$ فإن الشرط (C_1) يصبح: $E \subseteq S(E)$ والذي يعني أن S تطبيق غامر. كذلك التطبيقان I و S متوافقان ضعيفا.

مبرهنة 11.3

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$. لنفرض وجود تطبيق غامر $S : E \to E$ حيث من أجل كل $u, v \in E$ يتحقق:

(3.17)

$$D(u,v) \leq aD(Su,Sv) + bD(Su,u) + cD(Sv,v) + dD(Su,v) + eD(Sv,u),$$

حيث a,b,c,d,e أعداد حقيقية موجبة تحقق شروط المبرهنة 2.3 أو شروط المبرهنة 2.3.
إذًا: يوجد نقطة ثابتة على الأقل لـ S. وإذا تحقق $a+d+e<1$، فإن النقطة الثابتة وحيدة.

لما $b=c=d=e=0$ و $0<a<1$ نجد النتيجة التالية الشهيرة، التي تضمن وجود نقطة ثابتة وحيدة للتطبيقات الموسعة.

نتيجة 2.3

ليكن (E,D) فضاءً b-متريًا تاما بثابت $s \geq 1$. لنفرض وجود تطبيق $S : E \to E$ غامر يحقق من أجل كل $u, v \in E$:

$$k \times D(u,v) \leq D(Su,Sv), \qquad (3.18)$$

حيث $k>1$.
إذًا: يوجد نقطة ثابتة وحيدة للتطبيق S.

ملاحظة 1.4.3

إن استعمال المبرهنة 4.3 مناسب عند دراسة مسألة نقطة التطابق $Tu = Su$، كما أننا نحتاج إلى خواص توافق إضافية للتطبيقين زائدة عن الشرط التقليصي الذي لابد أن يحققه التطبيقين. أما مبرهنات النقاط الثابتة للفصل الثاني فهي مناسبة لدراسة مسائل النقطة الثابتة المشتركة، أو ما يكافئ دراسة جملة المعادلتين: $Tu = u$ و $Su = u$ والتي تعتبر حالة خاصة من مسألة نقطة التطابق. الإيجابية لنتائج الفصل الثاني أننا لا نحتاج أي شروط توافق بين التطبيقين ولا مغلوقية $T(E)$ أو $S(E)$.
من ناحية أخرى، في مبرهنات النقاط الثابتة المشتركة لدينا طريقة لبناء متتالية تتقارب نحو النقطة الثابتة المشتركة، كما يمكن تقدير خطأ التقارب للمتتالية. أما في مبرهنة نقطة التطابق، فطريقة بناء المتتالية التي تتقارب نحو نقطة التطابق غير عملية، فإن المتتالية التي نستعملها هي المعرفة بـ: $u_{n+1} = Gu_n$ التي تؤول إلى العبارة: $u_{n+1} = T(S^{-1}u_n)$

. عمليا: بناء هذه المتتالية يتم عبر حل المعادلة $u_n = Sv_n$ ثم حساب $u_{n+1} = Tv_n$.
حل المعادلة $u_n = Sv_n$ قد يكون صعبا عامة، أو غير ممكنا في بعض الحالات.

الفصل 4

تطبيقات

1.4 استقرار أولام-هايرز Ulam-Hyers لمسألة النقطة الثابتة

تعريف 1.4 [78]

ليكن (E,D) فضاء b-متريا بثابت $s \geq 1$، وتطبيق $T : E \to E$. نقول أن مسألة النقطة الثابتة

$$u = Tu; \tag{4.1}$$

مستقرة مستقرة بمفهوم أولام-هايرز *Ulam-Hyers* إذا وُجد ثابت $c_T > 0$ بحيث: لكل $\varepsilon > 0$ ولكل حل v^* للمتراجحة

$$D(v, Tv) \leq \varepsilon; \tag{4.2}$$

يوجد حل u^* لـ (4.1) يحقق:

$$D(u^*, v^*) \leq c_T \varepsilon. \tag{4.3}$$

تعريف 2.4[78 ,77]

مسألة النقطة الثابتة (4.1) مستقرة محليا بمفهوم أولام-هايرز إذا وُجد ثابت $c_T > 0$ و $\varepsilon_0 > 0$ يحقق: لكل $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$، ولكل حل v^* للمتراجحة (4.2)، يوجد حل u^* لـ (4.1) يحقق:

$$D(u^*, v^*) \leq c_T \varepsilon. \qquad (4.4)$$

نلاحظ أن الاستقرار بمفهوم أولام-هايرز لمسألة النقطة الثابتة يعتمد أيضًا على المسافة D.

مثـــال 1.4

لنعتبر مسألة النقطة الثابتة التالية

$$u = Tu; \qquad (4.5)$$

حيث $Tu = \frac{1}{2}\sin(u)$. لنأخذ $E = \mathbb{R}$ مع المسافة b-المترية $D_p(u,v) = |u-v|^p$، حيث $p \geq 1$. وبالتالي، فإن T هو تقليص مع $a = \frac{1}{2^p}$، والحل الوحيد لـ (4.5) هو $u^* = 0$. لنأخذ $\varepsilon > 0$، و v^* حل للمتراجحة:

$$|v - \frac{1}{2}\sin(v)|^p \leq \varepsilon;$$

لدينا

$$\begin{aligned} D_p(u^*, v^*) &= |v^*|^p \\ &\leq 2^{p-1}|v^* - \frac{1}{2}\sin(v^*)|^p + 2^{p-1}|\frac{1}{2}\sin(v^*)|^p \\ &\leq 2^{p-1}\varepsilon + 2^{p-1}\frac{1}{2^p}|v^*|^p \\ &= 2^{p-1}\varepsilon + \frac{1}{2}|v^*|^p. \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على $D_p(u^*, v^*) \leq 2^{p-2}\varepsilon$. مما يعني أنه يوجد ثابت $c_T = 2^{p-2}$ يحقق التعريف 1.4.

تعريف 3.4[25]

لتكن (E,D) فضاء b-متري و $T:E\longrightarrow \mathscr{C}(E)$ تطبيقًا متعدد القيم. يُطلق على مسألة النقطة الثابتة

$$x\in Tx,\quad x\in E \qquad \text{I}$$

أنها مستقرة بمفهوم أولام-هايرز إذا وُجد $c>0$ بحيث أنه لكل $\varepsilon>0$ ولكل حل $y^*\in E$ للمتراجحة

$$D(y,Ty)\leq \varepsilon, \qquad \text{II}$$

يوجد حل x^* لمسألة النقطة الثابتة I يحقق: $D(x^*,y^*)\leq c\varepsilon$.

يسمى الحل $y^*\in E$ لـ II بـ: ε–حل لمسألة النقطة الثابتة I.

المبرهنة التالية تعطي شروطا عامة حول مسألة الاستقرار بمفهوم أولام-هايرز، لا نستعمل فيها قُربية قيم التطبيق.

مبرهنـة 1.4

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$ و $T:E\to \mathscr{C}(E)$ تطبيق C-بيكار ضعيف.
إذن مسألة النقطة الثابتة I مستقرة بمفهوم أولام-هايرز.

برهان. ليكن $\varepsilon>0$، و v^* هو ε-حل لمسألة النقطة الثابتة I. حسب تعريف الحد الأدنى، يوجد $w\in Tv^*$ حيث:

$$D(v^*,w)\leq 2D(v^*,Tv^*).$$

وبما أن T هو تطبيق C-بيكار ضعيف، فإنه يوجد دالة اختيار $f^*:G(T)\to Fix(T)$ لـ T^∞ بحيث:

$$D(u,f^*(u,v))\leq CD(u,v).$$

بأخذ: $u^*=f^*(v^*,w)\in \mathrm{Fix}(T)$ لأن: $(v^*,w)\in G(T)$. وعليه u^* يحقق:

$$D(v^*,u^*)\leq CD(v^*,w)\leq 2CD(v^*,Tv^*)\leq 2C\varepsilon.$$

إذن، مسألة النقطة الثابتة I هي مستقرة بمفهوم أولام-هايرز مع ثابت $c=2C$. وهذا ينهي البرهان. □

ملاحظة 1.1.4

توفر هذه المبرهنة إجابة على السؤال المفتوح الذي طُرح في الورقة [71] حول إمكانية إثبات الاستقرار بمفهوم أولام-هايرز لمسألة النقطة الثابتة I دون افتراض قُربية القيم التي يأخذها T. بالإضافة إلى ذلك، نكتفي بافتراض أن T قيمه مغلقة، وهو شرط أقل تقييدًا من الحاجة إلى بيان مغلق. باختصار، توفر المبرهنة 1.4 إجابة لهذا السؤال المفتوح في الإطار العام للفضاءات b-المتريّة وتحت شروط ضعيفة.

بما أن التطبيقات متعددة القيم التي تحقق شروط المَبرهنة 1.3 أو المبرهنة 2.3 هي تطبيقات C-بيكار ضعيفة، فإنه يمكننا تقديم النتيجة التالية.

مبرهنـة 2.4

ليكن (E,D) فضاء b-متريا تاما بثابت $s\geq 1$ و $T:E\to\mathscr{C}(E)$ تطبيق متعدد القيم يحقق شروط المبرهنة 1.3 أو المبرهنة 2.3. إذن مسألة النقطة الثابتة I مستقرة بمفهوم أولام-هايرز.

ملاحظة 2.1.4

المبرهنة 1.4 يقدم لنا برهانا لـ [25, المبرهنة 2.4] في حالة: $b=c=\beta$، $d=e=\gamma$ وأيضًا بتحسينها، وذلك بعدم وضع الشرط الإضافي $SFix(T)\neq\emptyset$. في الواقع، [25, المبرهنة 2.4] يتطلب هذا الشرط الإضافي إلى جانب الشروط الاعتيادية $(F_1)-(F_3)$ المذكورة في المبرهنة 4.1. هذا يظهر أن المبرهنة 1.4 قابلة للتطبيق بشكل أوسع.

مثـــال 2.4

لنعتبر المجموعة $E=[0,1]\times[0,1]$. لكل $U_1=(u_1,v_1)\in E$ و $U_2=(u_2,v_2)\in E$، نعرّف الفضاء متري-b $D(U_1,U_2)=|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2$. إذاً، فإن (E,D) هو فضاء متري-b تام بثابت $s=2$. نعتبر عائلة التطبيقات متعددة القيم $T_{\eta,\mu}:E\longrightarrow\mathscr{C}(E)$ المعرّفة بالشكل $T_{\eta,\mu}U=[0,1]\times[\sin(\eta v),\sin(\mu v)]$، لكل $U=(u,v)$، حيث $0\leq\eta\leq\mu<1$.
لكل $U_1=(u_1,v_1)\in E$، $U_2=(u_2,v_2)\in E$ و $(a,b)\in T_{\eta,\mu}U_1$، يمكننا ملاحظة أن:

$$D((a,b),T_{\eta,\mu}U_2)=\inf_{(x,y)\in T_{\eta,\mu}X_2}D\big((a,b),(x,y)\big)=\inf_{(x,y)\in T_{\eta,\mu}X_2}|b-y|^2.$$

نحصل على:

$$H(T_{\eta,\mu}U_1, T_{\eta,\mu}U_2) = \max\left\{|\sin(\eta v_1) - \sin(\eta v_2)|^2, |\sin(\mu v_1) - \sin(\mu v_2)|^2\right\}.$$

بناءً على مبرهنة القيم المتوسطة، نحصل على:

$$H(T_{\eta,\mu}U_1, T_{\eta,\mu}U_2) \leq \mu^2|v_1 - v_2|^2 \leq \mu^2 D(U_1, U_2).$$

لذلك، فإن $T_{\eta,\mu}$ هي تقليصات معممة بالنسبة إلى D حيث $a = \mu^2 < 1$ و $b = c = d = 0$. بما أن $\mu < 1$، فإنه من خلال المبرهنة 2.2 نستنتج أن $T_{\eta,\mu}$ تملك على الأقل نقطة ثابتة.

مثل المثال السابق، لا يمكن تطبيق المبرهنتان 4.1 و4.1 لما $\mu \in \left[\frac{1}{4}, 1\right[$. يجدر الإشارة إلى أنه من تعريف التطبيقات $T_{\eta,\mu}$، لدينا $SFix(T_{\eta,\mu}) = \emptyset$ و $Fix(T_{\eta,\mu}) = \{(0,0)\}$ لكل $\eta, \mu \in [0,1[$ بحيث $0 \leq \eta \leq \mu$.

من ناحية أخرى، لا يمكننا تطبيق ([25, 2.4 Theorem]) لأن الشرط المطلوب $SFix(T_{\eta,\mu}) \neq \emptyset$ غير متحقق.

2.4 المعادلات الدالية للبرمجة الديناميكية

في البرمجة الديناميكية للعمليات المتعددة المراحل المستمرة، يتم وصف سلوك النظام بدالة العائد $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ للعملية المستمرة، والمعطاة بواسطة المعادلة الدالية المعروفة التالية (انظر [11]):

$$u(x) = \sup_{y \in M}\left[f(x,y) + G(x,y,u(\varphi(x,y)))\right], \quad \forall x \in S, \qquad (4.6)$$

حيث أن $\varphi : S \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ تُسمى تحويل العملية، و $f : S \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ و $G : S \times M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هي تطبيقات معرفة جيدًا، حيث $S \subset X$ هو فضاء الحالات و $M \subset Y$ هو فضاء القرارات، و X و Y فضاءان بناخ.

ليكن $(\mathbb{B}(S), D)$ فضاء الدوال الحقيقية المحدودة المعرفة على S، المزود بالمتري D المعرف لكل $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{B}(S)$ كما يلي:

$$D(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{x \in S}|\Phi_1(x) - \Phi_2(x)|^p;$$

حيث p عدد صحيح يحقق: $p \geq 2$.

وعليه، فإن $(\mathbb{B}(S), D)$ هو فضاء b-متري تام بمعامل $s = 2^{p-1} \geq 2$، حيث إن أي متتالية كوشية (z_n) في $Z = \mathbb{B}(S)$ تتقارب بانتظام إلى دالة محدودة z^*. ومن ثم، نفترض أن f و G محدودتان.

وبالتالي، فإن المؤثر $T:\mathbb{B}(S)\longrightarrow\mathbb{B}(S)$ معرف لكل $\Phi\in\mathbb{B}(S)$ كما يلي:

$$T\Phi(x)=(T\Phi)(x)=\sup_{y\in D}\left[f(x,y)+G\left(x,y,\Phi(\varphi(x,y))\right)\right],\quad \forall x\in S,$$

وهو مؤثر معرف جيدًا.

مبرهنــة 3.4

لنأخذ الفضاء b-المتري التام $(\mathbb{B}(S),D)$، ولنفرض أنه لكل $\Phi_1,\Phi_2\in\mathbb{B}(S)$ و$x,t\in S$ و$y\in D$، لدينا:

$$|G\left(x,y,\Phi_1(t)\right)-G\left(x,y,\Phi_2(t)\right)|\leq\eta N(\Phi_1,\Phi_2),\qquad (4.7)$$

حيث إن:

$$N(\Phi_1,\Phi_2)=\left[D(\Phi_1,T\Phi_1)+D(\Phi_2,T\Phi_2)\right]^{\frac{1}{p}},$$

و$\eta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$. إذًا، فإن المعادلة الدالية (4.6) لها حل وحيد محدود.

برهان. لنفرض $x\in S$، وأن θ عدد موجب تماما، و $\Phi_1,\Phi_2\in\mathbb{B}(S)$. يمكننا اختيار y_1,y_2 من D بحيث:

$$T\Phi_1(x)<f(x,y_1)+G\left(x,y_1,\Phi_1(\varphi(x,y_1))\right)+\theta\qquad (4.8)$$

و

$$T\Phi_2(x)<f(x,y_2)+G\left(x,y_2,\Phi_2(\varphi(x,y_2))\right)+\theta.\qquad (4.9)$$

كما نعلم من تعريف T التقديرات التالية:

$$T\Phi_1(x)>f(x,y_2)+G\left(x,y_2,\Phi_1(\varphi(x,y_2))\right),\qquad (4.10)$$

و

$$T\Phi_2(x)>f(x,y_1)+G\left(x,y_1,\Phi_2(\varphi(x,y_1))\right).\qquad (4.11)$$

بناءً على (4.8) و(4.11)، نحصل على:

$$\begin{aligned}T\Phi_1(x)-T\Phi_2(x)&<G\left(x,y_1,\Phi_1(\varphi(x,y_1))\right)-G\left(x,y_1,\Phi_2(\varphi(x,y_1))\right)+\theta\\&<|G\left(x,y_1,\Phi_1(\varphi(x,y_1))\right)-G\left(x,y_1,\Phi_2(\varphi(x,y_1))\right)|+\theta\\&<\eta N(\Phi_1,\Phi_2)+\theta.\end{aligned}\qquad (4.12)$$

وبطريقة مشابهة، باستخدام (4.9) و(4.10)، نحصل على:

$$T\Phi_2(x) - T\Phi_1(x) < \eta N(\Phi_1, \Phi_2) + \theta. \qquad (4.13)$$

وبالتالي، من خلال الجمع بين المتراجحتين (4.12) و(4.13)، نحصل على:

$$|T\Phi_2(x) - T\Phi_1(x)| < \eta N(\Phi_1, \Phi_2) + \theta. \qquad (4.14)$$

وباستخدام متراجحة جيمسون، نحصل على:

$$|T\Phi_2(x) - T\Phi_1(x)|^p < 2^{p-1}\eta^p \left[N(\Phi_1, \Phi_2)\right]^p + 2^{p-1}\theta^p. \qquad (4.15)$$

بما أن (4.15) صحيحة لكل $x \in S$، نستنتج

$$D(T\Phi_2, T\Phi_1) < 2^{p-1}\eta^p \left[N(\Phi_1, \Phi_2)\right]^p + 2^{p-1}\theta^p. \qquad (4.16)$$

ونظراً لأن θ اختيارية، وبالاعتماد على (4.16)، نستنتج

$$D(T\Phi_2, T\Phi_1) < 2^{p-1}\eta^p \left[N(\Phi_1, \Phi_2)\right]^p = 2^{p-1}\eta^p \left[D(\Phi_1, T\Phi_1) + D(\Phi_2, T\Phi_2)\right].$$

وبالتالي، يتم تحقق شرط تقليص هاردي-روجرز (3.11) مع $\alpha = \delta = L = 0$ و $\beta = \gamma =$ $2^{p-1}\eta^p$. علاوة على ذلك، لدينا $\alpha + \beta + \gamma + 2sL = \beta + \gamma = (2\eta)^p < 1$، حيث أن $\eta < \frac{1}{2}$. وبناءً على ذلك، فإن T يمتلك حلاً وحيدًا محدودًا على S.

□

ملاحظة 1.2.4

في المرجع [30] تم إثبات نفس النتيجة تحت الشرط

$$|G(x, y, \Phi_1(t)) - G(x, y, \Phi_2(t))| \leq \Psi(\chi_p(\Phi_1, \Phi_2)), \qquad (4.17)$$

حيث $x, t \in S$، مع $y \in D$

$$\chi_p(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{2^p}\left[D(\Phi_1, T\Phi_1) + D(\Phi_2, T\Phi_2)\right]^{\frac{1}{p}},$$

و$\Psi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ معرّفة كما يلي:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \dfrac{(3t)^{\frac{1}{p}}}{2^{1+\frac{3}{p}}}, & < t \leq 1; \\ \dfrac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}}, & t > 1. \end{cases}$$

بالتالي، من السهل ملاحظة أن الشرط المقابل (4.7) أضعف من (4.17)، حيث أن

$$\Psi(t) \leq \max\left(\frac{(3)^{\frac{1}{p}}}{2^{1+\frac{3}{p}}}, \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}}\right) < 1.$$

أخيرًا، نشير إلى أن المؤلفين في [30] احتاجوا إلى حسابات طويلة خاصة لإظهار تحقق الشروط التقييدية في [30, المبرهنة 28.3] (تم إجراء الحسابات عبر الصفحات 34 إلى 38). بينما، الشرط (4.7) الذي هو أضعف من (4.17)، يوفر أيضًا حسابات أكثر مرونة مع شروط قابلة للتحقق بسهولة كما يظهر في هذا المثال.

3.4 المعادلات التكاملية-تفاضلية

الكثير من المعادلات الرياضية يمكن إعادة صياغتها على شكل معادلة تكاملية، أو يمكن دمجها مع المعادلات التفاضلية، لتُعطينا معادلات تظهر فيها مؤثرات تكاملية وتفاضلية معا، نسمي هذا النوع من المعادلات بـ: المعادلات تفاضلية-تكاملية، أو أحيانا المعادلات تكا-تفاضلية اشتقاقا من التسمية الأجنبية: Integro-dfierrential.

لتكن المسألة التالية:

$$u'(t) = g(t) + \int_0^t f(s,t,u(s))\,ds, \quad t \in [0,A]; \tag{4.18}$$

$$u(0) = u_o \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

حيث $A > 0$ و:

1. $u : [0,A] \to \mathbb{R}$ هي الدالة المجهولة.
2. $f : \Delta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : [0,A] \to \mathbb{R}$ دوال معطاة، حيث:

$$\Delta = \left\{(s,t) \in [0,A]^2 \mid 0 \leq s \leq t\right\}.$$

يمكن معالجة هذه المسألة على شكل ممسألة نقطة تطابق: $Tu = Su$ حيث $Tu = u'$ و S هو مؤثر التكامل الظاهر في الطرف الأيمن للمعادلة، لكن المشكلة تكمن في أن T لا ينقل الفضاء C^1 إلى نفسه، وعليه يمكن تطبيق المبرهنات مباشرة.

لأجل هذا يمكننا تحويلها إلى مسألة نقطة ثابتة، ونتحصل على النتيجة التالية:

لتكن g دالة مستمرة، ونختار الدالة f بحيث تكون الدالة:

$$t \to \int_0^t f(s,t,u(s))\,ds,$$

معرفة ومستمرة كلما كانت u مستمرة.
نفرض أنه توجد دالة موجبة $K:\Delta \to \mathbb{R}$ تحقق الشروط:
(K_1)

$$|f(s,t,v_1)-f(s,t,v_2)| \le K(s,t)|v_1-v_2|; \qquad (4.20)$$

من أجل كل (s,t)
من Δ وكل v_1 و v_2 من $\mathbb{R}$.
(K_2) يوجد $q>1$ حيث:

$$M = \sup_{0\le t\le A}\int_0^t [K(s,t)]^q\,ds < \infty.$$

إذن يوجد للمسألة (4.18) حل وحيد في الفضاء $C^1([0,A])$.

برهان. ليكن الفضاء $C^1([0,A])$ مزود بـ b-مسافة المعرفة كما يلي:

$$D_p(u_1,v_2) = \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s}|v_1(s)-v_2(s)|^p + \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s}|v_1'(s)-v_2'(s)|^p;$$

حيث $p\ge 1$ هو مرافق العدد q، أي الذي يحقق: $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ ، و $\alpha>0$. يمكن التأكد بسهولة أن $(C^1([0,A]),D_p)$ فضاء b-متري تام بثابت: $s=2^{p-1}$.
الآن نعرف المجموعة E كالتالي:

$$E=\left\{v\in C^1([0,A]) \mid u(0)=u_0\right\}.$$

عندئذ نلاحظ أن E مجموعة مغلقة من $C^1([0,A])$، وعليه فإن الثنائية (E,D_p) فضاء b-متري تام بثابت: $s=2^{p-1}$.
من أجل كل v من E، المسألة ذات المجهول u التالية:

$$u'(t) = g(t)+\int_0^t f(s,t,v(s))\,ds, \quad t\in(0,A]; \qquad (4.21)$$

$$u(0)=u_0\in\mathbb{R}. \qquad (4.22)$$

هي مسألة ايجاد دالة أصلية للدالة المعرفة بـ:

$$t \to g(t) + \int_0^t f(s,t,v(s))\,ds, \quad t \in [0,A]$$

والتي تحقق الشرط الابتدائي: $u(0) = u_o$. ومعلوم أن هذه المسألة تقبل حلا وحيدا u قابل للاشتقاق ذو مشتقة مستمرة. وعليه يمكن تعريف تطبيق: $T : E \to E$ والذي يرفق بكل v من E الحل الوحيد u لمسألة الدالة الأصلية. أي: $Tv = u$.

التطبيق T معرف جيدا، لأن $u(0) = u_0$. لنبرهن ان T يحقق شرطا تقليصيا.

من أجل كل v_1 و v_2 من E نضع: $Tv_1 = u_1$ و $Tv_2 = u_2$.

وعليه يكون لدينا: $D_p(Tv_1, Tv_2) = D_p(u_1, u_2)$.

من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} |u_1'(t) - u_2'(t)| &\le \int_0^t |f(s,t,v_1(s)) - f(s,t,v_2(s))|ds \\ &\le \int_0^t K(s,t)|v_1(s) - v_2(s)|ds \\ &\le \left[\int_0^t K^q(s,t)ds\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

وعليه نجد:

$$\begin{aligned} |u_1'(t) - u_2'(t)|^p &\le M^{\frac{p}{q}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|^p ds \\ &= M^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{\alpha s} e^{-\alpha s} |v_1(s) - v_2(s)|^p ds \\ &\le M^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{\alpha s} ds \max_{0 \le t \le A} e^{-\alpha s} |v_1(s) - v_2(s)|^p \\ &= M^{\frac{p}{q}} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \max_{0 \le t \le A} e^{-\alpha s} |v_1(s) - v_2(s)|^p. \end{aligned}$$

إذن نتحصل على المتباينة التالية:

$$\max_{0 \le t \le A} e^{-\alpha t} |u_1'(s) - u_2'(s)|^p \le M^{\frac{p}{q}} \frac{1 - e^{-\alpha A}}{\alpha} \max_{0 \le t \le A} e^{-\alpha s} |v_1(s) - v_2(s)|^p. \quad (I)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$u_1(t) = u_0 + \int_0^t u_1'(s)ds, \quad u_2(t) = u_0 + \int_0^t u_2'(s)ds.$$

وعليه نحصل على:

$$\begin{aligned}|u_1(t)-u_2(t)| &\le \int_0^t |u_1'(s)-u_1'(s)|ds \\ &\le \left[\int_0^t ds\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^t |u_1'(s)-u_1'(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= t^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^t |u_1'(s)-u_1'(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

وعليه نجد:

$$\begin{aligned}|u_1(t)-u_2(t)|^p &\le t^{\frac{p}{q}} \int_0^t |u_1'(s)-u_1'(s)|^p ds \\ &= t^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{\alpha s} e^{-\alpha s} |u_1'(s)-u_1'(s)|^p ds \\ &\le t^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{\alpha s} ds \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s} |u_1'(s)-u_2'(s)|^p \\ &\le A^{\frac{p}{q}} \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s} |u_1'(s)-u_2'(s)|^p.\end{aligned}$$

ومنه نستنتج المتباينة التالية:

$$\max_{0\le t\le A} e^{-\alpha t}|u_1(t)-u_2(t)|^p \le A^{\frac{p}{q}} \frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha} \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s}|u_1'(s)-u_2'(s)|^p. \quad (II)$$

من (I) و (II) نستنتج ما يلي:

$$\begin{aligned}D_p(Tv_1,Tv_2) &= D_p(u_1,u_2) \\ &= \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha t}|u_1(t)-u_2(t)|^p + \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha t}|u_1'(t)-u_2'(t)|^p \\ &\le \left(1+A^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}\right) \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha t}|u_1'(t)-u_2'(t)|^p \\ &\le \left(1+A^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}\right) M^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha} \max_{0\le t\le A} e^{-\alpha s}|v_1(s)-v_2(s)|^p \\ &\le \left(1+A^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}\right) M^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha} D_p(v_1,v_2).\end{aligned}$$

وهذا يعني أن T ليبشيتزي بثابت ليبشيتز مُعطى كما يلي:

$$a(\alpha) = \left(1+A^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}\right) M^{\frac{p}{q}}\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha},$$

وهو ثابت يتبع قيمة α. نلاحظ أن

$$\lim_{\alpha \to +\infty} a(\alpha) = 0,$$

إذن نختار قيمة α بحيث يكون $a(\alpha) < 1$ عندئذ يكون T تقليصا، إذن فهو يملك نقطة ثابتة وحيدة u^* في E. أي إن $Tu = u$ والذي يكافئ أن u^* هو حل المسألة (4.18) .

□

ملاحظة 1.3.4

إذا كان الدالة k مستمرة على Δ فإن الشرط (k_2) محقق تلقائيا.
كذلك في حالة f مستمرة على $\Delta \times \mathbb{R}$ ، ستكون الدالة

$$t \to g(t) + \int_0^t f(s,t,v(s))\,ds,$$

مستمرة أيضا، وهو ما يضمن شرط المبرهنة السابقة.

مثـــال 1.4

نعتبر المعادلة التكاملية-تفاضلية التالية:

$$u'(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s)\,ds, \quad t \in [0,A] \qquad (4.23)$$

حيث $\beta \geq 1$، و g دالة مستمرة معطاة، والدالة غاما $\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ معرفة كما يلي:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x}\,dx.$$

نلاحظ أنه لدينا:

$$f(s,t,v) = (t-s)^{\beta-1} v;$$

وهي دالة مستمرة على مجموعة تعريفها، إذن شرط استمرارية الدالة:

$$t \to g(t) + \int_0^t f(s,t,v(s))\,ds,$$

محقق مباشرة.
كما نلاحظ أن من أجل كل (s,t) من Δ وكل v_1 و v_2 من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$|f(s,t,v_1) - f(s,t,v_2)| \leq K(s,t)|v_1 - v_2|;$$

حيث: $K(s,t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}(t-s)^{\beta-1}$ ، وهي دالة مستمرة على Δ ، إذن فهي تحقق شروط المبرهنة، فيمكن أخذ مثلا $q=2$ فنجد $p=2$.
فوق ذلك لدينا:

$$\begin{aligned}\int_0^t [K(s,t)]^2\,ds &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{2\beta-2}ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{-1}{2\beta-1}\left[(t-s)^{2\beta-1}\right]_0^t\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{t^{2\beta-1}}{2\beta-1};\end{aligned}$$

وعليه ستكون قيمة M كالتالي:

$$M=\frac{A^{2\beta-1}}{\Gamma(\beta)(2\beta-1)}.$$

عندئذ نستنتج أنه من أجل كل u_0 من $\mathbb{R}$ ، يوجد حل وحيد من $C^1([0,A])$ يحقق الشرط الابتدائي: $u(0)=u_0$.
بهذه القيم، وأخذا في الاعتبار أن $p=q$، نستنتج أن ثابت التقليص $a(\alpha)$ يُعطى بالعبارة:

$$a(\alpha)=\left(1+A\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}\right)M\frac{1-e^{-\alpha A}}{\alpha}.$$

نلاحظ أيضا أن حل المعادلة في هذا المثال موجود على مجال $[0,A]$ مهما كان A وهذا ما نعبر عنه بالوجود الكلي للحل.
باختيار مناسب لقيمة α بحيث يتحقق: $a(\alpha)<\frac{1}{s}$ وبملاحظة أن التطبيق D_p مستمر، عندئذ لدينا التقدير التالي تقارب المتتالية التكرارية $(T^n u_0)$ نحو الحل u^* كالتالي:

$$D_2(T^n u_0,u^*)\le\left(\frac{s}{1-s\theta}\right)a^n D_2(u_0,u_1).$$

وعليه يصبح التقدير كالتالي:

$$D_2(T^n u_0,u^*)\le\left(\frac{2}{1-2a}\right)D_2(u_0,u_1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

فعلى سبيل المثال، نأخذ $g(t)=t$ ، $A=1$ ونبدأ بالدالة الثابتة $u_0=0$ فتكون الدالة u_1 هي حل المعادلة التالية:

$$u_1'(t)=t+\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds;$$

مع الشرط الابتدائي $u_0 = 0$ والتي حلها هو:

$$u_1(t) = \frac{t^2}{2}.$$

وعليه سيكون:

$$D_2(u_0, u_1) = \max_{0 \le t \le 1} e^{-\alpha t} |\frac{t^2}{2}|^2 + \max_{0 \le t \le 1} e^{-\alpha t} |t|^2 \le 2.$$

وهذا يعطينا التقدير التالي:

$$D_2(T^n u_0, u^*) \le \left(\frac{2}{1-2a}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

خاتمة

في هذه الأطروحة تم دراسة مسألة النقطة الثابتة سواء للتطبيقات وحية القيمة أو متعددة القيم، في فضاءات مترية مُعمم تسمى: القضاءات b-مترية، باستعمال شروط تقليصية معممة من نوع هاردي-روجرز.

يمكن القول إن التوطئة **1.1** هي الأساس لكل نتائج الأطروحة، حيث إنها تمدد قيم ثابت التقليص θ من المجال $[0,\frac{1}{s})$ إلى المجال $[0,1)$. باستعمال هذه التوطئة، تمكننا من برهان ما يلي:

1. في الفصل **3**: المبرهنة المتعلقة بوجود النقاط الثابتة المشتركة **2.2** وما ينتج عنها من مبرهنات ونتائج: **2.2** ، **2.2** ، **2.2** ، **2.2** وبعض الحالات الخاصة من هذه المبرهنات.
   وأخيرا المبرهنة **2.2**. كما تم تقديم الكثير من الأمثلة في هذا الفصل توضح قابلية تطبيق هذه النتائج، ومقارنتها بنتائج سابقة، لنستخلص منها أن نتائجها أكثر عمومية من النتائج السابقة. (انظر الملاحظة **2.2** والأمثلة في الفصل **2**).
2. في الفصل **3.4**: كانت النتائج حول النقاط الثابتة للتطبيقات متعددة القيم، والتي يمكن اعتبار أهم مبرهنة في هذا الفصل هي المبرهنة **1.3** والتي استعملنا فيها شرط تقليصي من نوع هاردي-روجرز، كما أن هذا النوع من التقليصات ينتمي لصنف عام من التطبيقات يسمى: التطبيقات C-بيكار ضعيفة، والتي تحقق تقدير السحب-إزاحة المشار إليه في المبرهنة. هذا التقدير يُعتبر أداة أساسية لدراسة استقرار أولام-هايرز لمسألة النقطة الثابتة (انظر القسم **1.4**).

القسم **2.3** يتناول تعميم لمبرهنة بوغين، والتي نسمي التطبيقات التي تحقق شروط بوغين بـ: التطبيقات غير الموسعة المعممة، ولأول مرة يتم تمديد المبرهنة لحالة الفضاءات b-مترية وللتطبيقات متعددة القيم دون استعمال الشرط F-تقليصي. كذلك تظهر حالة التطبيقات وحيدة القيم كحالة خاصة من التطبيقات متعددة القيم، لذلك تم استنتاج المبرهنتين **2.3** و **2.3** مباشرة، مع أننا عملنا عليهما بشكل مستقل في المقال [23].

أجرينا بعد ذلك مقارنة بين نتائجنا وبعض النتائج السابقة التي تخص التطبيقات F-تقليصية من نوع هاردي روجرز، واستخلصنا أن نتائجنا أكثر عمومية وأكثر مرونة خاصة في حالة

$s>1$ (انظر الملاحظات **3.3** و **3.3**).

ثم استخرجنا بعض النتائج حول نقاط التطابق، وكذلك النقاط الثابتة للتطبيقات التي تحقق شرط توسيع (انظر اقسم **4.3**).

وأخيرا قدمنا بعض التطبيقات لبعض نتائجنا، الأول حول المعادلات الدالية للبرمجة الديناميكية، والثانية حول مسألة تكاملية تطورية.

لقد وضحنا في الملاحظات **3.3** و **3.3** أن شروط المبرهنة **2.3** و **3.3** أضعف من شروط المبرهنات [30, المبرهنة 13.3، المبرهنة 26.3] (المبرهنات **2.1** و **2.1**) عندما يكون $s>1$. وكذلك وضحنا أن **3.3** تحسن النتيجة [55, المبرهنة 2.5] (المبرهنة **2.1** في هذه الأطروحة) .

لكن لما $s=1$ نجد أن الشرط على المعاملات من المبرهنات **2.1** و **2.1** -وكذلك المبرهنة **2.1**- يصبح كالتالي:

$$(H_1^1)\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=1,\ \text{و}\ \gamma\neq 1; \qquad (4.24)$$

$$(H_1^2)\ \alpha+\beta+\gamma+2L=1,\ \text{و}\ \beta\neq 1. \qquad (4.25)$$

بينما شروط نتائجنا -المبرهنة **2.3** - تصبح:

$$a+b+c+2d<1 \qquad R_1$$

أو

$$a+b+c+2e<1 \qquad R_2$$

وشروط المبرهنة **3.3** تصبح:

$$a+b+c+d+e=1;\quad b+c\neq 0;\quad d+e\neq 0. \qquad (4.26)$$

واضح أن شروط المبرهنات **2.1** و **2.1** على المعاملات الظاهرة في الشرط التقليصي أضعف من شروط المبرهنات **2.3** و **3.3**، لذلك من الطبيعي أن يظهر السؤال التالي:

هل يمكن الحصول على نتائج المبرهنات **2.3** و **3.3** باستعمال شروط أكثر ضعفا؟ يمكن لهذا السؤال أن يكون موضوع بحث أيضا، خصوصا إذا تم التركيز على أنواع أخرى من التقليصات، مثل التقليصات غير الخطية، تقليص Geraghty إلخ.

قائمة المراجع

[1] An, T.V., Tuyen, L.Q., Dung, N.V.: *Stone-type theorem on b-metric spaces and applications.* Topol. Appl. **185186** (2015), 50-64

[2] Arutyunov, A. V., and Greshnov, A. V. E.: (q_1, q_2)*-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points.* Fixed Point Theory, **23(2)** 473-486 (2022)

[3] Aleksic, S., Mitrovic, Z. D., and Radenovic, S.: *On some recent fixed point results for single and multi-valued mappings in b-metric spaces.* Fasc. Math. **61** , 5-16 (2018).

[4] Anderson, D. E., Singh, K. L., and Whitfield, J. H. M.: *Common fixed points for family of mappings.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **7(1)**, 89-95 (1984)

[5] Aydi, H., Karapinar, E. and Yazidi, H.: *Modified F-Contractions via alpha-Admissible Mappings and Application to Integral Equations*, Filomat **31(5)**, 1141- 1148 (2007). https://doi.org/10.2298/FIL1705141A

[6] Alghamdi, M. A., Hussain, N., and Salimi, P.:*Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces.* Journal of inequalities and applications, **2013(1)**, 1-25 (2013).

[7] Amini Harandi, A.: *Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed points.* Fixed Point Theory Appl. **2012(1)**, 1-10 (2012)

[8] Aydi, H., Bota, M.F., Karapinar, E. and Mitrovi, S.: *A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. 2012, 2012 :88. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-88

[9] Aydi, H., Bota, M.F., Karapinar, E. and Moradi, S.: *A common fixed point for weak phi-contractions on b-metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl., **13(2)**, 337-346 (2012)

[10] Bakhtin, I.A.: *The contraction mapping principle in quasi-metric spaces.* Func. An. Gos. Ped. Inst. Unianowsk **30**, 26-37 (1989)

[11] Bhakta, P.C., Mitra, S.: *Some exitence theorems for functional equations arising in dynamic programming.* J. Math. Anal. Appl. **98**, 348-362 (1984)

[12] Banach, S.: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales.* Fundam. Math. **3**, 133-181 (1928)

[13] Bogin, J.: *A generalization of a fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi.* Canad. Math. Bull **19(1)**, 7-12 (1976)

[14] Bota, M. F., Guran, L., and Petruel, A.: *New fixed point theorems on b-metric spaces with applications to coupled fixed point theory.* Journal of Fixed Point Theory and Applications, **22(3)**, 74. (2020)

[15] Boyd. D. W, Wong. J. S. W.: *On nonlinear contractions.* Proc. Am. Math. Soc. **20(2)**, 458-464 (1969)

[16] Czerwik, S.: *Contraction mappings in b-metric spaces.* Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis **1**, 5-11 (1993).

[17] Czerwik, S.: *Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46**, 263-276 (1998).

[18] Czerwik, S., Dutek and K., Singh, S.: *Round-off stability of iteration procedures for operators in b-metric spaces* J. Natur. Phys. Sci. , **11**, 87-94 (2007).

[19] Chen, L., Xia, X., Zhao, Y., and Liu, X.: *Common Fixed Point Theorems for Two Mappings in Complete b-Metric Spaces.* Fractal and Fractional, **6(2)**, 103 (2022) https://doi.org/10.3390/fractalfract6020103

[20] Chaipornjareansri, S.: *Fixed Point and Coincidence Point Theorems for Expansive Mappings in Partial b-Metric Spaces.* Thai Journal of Mathematics, **2015**, 169-185, (2018).

[21] Chunfang Chen, Jian Dong and Chuanxi Zhu: *Some fixed point theorems in b-metric-like spaces.* Fixed Point Theory and Applications, **2015**, 1-10, (2015).

[22] Cosentino, M., Jleli, M., Samet, B., Vetro, C.: *Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in* ***b****-metric spaces.* Fixed Point Theory Appl., 70 (2015). https://doi.org/10.1186/s13663-015-0317-2

[23] Chaib, R., Merghadi, F., Mouhoubi, Z.: *Improvement of fixed point theorems for Hardy-Rogers contraction type in b-metric spaces without F-contraction assumption.* Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser (2023). https://doi.org/10.1007/s12215-023-00892-6

[24] Chaib, R., Merghadi, F., Mouhoubi, Z.: *Fixed point theorems for multivalued mappings of Hardy-Rogers type in b-metric spaces.* Fixed Point Theory (Accepted).

[25] Chifu, C., Petruel, G.: *Fixed point results for multivalued HardyRogers contractions in b-metric spaces.* , Filomat, **31(8)**, 2499-2507 (2017).

[26] Chatterjea, S. K.: *Fixed-point theorems.* , C. R. Acad. Bulgare Sci. **25**, 727-730 (1972)

[27] Cosentino, M., Vetro, P.: *Fixed point result for F -contractive mappings of HardyRogers type.* Filomat **28(4)**, 715-722 (2014)

[28] Cosentino, M., Jleli, M., Samet, B., Vetro, C.: *Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in* ***b****-metric spaces.* Fixed Point Theory Appl., 70 (2015). https://doi.org/10.1186/s13663-015-0317-2

[29] Debnath, P., Konwar, N. and Radenovi, S.: *Metric Fixed Point Theory: Applications in Science,Engineering and Behavioural Sciences.* Springer Nature Singapore, 2021

[30] Derouiche, D., Ramoul, H.: *New fixed point results for F-contractions of HardyRogers type in* ***b****-metric spaces with applications.* J. Fixed Point Theory Appl. **22(4)**, 1-44 (2020)

[31] Dube, L.S. and Singh, S.P.: *On multi-valued contraction mappings.* Bull. Math. Roumania, **13(62)**, 301-304 (1970).

[32] Edelstein. M.: *An extension of Banach's contraction principle.* Proc. Am. Math. Soc. **12(1)**, 7-11 (1961)

[33] Edelstein. M.: *On fixed and periodic points under contractive mappings.* J. Lond. Math. Soc. **37**, 74-79 (1962)

[34] Eke, K. S.: *Some fixed and coincidence point results for expansive mappings on G-partial metric spaces.* Adv. Fixed Point Theory, **5(4)**, 369-386, (2015).

[35] Faraji, H., Nourouzi, K.: *A generalization of Kannan and Chatterjea fixed point theorems on complete* ***b****-metric spaces.* Sahand communications in mathematical analysis, **6(1)**, 77-86 (2017)

[36] Fulga, A., Karapnar, E. and Petrusel, G.: *On Hybrid Contractions in the Context of Quasi-Metric Spaces.* Mathematics, **8(1)**, (2020). https://doi.org/10.3390/math8050675

[37] Geraghty, M. A.:*On contractive mappings.* Proceedings of the American Mathematical Society, **40(2)**, 604-608 (1973).

[38] Hazarika, B., Karapinar, E., Arab, R. and Rabbani, M.: *Metric-like spaces to prove existence of solution for nonlinear quadratic integral equation and numerical method to solve it.* J. Comput. Appl. Math. **328**, 302-313 (2018). https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.07.012

[39] Hardy, G.E., Rogers, T.D.: *A generalization of a fixed point theorem of Reich.* Can. Math. Bull. **16(2)**, (1973), 201-206.

[40] Huang, H., Singh, Y.M., Khan, M.S. and Radenovi, S.: *Rational type contractions in extended b-metric spaces.* Symmetry 2021, **13**, 614. https//-doi.org./10.3390/sym13040614

[41] Han, Y., and Xu, S. : *Some new theorems of expanding mappings without continuity in cone metric spaces.* Fixed Point Theory and Applications, **vol. 2013**, 1-9 (2013).

[42] Huang, X., Zhu, C., and Wen, X. : *Fixed point theorems for expanding mappings in partial metric spaces.* Analele tiinifice ale Universitii" Ovidius" Constana. Seria Matematic, **20(1)**, 213-224 (2012).

[43] Hussain, N., Roshan, J. R., Parvaneh, V., and Kadelburg, Z. : *Fixed points of contractive mappings in-metric-like spaces.* The Scientific World Journal, **vol. 2014**, (2014).

[44] Husain, S. A., Sehgal, V. M.: *On common fixed points for a family of mappings.* Bulletin of the Australian Mathematical Society, **13(2)**, 261-267 (1975)

[45] Iseki, K.: *Multi-valued contraction mappings in complete metric spaces.* Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova **53**, 15-19 (1975).

[46] Jong Sook Bae.: *Fixed point theorems of generalized nonexpansive maps.* J. Korean Math. Soc. **21(2)**, 233-248 (1984)

[47] Kannan, R.: *Some results on fixed points.* Bull. Calcutta Math. Soc. **10**, 71-76 (1968)

[48] Karapnar, E., Fulga, A. and Agarwal, R.P.: *A survey: F-contractions with related fixed point results.* J. Fixed Point Theory Appl. **22 (69)**, (2020). https://doi.org/10.1007/s11784-020-00803-7

[49] Karapnar, E., Fulga, A. and Petrusel, A.: *On Istratescu type contractions in b-metric spaces.* Mathematics **8(3)**, 388 (2020). https://doi.org/10.3390/math8020220

[50] Karapnar, E. and Chifu, C.: *Results in wt-Distance over b-Metric Spaces.* Mathematics **8(2)**, 220 (2020). https://doi.org/10.3390/math8030388

[51] Kirk, W. and Shahzad, N.: *Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Springer, Berlin, 2014, 113-131

[52] Kiyoshi Iseki, *On common fixed points of mappings*BULL. AUSTRAL. MATH. SOC., **10**, 365-370 (1974)

[53] Krasnoselskii, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Mac Millan, New York, 1964

[54] Lu, N., He, F., and Du, W. S.: *On the best areas for Kannan system and Chatterjea system in b-metric spaces.* Optimization, **70(5-6)**, 973-986 (2021)

[55] Lukàcs, A., Kajànto, S.: *Fixed point theorems for various types of F-contractions in complete* ***b****-metric spaces.* Fixed Point Theory . **19(1)**, 321-334 (2018)

[56] Marija C.: *The relation between F-contraction and MeirKeeler contraction.* Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. (2023) https://doi.org/10.1007/s13398-022-01373-8

[57] Matthews, S. G.: *Partial metric topology.* Annals of the New York Academy of Sciences **728(1)**, 183-197 (1994).

[58] Meir A. and Keeler E..: *A theorem on contraction mappings.* Journal of Mathematical Analysis And Application, **28**, 326-329 (1969).

[59] Michael A. G.: *On contractive mappings.* Proc. Am. Math. Soc. **40(2)**, 604-608 (1973)

[60] Michael A. Smyth: *The fixed point problem for generalized nonexpansive maps.* Bull. Austral. Math. Soc. **55**, 45-61 (1997)

[61] Miculescu, R., Mihail, A.: *New fixed point theorems for set-valued contractions in b-metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. **19(3)**, 2153-2163 (2017). https://doi.org/10.1007/s11784-016-0400-2

[62] Milici, Constantin, Gheorghe Drgnescu, and J. Tenreiro Machado: *Introduction to fractional differential equations.* Vol. 25. Springer, 2018.

[63] Mitrovi, Z.D.: *Fixed point results in b-metric space.* Fixed Point Theory. **20(2)**, 559-566 (2019)

[64] Mitrovi, Z.D., Aydi, H., Mlaiki, N., Gardaevi-Filipovi, M., Kuki, K., Radenovi, S., de la Sen, M.: *Some new observations and results for convex contractions of Istratescus type.* Symmetry. **11(12)**, 1457 (2019). https://doi.org/10.3390/sym11121457

[65] Nadler, SB.: *Multivalued contraction mappings* Pac. J. Math. , **30**, 475-488 (1969).

[66] Nguyen Van Dung and Wutiphol Sintunavarat: *Fixed Point Theory in b-Metric Spaces.* In : Metric Structures and Fixed Point Theory. Chapman and Hall/CRC, 33-66 (2021)

[67] Nguyen Van Dung and Wutiphol Sintunavarat: *Fixed Point Theory in b-Metric Spaces.* In : Metric Structures and Fixed Point Theory. Chapman and Hall/CRC, 33-66 (2021)

[68] Özyurt, S.G.: *On some alpha-admissible contraction mappings on Branciari b-metric spaces.* Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl., **1(1)**, 1-13 (2017)

[69] Pathak, H. K., Mishra, S. N., and Kalinde, A. K.: *Common fixed point theorems with applications to nonlinear integral equations.* Demonstratio Mathematica, **32(3)** 547-564 (1999)

[70] Patil, S., and Salunke, J.: *Fixed point theorems for expansion mappings in cone rectangular metric spaces.* General Mathematics Notes, **29(1)**, 30-39 (2015)

[71] A. Petruel, G. Petruel, J.-C. Yao, *Multi-valued graph contraction principle with applications*, Optimization, **69(7-8)**(2020), 1541-1556.

[72] Proinov, P.D.: *Fixed point theorems for generalized contractive mappings in metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. (2020) 22:21. https://doi.org/10.1007/s11784-020-0756-1

[73] Piri, H., Kumam, P.: *Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces.* Fixed Point Theory Appl. **2014**, (2014), 210

[74] Rakotch, E.: *A note on contractive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 459-465 (1962)

[75] Regan, D. O.: *Existence results for nonlinear integral equations*, J. Math. Anal. Appl., **192**, 705-726 (1995)

[76] Reich, S.: *Some remarks concerning contraction mappings.* Can. Math. Bull. **14(1)**, 121-124 (1971)

[77] Rus, I. A.: *Ulam stability of the operatorial equations* In Functional Equations in Mathematical Analysis New York, NY : Springer New York, p. 287-305. (2011)

[78] Rus, I. A.: *Rus, I. A. (2014). Results and problems in Ulam stability of operatorial equations and inclusions* Handbook of Functional Equations: Stability Theory, 323-352. (2014)

[79] Semenov P. V.: *On the Equivalence of Certain Statements on Fixed Points of Contractions.* Functional Analysis and Its Applications, **51(4)**, 318-321 (2017)

[80] Shatanawi, W., and Awawdeh, F.: *Some fixed and coincidence point theorems for expansive maps in cone metric spaces.* Fixed point theory and Applications, **2012(1)**, 1-10 (2012)

[81] Singh, SL, Bhatnagar, C, Mishra, SN.: *Stability of iterative procedures for multivalued maps in metric spaces.* Demonstratio Math., **38(4)**, 905-916 (2005).

[82] Shukla, S.: *Partial b-metric spaces and fixed point theorems.* Mediterranean Journal of Mathematics, **11**, 703-711 (2014)

[83] Suzuki, T.: *Basic inequality on a b-metric space and its applications.* J. inequal. Appl. 256(2017). https:// doi.org/10.1186/s13660-017-1528-3

[84] Suzuki, T.: *Fixed point theorems for single-and set-valued F-contractions in b-metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. **20(1)**, 1-12 (2018)

[85] Todorečevi, V.: *Harmonic Quasiconformal Mappings and Hyperbolic Type Metrics.* Springer Nature Switzerland AG 2019

[86] Vetro, F.: *F -contractions of HardyRogers type and application to multistage decision processes.* Nonlinear Anal. Model. Control. **21(4)**, 531-546 (2016)

[87] Williams, B. B., and Gillespie, A. A.: *Fixed Point Theorems for Expanding Maps.* University of Texas at Arlington. (1981)

[88] Wardowski, D.: *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. **2012**, Article number: 94 (2012)

[89] Wardowski, D. and Van Dung, N.: *Fixed points of F-contractions on complete metric spaces.* Demonstr. Math. **47(1)**, 146155 (2014)

[90] Wardowski, D.: *Solving existence problems via F-contractions.* Proc. Amer. Math. Soc. **146**, 15851598 (2018)

[91] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I* (Fixed Point Theorems), Springer-Verlag, (1986)