Table des matières

1 Notions de base et définitions **7**

1.1 Fonctions de carré sommable et dérivation faible 7

1.1.1 Quelques rappels d'intégration 7

1.1.2 Dérivation faible 8

1.2 Les espaces de Sobolev 8

1.2.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 9

1.2.2 Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ 10

1.2.3 Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ 11

1.3 Définitions et notions 12

1.3.1 Quelques inégalités fonctionnelles 12

1.3.2 Quelques propriétés sur les opérateurs 13

1.3.3 Rappels et définitions 17

1.3.4 Quelques définitions sur les matrices 18

2 L'étude de système elliptique intervenant le Laplacien **21**

2.1 Système linéaire coopératif de deux équations 21

2.1.1 Le principe de maximum 22

2.1.2 L'unicité de solution positive 25

2.2 Généralisation à un système de n équations 29

2.2.1 Le principe de maximum pour le cas général 30

2.2.2 L'exictence et l'unicité de solution positive 31

2.3 L'insertion d'un système elliptique non coopératif dans un système coopératif 35

2.3.1 L'insertion d'un système non coopératif de deux équations dans un système coopératif de trois équations 35

2.3.2 L'insertion d'un système non coopératif de n équations dans un système coopératif de $(n+1)$ équations 38
2.4 Système semi-linéaires 40
2.4.1 Le principe de maximum pour les systèmes semi-linéaires et l'existence d'une solution positive 40
2.5 Généralisation à un système de n équations 44

3 L'étude des systèmes elliptiques intervenant le p-Laplacien 49
3.1 Le principe de maximum et l'existence d'une solution positive pour une seule équation 49
3.1.1 Le principe de maximum 50
3.1.2 L'existence et l'unicité de la solution 50
3.2 Le principe de maximum et l'existence d'une solution positive pour le p-Laplacien . 53
3.2.1 Le principe de maximum 54
3.2.2 L'existence des solutions positives 56

.

Introduction générale

Nous étudions ici certains systèmes elliptiques coopératifs définis sur un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left|u_j\right|^{p-2} u_j + f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où les coéfficients a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ sont constants et $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ (systèmes coopératifs), l'opérateur Δ_p défini par $\Delta_p = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u\right),\ p > 1$ s'appelle **p-Laplacien,** si $p = 2$ nous obtenant le **Laplacien.**

Les problèmes elliptiques faisant intervenir le Laplacien et le p-Laplacien sont d'une importance capitale dans la modélisation des phénomènes naturels en physique notamment fluides non Newtonienes, mécanique,...

Nous sommes concernés par l'existence de solutions positives et avec la forme de **principe de maximum (positivité inverse)** suivante : "l'hypothèse $f_i \geq 0$ sur Ω implique $u_i \geq 0$ sur Ω pour tout solution $U = (u_i)$".

L'un des outils les plus utiles et les plus connus utilisés dans l'étude des équations différentielles parielles est le principe de maximum. Il est un outil très important pour de plusieurs questions concernant les équations différentielles partielles, non seulement pour prouver l'existence et l'unicité des solutions, mais aussi pour étudier leurs propriétés qualitatives comme positivité,...

Un excellent aperçu du sujet jusqu'en 1967 peut être trouvé dans le livre par **Protter** et **Weinberger** *[26]*. Plusieurs documents ont exploré le principe de maximum pour différents systèmes (linéaire, semi linéaire et non linéaire) impliquant les opérateurs Laplacien et p-Laplacien.

Le principe de maximum a également été étudié pour les systèmes elliptiques linéaires. En particulier les travaux de **Figueiredo** et **Mitidieri** *[12]* ont donné les conditions nécessaires et suffisantes pour le principe de maximum. De plus, en *[16]*, *[29]* les auteurs ont démontré des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir le principe de maximum et l'existence de solutions positives pour les systèmes elliptiques linéaires coopératifs impliquant l'opérateur de Laplace avec des coefficients constants. Aussi en *[3]*, *[16]* les auteurs ont présenté les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir le principe de maximum et pour l'existence de solutions positives pour les systèmes elliptiques semi-linéaires coopératifs impliquant l'opérateur de Laplace par l'utilisation de la méthode de sous et sur solutions, cette méthode donne l'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en présence d'un couple de fonctions, appelées sous-solution et sur-solution, bien ordonné. Elles peuvent être considérées comme des approximations de la solu-

tion avec une erreur de signe constant. Ces résultats ont été étendus en *[16]* au système elliptique non linéaire coopératif impliquant les opérateurs p-Laplacien avec des coefficients constants.

Cet mémoire est répartie en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions de base ainsi que des rappels, qui seront utilisés dans certaines preuves et applications.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les systèmes elliptiques coopératifs linéairs puis les systèmes semi-linéairs, il est organisé de la manière suivante :

Nous exposons dans la première section quelques résultats concernant les systèmes elliptiques coopératifs intervernant le Laplacien, nous établissons le principe de maximum et on utilise le lemme de Lax-Milgram pour prouver l'existence et l'unicité de la solution. Voir **J.Fleckinger**, **J.Hernandez** et **F.De Thélin** *[16]*.

Et la deuxième section est une extension au système linéaire à n équations **(H. M. Serag** et **A. H. Qamlo** *[29])*.

Dans la troisième section, nous présentons une méthode utilisée par **D.G.de Figueiredo** et **Mitidieri** (voir *[13]*) et par **H.M.Serag and A.H.Qamlo** *[29]* pour l'insertion d'un système linéaire non coopératif dans un système linéaire coopératif, pour l'établissement du principe de maximum.

Et la quatrième section comporte la résolution d'un système coopératif semi-linéaire, on adapte ici la méthode des sous et sur solutions pour prouver l'existence de solution, et avec des conditions supplémentaires sur les non linéarités f_i nous obtenons l'unicité de solution (voir toujours **J.Fleckinger**, **J.Hernandez** et **F.De Thélin** *[16])*.

Enfin la dernière section est une généralisation à n équations pour le système semi-linéaire (voir **Bénédicte Alziary, Laure Cardoulis and Jacqueline Fleckinger-Pellé** *[3])*.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les systèmes elliptiques coopératifs intervenant le p-Laplacien (voir *[16])*. Ce chapitre est divisé en deux sections :

Dans la première section, nous étudions le principe de maximum et on applique le théorème de point fixe de Schauder pour prouver l'existence de solution positive pour une seul équation, et dans la deuxième section, nous généralisons ses résultats pour un système de n équations.

.

Notations

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons les conventions suivantes :
Si Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on note par :

Notations générales

$\Delta u = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien de u.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$	Grad de u.
$\Delta_p u = \operatorname{div}(\lvert\nabla u\rvert^{p-2} \nabla u)$	p- Laplacien de u.
$D(A)$	$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Domaine de définition de A.
$\sigma(T)$	Spectre de l'opérateur T.
$\rho(T)$	Ensemble résolvant de T.
$VP(T)$	Ensemble des valeur propre de T.
$B(x_0, r)$	$B(x_0, r) = \{x;\ \lVert x - x_0\rVert < r\}$. Boule ouverte, centré en x_0 de rayon r.
$\delta_{n,m}$	Symbole de Kronecker
$(.,.)_X$	Le produit scalaire de X.
$\lVert . \rVert_X$	La norme de X.
$\min$	Le minimum
$\max$	Le maximum
$\lim$	La limite
div	La divergence de u.
$\eta(x)$	La normale extérieure.
$p.p$	Presque pour tous les points.
p'	Exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compact.
$\hookrightarrow$	Injection continue.
$\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$	La longueur de α.
λ_1	La première valeur propre.
φ_1	La fonction propre associée à la valeur propre λ_1.
$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n}$	La dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
f^+	Partie positive de f.
f^-	Partie négative de f.

Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Ouvert borné.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$\widetilde{\Omega}$	$\widetilde{\Omega} \supset \Omega \cup \partial\Omega$.
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre m dans $L^p(\Omega)$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle.
$W^{1,p}, W_0^{1,p}, H^1, H_0^1, H^m$	Les espaces de Sobolev.
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int\limits_{\Omega} \lvert u\rvert^p \ dx < +\infty, \ 1 \leq p \leq \infty \right\}$.
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega), \ p' = \dfrac{p}{p-1}$.
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carrées sommables.
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espace des fonctions localement intégrables.
$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$	Ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ a support compact.

Chapitre 1

Notions de base et définitions

Dans ce chapitre, nous collectons plusieurs outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce mémoire. Le lien commun entre tous les résultats de ce chapitre, c'est qu'ils sont préparatoires pour les résultats principaux, qui sont contenues dans les chapitres suivantes. Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et nous utiliserons la mesure de Lebesgue.

1.1 Fonctions de carré sommable et dérivation faible

1.1.1 Quelques rappels d'intégration

Tous les résultats de cette section sont détaillés dans le cours de mathématique *[2],[5]*.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables dans Ω.

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, définie p.p, } \int\limits_{\Omega} f^2 \, dx < +\infty \right\}$$

Muni d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) \, dx$$

L'espace vectoriel muni d'un produit scalaire $L^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert,** c'est-à-dire complet pour la norme :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Rappelons que les fonctions mesurables dans Ω sont définies presque partout dans Ω : si on change les valeurs d'une fonction mesurable f sur un sous-ensemble de Ω de mesure nulle, on ne change pas la fonction mesurable f. Autrement dit, deux fonctions mesurables f, g seront dites

égales si $f(x) = g(x)$ presque partout dans Ω, c'est-à-dire s'il existe $E \subset \Omega$ tel que la mesure de Lebesgue de E est nulle et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in (\Omega \setminus E)$.

Théorème 1.1 *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Corollaire 1.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

Alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω.

1.1.2 Dérivation faible

Définition 1.1 *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i = \{1, 2, ..., n\}$, telles que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. On a*

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega w_i \phi(x)\, dx$$

Chaque w_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v et notée désormais $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Lemme 1.1 *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout indice $i = \{1, 2, ..., n\}$, on a*

$$\left| \int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

Alors v est dérivable au sens faible.

1.2 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de **H. Brezis [5]** et **O. Kavian [21]** .

1.2.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq i \leq n$. Une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$. Si f_i est donnée par la relation ci-dessus, on pose :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Définition 1.3 *Soit $\alpha \in N^n$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ la longueur de α et $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n} u$ désigne la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est définit par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in N^n,\ |\alpha| \leq m,\ \ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ étant muni de la norme $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p$ (où pour $1 \leq p \leq \infty$ on note $\|u\|_p^p = \int_\Omega |u(x)|^p\,dx$, on munit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Notons que par récurrence, on a

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega)\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

Et si $p = \infty$ la norme de l'espace $W^{m,\infty}(\Omega)$ est

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = (\sup |\partial^\alpha u|)$$

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega);\ H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de *Hilbert*

1.2.2 Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega);\ \exists\ g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \ \text{ tel que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \ \forall i = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

On note $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Où parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\text{si } \ 1 \leq p < \infty.$$

✓ Si $p = \infty$,on muni $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = (\text{supp } |u| + \text{supp } |\nabla u|)$$

✓ Si $p = 2$, on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Les espaces $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = \{1, 2, ..., n\}\,,\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v
Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable (voir *[5]*).

1.2.3 Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, il est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.*

Corollaire 1.2 *Une autre caractérisation de $W_0^{1,p}(\Omega)$; si u est de classe C^1 et $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$.
2) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega),\ (1 \leq p \leq \infty)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$
Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera trés utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet

L'espace $H_0^1(\Omega)$

Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = \{1, 2, ..., n\},\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Muni d'un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \right)\ dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

Corollaire 1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$

On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.
On peut identifier L^2 et son dual, par conséquent on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues.

1.3 Définitions et notions

1.3.1 Quelques inégalités fonctionnelles

Inégalité de Hölder

Théorème 1.2 *[5]*
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
Alors

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f(x)g(x)| \ dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \ dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Alors

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.3 *[5]*
Dans un espace pré-hilbertien H, on a :

$$\forall \ x, y \in H, \ |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

où

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.4 *[2]*
Soit Ω un ouvert borné dans au moins une direction de l'espace. Alors il existe une constante $C > 0$ pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \ dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \ dx$$

La convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.5 *[5]*

Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergent presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait

$$|f_n| \leq g \ \ \textit{p.p sur } \Omega$$

Alors :

$$f \in L^1(\Omega) \textit{ et } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \ \textit{ et } \int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx$$

Formule de Green

Définition 1.5 *[5]*

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\eta(x)$ est la normale extérieure au domaine Ω, pour toute fonction u de $W^{1,p}(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi = \int_{\partial\Omega} u\varphi.\eta - \int_\Omega \varphi \nabla u.$$

1.3.2 Quelques propriétés sur les opérateurs

Théorème 1.6 *[8]**(Opérateur compact)***

*Soient E et F deux espaces de Banach, Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite **compacte** si l'image $T(\overline{B_E})$ par l'application T de la boule unité fermée $\overline{B_E}$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F.*

Proposition 1.1 *Un opérateur linéaire T est compact si est seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite des images $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.*

Analyse spectrale *[17]*

Soit E un espace de Banach réel et T une application linéaire continue de E. On note :

- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ T - \lambda I$ est non bijective$\}$ l'ensemble des valeurs singulières de T.
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ T - \lambda I$ est bijective$\} = \mathbb{R}\backslash\sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de T.
- $VP(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ T - \lambda I$ est non surjective$\}$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Lorsque $\dim\ E < +\infty$, on a $VP(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension finie, à condition que l'opérateur T soit linéaire continu et compact.

Définition 1.6 *[23]**(Opérateurs monotones)***

Soit V un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V'

A est monotone si :

$$\forall u, v \in V,\ \langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V,V'} \geq 0$$

Définition 1.7 *[23]**(Opérateurs pseudo monotone)***

Soit V un espace de Banach et V' son dual topologique. On dit que l'opérateur A, définit de V dans V' est un pseudo monotone si :

1) *A est borné.*

2) *lorsque $u_j \rightarrow u$ dans V faible et $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \sup\left(A(u_j), u - v\right) \geq \left(A(u), u - v\right),\ \forall v \in V.$*

Définition 1.8 *[10]**(Injection continue)***

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach.

On dit que F est s'injecte continûment dans E si $F \subset E$ et si l'inclusion est contnue, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in F$:

$$\|x\|_E \leq C \|x\|_F$$

On note

$$F \hookrightarrow E$$

Définition 1.9 *[10]**(Injection compact)***

Soient E and F deux espaces normés tels que $F \subset E$. On dit que F est s'injecte compactement dans E, et on écrit $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$, si

i) Il existe une constante C telle que

$$\|x\|_E \leq C \|x\|_F,\ \forall x \in F$$

ii) Chaque ensemble borné dans F est précompact dans E.

Et aussi on dit que l'injection $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$ est compacte si, de plus, de toute suite bornée pour $\|.\|_F$, on peut en extraire une suite convergent dans $(E, \|.\|_E)$.

Définition 1.10 *[17]**(Le Laplacien)***

Soit A l'opérateur qui a une fonction u associe $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i^2 u$. Afin que cet opérateur ait un sens, on le définit sur son domaine $D(A)$, c-à-d. l'ensemble

$$D(A) = \left\{u \in H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}$$

et on défini alors $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, par $Au = \Delta u$.

Définition 1.11 *Soient A, B deux opérateurs linéaires définis sur V tel que :*

$$Au = \lambda Bu \tag{E}$$

Nous appelons valeur propre principale de (E), toute valeur propre réelle associée à une fonction propre qui ne change pas de signe dans V. Si on a : $A = -\Delta$, et $B = I$, on peut caractérisé la première valeur propre λ_1 de $-\Delta$.

Soit

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Le problème consiste à trouver le couple (λ_1, φ_1) tel que :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1(x) = \lambda_1 \varphi_1(x), & \varphi_1 > 0, \quad x \in \Omega \\ \varphi_1(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Et

$$\lambda_1 = \inf \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \ dx}{\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \ dx}$$

Et on a :

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi_1(x) \ dx = \lambda_1 \int\limits_{\Omega} u(x) \varphi_1(x) \ dx, \ \forall u \in V$$

De même pour le p-Laplacien, on a la caractérisation de la première valeur propre λ_1 suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2} u, & \textit{dans } \Omega \\ u = 0, & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le problème consiste à trouver le couple (λ_1, φ_1) tel que :

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_1 = \lambda_1 |\varphi_1|^{p-2} \varphi_1, \ \varphi_1 > 0, & \textit{dans } \Omega \\ \varphi_1 = 0, & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\lambda_1 = \inf \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \ dx}{\int\limits_{\Omega} |u|^p \ dx}$$

Proposition 1.2 *[20]*

Nous considérons deux ensembles ouverts définis tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Cette inclusion induit une injection naturel $H_0^1(\Omega_1) \hookrightarrow H_0^1(\Omega_2)$ simplement en étendant par zéro fonctions dans $H_0^1(\Omega)$.

En particulier, le principe de maximum implique la monotonie suivante pour l'inclusion de la première valeur propre avec les conditions limies de Dirichlet.

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \implies \lambda_1(1,\Omega_1) \geq \lambda_1(1,\Omega_2)$$

De plus, l'inégalité est stricte dès que $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ contient un ensemble de capacité positive (puisque la première fonction propre ne peut pas disparâitre sur un tel ensemble).
D'autre part si $\lambda_1(p,\Omega) > \gamma > 0$, il existe certains $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ tel que

$$\lambda_1(p,\Omega) > \lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) > \gamma$$

Proposition 1.3 *[16]*
$\lambda_1(p,\Omega)$ dépend continûment par les C^1-perturbations sur Ω .

Preuve. Soit $\widetilde{\Omega} = \tau(\Omega)$, où $\tau = I + \psi$ est une petite perturbation de l'identité et $\psi \in C^1(\widetilde{\Omega})$.Pour toute $y = (I+\psi)(x),\ x \in \Omega$ on pose $\widetilde{u}(y) = u(x)$, on obtient :

$$A(u) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2}} J^{-1}\, dy$$

$$B(u) = \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{u}|^p\, J^{-1}\, dy, \text{ avec } J = \left| \det \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right) \right|$$

Si $\|\psi\|_{1,\infty} \longrightarrow 0$, on obtient

$$A(\widetilde{u}) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_i} \right)^2 \right)^{\frac{p}{2}} dy \longrightarrow A(u), \quad B(\widetilde{u}) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{u}|^p\ dy \longrightarrow B(u)$$

Par conséquent,

$$\lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) = \inf \left\{ \frac{A(\widetilde{u})}{B(\widetilde{u})} :\ \widetilde{u} \in W_0^1(\widetilde{\Omega}) \right\} \longrightarrow \lambda_1(p,\Omega) = \inf \left\{ \frac{A(u)}{B(u)} :\ u \in W_0^1(\Omega) \right\}$$

■

Théorème 1.7 *[11]**(Point fixe de Schauder)***
Soit X un espace de Banach et soit r un réel strictement positif.
Si $T : B(x_0,r) \longrightarrow B(x_0,r)$ est un opérateur complètement continu (c'est-à-dire continu et tel que, pour toute partie bornée D de X, $\overline{T(D)}$ est compacte), alors T admet au moins un point fixe.

1.3.3 Rappels et définitions

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme usuelle :

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$$

Et soit L une forme linéaire définie sur H à valeur réelle, dire que $L(.)$ est continue signifie qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$M = \sup\{|L(u)|,\ u \in H,\ \|u\| = 1\} < +\infty$$

En particulier pour tout $u \in H$ on a :

$$|L(u)| \leq M\|u\|$$

De même nous disons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie sur $V \times V$ est continue s'il existe $M' > 0;\ \forall u, v \in V$ on a :

$$|a(u,v)| \leq M'\|u\|\|v\|$$

La forme a est dite coercive ou uniformément elliptique sur V s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in V;\ a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$$

Lemme 1.2 *[5]**(Lax-Milgram)***
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert V. Soit $L \in V'$ (V' est le dual de V) est une forme linéaire continue sur V.
Le problème variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \text{ tel que :} \\ a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique dans V.

Définition 1.12 *[33]**(fonction mesurable)***
Soient E et F munis des tribus respectives Σ et $\mathcal{F}$.
Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite mesurable par rapport à Σ et $\mathcal{F}$ si pour tout $A \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Définition 1.13 *[33]*
Soit f une fonction mesurable. On note $f^+ = \max(0, f)$ sa partie positive et $f^- = \max(0, -f)$ sa partie négative.
Si $\int_\Omega |f|\, d\mu < +\infty$, c'est-à-dire si

$$\int_\Omega f^+ d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega f^- d\mu < +\infty$$

Alors f est dite intégrable et on pose

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^{+} d\mu - \int_{\Omega} f^{-} d\mu$$

Définition 1.14 *[27]**(fonction lipschitzienne)***
Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne de rapport k sur U si

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2| \quad \text{pour tout } x_1 \in U \text{ et tout } x_2 \in U$$

Définition 1.15 *[27]**(fonction localement lipschitzienne)***
Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localemnt lipschitzienne sur U si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $f\,|_{V_{x_0}}$ soit lipschitzienne sur V_{x_0}.

Définition 1.16 *[25]**(condition de Carathéodory)***
Soit $\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition suivante :
1) *$f(x,t)$ est mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
2) *$f(x,t)$ est continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $x \in \Omega$.*
$f(x,t)$ est appelée fonction de Carathéodory.

1.3.4 Quelques définitions sur les matrices

Définition 1.17 *[6]**(M-matrice)***
M-matrice est une matrice carrée réelle, qui signifie que tous ces mineurs principaux sont strictement positifs et que ses éléments extra-diagonaux sont négatifs.

Cette matrice intervient dans l'étude des problèmes de complémentarité linéaire et dans certaines discrétisation d'opérateurs différentiels, en particulier ceux obéissant à un principe de maximum, comme le Laplacien.

Définition 1.18 *[22]**(M-matrice non singulière)***
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice dont les composantes a_{ij} sont des réels. On dit que A est une M-matrice non singulière si A est de la forme $A = \lambda I - B$ où $\lambda \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, B est une matrice positive telle que $\lambda > \rho(B)$ où $\rho(B)$ est le rayon spectral de B.

Proposition 1.4 *[6]*
Si A est une matrice avec des coefficients hors diagonal non positifs, les conditions $(P_0), (P_1), (P_2), (P_3)$ et (P_4) sont équivalentes :
(P_0) : A est une M-matrice non singulière.
(P_1) : tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

(P_2) : *A est semi-positive (i.e)* $\exists X \gg 0$, *tel que* $AX \gg 0$, *où* $X \gg 0$ *signifie pour tous* $i,\ X_i > 0$ *si* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.
(P_3) : *A a un inverse positif.*
(P_4) : *il existe une matrice diagonal* $D,\ D > 0$ *telle que* $AD + D^tA$ *est définie positive.*

Remarque 1.1 *Si A est une M-matrice non singulière, alors A^t est aussi une M-matrice non singulière. Alors condition (P_4) est satisfaite si est seulement si (P_5) est satisfaite où*
(P_5) : *il existe une matrice diagonal* $D,\ D > 0$ *telle que* $A^tD + DA$ *est définie positive.*

Définition 1.19 *[24]**(Mineurs principaux d'une matrice)***
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carré symétrique de dimension (n, n). Un mineur principal d'ordre k est le déterminant de la sous-matrice de A d'ordre k obtenue en supprimant $(n - k)$ lignes et les $(n - k)$ colonnes correspondantes dans A.

Exemple 1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Les trois mineurs principaux d'ordre 1 de A sont : $a_{11},\ a_{22}$ *et* a_{33}.
Les trois mineurs principaux d'ordre 2 de A sont : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.
Le mineur principal d'ordre 3 de A est : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Définition 1.20 *[24]**(Mineurs principaux diagonaux d'une matrice)***
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carré symétrique de dimension (n, n). Le mineur principal diagonal d'ordre k (noté D_k) de la matrice A est le déterminant de la taille (k, k) obtenue en éliminant $(n-k)$ dernières lignes et les $(n - k)$ dernières colonnes de la matrice A. Une matrice carré d'ordre n admet n Mineurs principaux diagonaux.

Remarque 1.2 *Le mineur principal diagonal d'ordre k d'une matrice est l'un de ses mineurs principaux d'ordre k.*

Exemple 1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Le mineur principal diagonal d'ordre 1 de A est : a_{11}.

Le mineur principal diagonal d'ordre 2 *de* A *est :* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Le mineur principal diagonal d'ordre 3 *de* A *est :* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Définition 1.21 *[24]**(Matrice définie positive)***

Soit A *une matrice carrée symétrique et soit* X *un vecteur colonne quelconque. On note* X' *sa transpoée.*

A *est dite "définit positive" si est seulement si*

$$X^t AX > 0, \quad \forall X \neq 0$$

Chapitre 2

L'étude de système elliptique intervenant le Laplacien

Nous étudions ici quelques systèmes elliptiques linéaires cooperatifs définis sur un domaine borné Ω dans $\mathbb{R}^n$, nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ u_j + f_i \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad\qquad u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où les coefficients a_{ij} sont constants et $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ le système est dite cooperatif.
Ici nous donnons une preuve alternative très simple à la condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unucité des solutions positives pour les systèmes linéaires coopératifs.

2.1 Système linéaire coopératif de deux équations

On défini l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad \text{tq } \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\,,\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right)\ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et elle est équivalente à cette norme :

$$\|u\|_m = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + m\,|u(x)|^2 \right)\ dx \right)^{\frac{1}{2}},\ m > 0$$

Et notons que $H_0^1(\Omega) = V$.

Nous définissons l'espace $V^2 = V \times V$ par la norme :

$$\|U\|_{V^2} = (\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2)^{\frac{1}{2}},\ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V^2$$

elle est équivalente à la norme :

$$\|U\| = (\|u\| + \|v\|),\ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V^2$$

Soit le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + f(x), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + g(x), & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_L}$$

Tel que :

$$\Omega \text{ est un domaine borné sur } \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$f, g \in L^2(\Omega) \tag{2.2}$$

Nous considérons ici la formulation variationnelle de ce système c'est-à-dire des solutions faibles dans $H_0^1(\Omega)$. Nous soulignons que :

$$\text{Les coefficients } a, b, c, d \text{ sont des constantes réelles} \tag{2.3}$$

$$b > 0, c > 0 \tag{2.4}$$

Sous l'hypothèse (2.4), le système (S_L) s'appelle **coopératif.**

2.1.1 Le principe de maximum

Nous prouvons ici, par une méthode différente, un résultat qui a été prouvé dans *[12]* et qui est une condition nécessaire et suffisante pour le principe de maximum.
Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ positive et principale dans Ω et φ_1 la fonction propre positive associé à λ_1 normalisée c'est-à-dire $\|\varphi_1\| = 1$.

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \quad \varphi_1 > 0 \text{ dans } \Omega \\ \varphi_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 2.1 *Le principe de maximum est vérifié pour le système* (S_L) *sous les conditions* $(2.1) - (2.4)$ *si et seulement si :*

$$a < \lambda_1 \text{ et } d < \lambda_1 \tag{2.5}$$

et

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 - a & -b \\ -c & \lambda_1 - d \end{vmatrix} = (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc > 0 \tag{2.6}$$

sont satisfaites.

Preuve. Considérons $f, g > 0$ et $u, v > 0$

Miltipliant la première équation du système (S_L) par φ_1 et intégrant sur Ω , on obtient par l'utilisation de formule de Green

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi_1 \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = a\int_\Omega u\varphi_1 \, dx + b\int_\Omega v\varphi_1 \, dx + \int_\Omega f(x)\varphi_1 \, dx$$

donc

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi_1 \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = a\int_\Omega u\varphi_1 \, dx + b\int_\Omega v\varphi_1 \, dx + \int_\Omega f(x)\varphi_1 \, dx$$

alors :

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega u\varphi_1 \, dx = b\int_\Omega v\varphi_1 \, dx + \int_\Omega f(x)\varphi_1 \, dx$$

Alors

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega u\varphi_1 \, dx - b\int_\Omega v\varphi_1 \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi_1 \, dx$$

Le deuxième membre de cette équation est positif cela implique que : $\lambda_1 > a$.

De même façon pour la deuxième équation de (S_L), on trouve :

$$(\lambda_1 - d)\int_\Omega v\varphi_1 \, dx = c\int_\Omega u\varphi_1 \, dx + \int_\Omega g(x)\varphi_1 \, dx$$

Alors

$$(\lambda_1 - d)\int_\Omega v\varphi_1 \, dx - c\int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega g(x)\varphi_1 \, dx$$

Le deuxième membre de cette équation est positif cela implique que : $\lambda_1 > d$.

Par la formule de Cramer on obtient (2.6).

Inversement :

On suppose que $f, g > 0$ et (2.5) et (2.6) sont satisfaites :

Multipliant la première équation de système (S_L) par $u^- = \max(0, -u)$ et la deuxième équation par $v^- = \max(0, -v)$ telles que : $u^-, v^- \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega -\Delta u u^- \, dx = a\int_\Omega u u^- \, dx + b\int_\Omega v u^- \, dx + \int_\Omega f(x) u^- \, dx$$

par la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \nabla u^- \, dx &= -\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 \, dx = a\int_\Omega u u^- \, dx + b\int_\Omega v u^- \, dx + \int_\Omega f(x) u^- \, dx \\ &= -a\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx + b\int_\Omega v u^- \, dx + \int_\Omega f(x) u^- \, dx\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 \, dx &= a\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx - b\int_\Omega v u^- \, dx - \int_\Omega f(x) u^- \, dx \\ &= a\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx - b\int_\Omega (v^+ - v^-) u^- \, dx - \int_\Omega f(x) u^- \, dx \\ &\leq a\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx + b\int_\Omega v^- u^- \, dx\end{aligned}$$

et par la caractérisation de λ_1 , on trouve :

$$\lambda_1 \int_\Omega \left|u^-\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx \leq a\int_\Omega \left|u^-\right|^2 dx + b\int_\Omega v^- u^- dx$$

Alors

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx \leq b\int_\Omega v^- u^- dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$0 < (\lambda_1 - a)\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx \leq b\left(\int_\Omega \left|v^-\right|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

De même façon pour la deuxième équation :

$$0 < (\lambda_1 - d)\int_\Omega \left|v^-\right|^2 \, dx \leq c\left(\int_\Omega \left|v^-\right|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left|u^-\right|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Par multipliant membre à membre on obtient :

$$0 < (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) \left(\int_\Omega \left| u^- \right|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega \left| v^- \right|^2 \, dx \right) \leq bc \left(\int_\Omega \left| u^- \right|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega \left| v^- \right|^2 \, dx \right)$$

Donc :

$$0 < (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) \left(\int_\Omega \left| u^- \right|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega \left| v^- \right|^2 \, dx \right) - bc \left(\int_\Omega \left| u^- \right|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega \left| v^- \right|^2 \, dx \right) \leq 0$$

Alors

$$((\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc) \left(\int_\Omega \left| u^- \right|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega \left| v^- \right|^2 \, dx \right) \leq 0$$

Ce implique que

$$u^- = v^- = 0, \text{ d'où } u \geq 0, v \geq 0 \text{ sur } \Omega$$

■

2.1.2 L'unicité de solution positive

Nous prouvons ensuite que $(2.5), (2.6)$ sont également conditions nécessaire et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution de (S_L)

Théorème 2.2 *Le système (S_L) sous les hypothèses $(2.1) - (2.4)$ admet une seule solution positive pour $f, g \geq 0$, si et seulement si (2.4) et (2.5) sont satisfaites.*

Preuve. Si le système (S_L) admet une solution positive, d'aprés le théorème précédent les conditions (2.5) et (2.6) sont satisfaites.

Inversement :

Si (2.5) et (2.6) sont satisfaites, on utilise le lemme de Lax-Milgram pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du système (S_L).

Tout d'abord on peut reécrire le système (S_L) comme :

$$\begin{cases} -b^{-1}\Delta u = b^{-1}au + v + -b^{-1}f(x), & \text{dans } \Omega \\ -c^{-1}\Delta v = u + c^{-1}dv + c^{-1}g(x), & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous définissons la forme $L : (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$L((u,v),(w,z)) = \frac{1}{b}\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \frac{a}{b}\int_\Omega uw \, dx - \int_\Omega vw \, dx + \frac{1}{c}\int_\Omega \nabla v \nabla z \, dx - \int_\Omega uz \, dx - \frac{d}{c}\int_\Omega vz \, dx$$

Et la forme $F : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(w,z) = \frac{1}{b}\int_\Omega f(x)w\ dx + \frac{1}{c}\int_\Omega g(x)z\ dx$$

Il est clair que L est une forme bilinéaire symétrique et F est une forme linéaire. On va montrer que L est continue et coercive et F est continue.

La continuité de L :

$$\begin{aligned}
|L((u,v),(w,z))| &= \left|\frac{1}{b}\int_\Omega \nabla u\nabla w\ dx - \frac{a}{b}\int_\Omega uw\ dx - \int_\Omega vw\ dx + \frac{1}{c}\int_\Omega \nabla v\nabla z\ dx - \int_\Omega uz\ dx - \frac{d}{c}\int_\Omega vz\ dx\right| \\
&\leq \frac{1}{b}\int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla w|\ dx + \frac{a}{b}\int_\Omega |u|\,|w|\ dx + \int_\Omega |v|\,|w|\ dx + \frac{1}{c}\int_\Omega |\nabla v|\,|\nabla z|\ dx \\
&\quad + \int_\Omega |u|\,|z|\ dx \ + \frac{d}{c}\int_\Omega |v|\,|z|\ dx
\end{aligned}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|L((u,v),(w,z))| &\leq \frac{1}{b}\left(\int_\Omega |\nabla u|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla w|\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{b}\left(\int_\Omega |u|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w|\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_\Omega |v|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w|\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{c}\left(\int_\Omega |\nabla v|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla z|\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_\Omega |u|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |z|\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{c}\left(\int_\Omega |v|\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |z|\ dx\right) \\
&= \frac{1}{b}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2} + \frac{a}{b}\|u\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{1}{c}\|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla z\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|z\|_{L^2} + \frac{d}{c}\|v\|_{L^2}\|z\|_{L^2} \\
&\leq \left(\frac{1+a}{b}\right)\left(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}\right) + \left(\frac{1+d}{c}\right)\left(\|v\|_{H_0^1} + \|z\|_{H_0^1}\right) \\
&\quad + \left(\|v\|_{H_0^1}.\|w\|_{H_0^1}\right) + \left(\|u\|_{H_0^1} + \|z\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \|w\|_{H_0^1}\left(\frac{1+a}{b}\|u\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}\right) + \|z\|_{H_0^1}\left(\frac{1+d}{c}\|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \max\left(\frac{1+a}{b}, \frac{1+d}{c}, 1\right)\left[\left(\|u\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}\right)\|w\|_{H_0^1} + \left(\|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1}\right)\|z\|_{H_0^1}\right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$|L((u,v),(w,z))| \leq C\left(\|u\|_{H_0^1}+\|v\|_{H_0^1}\right)\left(\|w\|_{H_0^1}+\|z\|_{H_0^1}\right)$$

D'où la continuité de L.

La coercivité de L :

Tout d'abord nous choisissons $m \geq 0$ telle que $a+m>0$ et $d+m>0$ et reécrivons le système (S_L) sous la forme :

$$\begin{cases} -b^{-1}\Delta u = b^{-1}au + b^{-1}mu - b^{-1}mu + v + b^{-1}f(x), & \text{dans } \Omega \\ -c^{-1}\Delta v = u + c^{-1}mv - c^{-1}mv + c^{-1}dv + c^{-1}g(x), & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -b^{-1}(\Delta u - mu) = b^{-1}(a+m)u + v + b^{-1}f(x), & \text{dans } \Omega \\ -c^{-1}(\Delta v - mv) = c^{-1}(d+m)v + u + c^{-1}g(x), & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} L((u,v),(u,v)) &= -\frac{1}{b}\int_\Omega (\Delta u)u\,dx + \frac{m}{b}\int_\Omega u^2\,dx - \frac{1}{b}(a+m)\int_\Omega u^2\,dx - \int_\Omega vu\,dx \\ &\quad -\frac{1}{c}\int_\Omega (\Delta v)v\,dx + \frac{m}{c}\int_\Omega v^2\,dx - \frac{1}{c}(d+m)\int_\Omega v^2\,dx - \int_\Omega uv\,dx \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} L((u,v),(u,v)) &= \frac{1}{b}\int_\Omega (\nabla u)^2\,dx + \frac{m}{b}\int_\Omega u^2\,dx - \frac{1}{b}(a+m)\int_\Omega u^2\,dx - \int_\Omega vu\,dx \\ &\quad -\frac{1}{c}\int_\Omega (\nabla v)^2\,dx + \frac{m}{c}\int_\Omega v^2\,dx - \frac{1}{c}(d+m)\int_\Omega v^2\,dx - \int_\Omega uv\,dx \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} L((u,v),(u,v)) &= \frac{1}{b}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{m}{b}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{b}(a+m)\|u\|_{L^2}^2 - 2\int_\Omega vu\,dx \\ &\quad +\frac{1}{c}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{m}{c}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{c}(d+m)\|v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L((u,v),(u,v)) &\leq \frac{1}{b}\|u\|_m^2 + \frac{1}{c}\|v\|_m^2 - \frac{1}{b}(a+m)\|u\|_{L^2}^2 \\ &\quad -\frac{1}{c}(d+m)\|v\|_{L^2}^2 - 2\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Tel que :

$$\|u\|_m^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + m\,\|u\|_{L^2}^2$$

Et par la caractérisation de λ_1,on a

$$\|u\|_m^2 \geq \lambda_1\,\|u\|_{L^2}^2 + m\,\|u\|_{L^2}^2 = (\lambda_1 + m)\,\|u\|_{L^2}^2$$

Alors

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1 + m}\,\|u\|_m^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}
L((u,v),(u,v)) &\geq \frac{1}{b}\,\|u\|_m^2 + \frac{1}{c}\,\|v\|_m^2 - \frac{1}{b}\frac{(a+m)}{\lambda_1+m}\,\|u\|_m^2 - \frac{1}{c}\frac{(d+m)}{\lambda_1+m}\,\|v\|_m^2 - 2\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} \\
&\geq \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a+m}{\lambda_1+m}\right)\|u\|_m^2 + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{d+m}{\lambda_1+m}\right)\|v\|_m^2 - \frac{1}{\lambda_1+m}\left(\|u\|_m^2 + \|v\|_m^2\right) \\
&\geq \frac{1}{b}\left(\frac{\lambda_1+m}{\lambda_1+m} - \frac{a+m}{\lambda_1+m}\right)\|u\|_m^2 + \frac{1}{c}\left(\frac{\lambda_1+m}{\lambda_1+m} - \frac{d+m}{\lambda_1+m}\right)\|v\|_m^2 \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_1+m}\left(\|u\|_m^2 + \|v\|_m^2\right) \\
&\geq \frac{1}{\lambda_1+m}\left[\frac{\lambda_1-a}{b}\,\|u\|_m^2 + \frac{\lambda_1-d}{c}\,\|v\|_m^2 - \left(\|u\|_m^2 + \|v\|_m^2\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{\lambda_1+m}\left[\left(\frac{\lambda_1-a}{b} - 1\right)\|u\|_m^2 + \left(\frac{\lambda_1-d}{c} - 1\right)\|v\|_m^2\right]
\end{aligned}$$

D'aprés les conditions (2.5), (2.6) on obtient

$$\begin{aligned}
L((u,v),(u,v)) &\geq \min\left(\frac{1}{\lambda_1+m}\right)\left[\left(\frac{\lambda_1-a}{b} - 1\right), \left(\frac{\lambda_1-d}{c} - 1\right)\right]\left[\|u\|_m^2 + \|v\|_m^2\right] \\
&\geq M\left(\|u\|_m^2 + \|v\|_m^2\right) = M\,\|U\|_{V^2}^2
\end{aligned}$$

D'où la coercivité de L.

La continuité de F :

$$|F(w,z)| = \left|\frac{1}{b}\int_\Omega f(x)w\;dx + \frac{1}{c}\int_\Omega g(x)z\;dx\right| \leq \frac{1}{b}\int_\Omega |f(x)|\,|w|\;dx + \frac{1}{c}\int_\Omega |g(x)|\,|z|\;dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|F(w,z)| &\leq \frac{1}{b}\left(\int_\Omega |f(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{c}\left(\int_\Omega |g(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |z|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{b}\|f\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + \frac{1}{c}\|g\|_{L^2}\|z\|_{L^2} \leq \frac{1}{b}\|f\|_{L^2}\|w\|_{H_0^1} + \frac{1}{b}\|g\|_{L^2}\|z\|_{H_0^1} \\
&\leq \max\left(\frac{1}{b}\|f\|_{L^2}, \frac{1}{c}\|g\|_{L^2}\right)\left(\|w\|_{H_0^1} + \|z\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq M\left(\|w\|_{H_0^1} + \|z\|_{H_0^1}\right)
\end{aligned}$$

D'où la continuité de F.
Donc les conditions de lemme de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème (S_L) admet une solution unique $U=(u,v)$ n'importe que $f \geq 0,\ g \geq 0$ par le principe de maximum. ■

2.2 Généralisation à un système de n équations

Dans cette section, nous étudions le principe de maximum et l'existence des solutions positives de système :

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + F & \text{dans } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_{GL}}$$

Où

$$\Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

Nous soulignons que :

$$A=(a_{ij}) \text{ est une matrice coopérative constante } n\times n \tag{2.8}$$

telle que :

$$a_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } i \neq j \tag{2.9}$$

$$F \text{ désigne une matrice colonne avec des éléments } f_i$$

Où

$$f_i \in L^2(\Omega) \tag{2.10}$$

On peut caractérisé la première valeur propre principale simple λ_1 par :

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2\ dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \tag{2.11}$$

Définition 2.1 *On dit que le principe de maximum est vérifié pour le système* (S_{GL}) *si* $F \geq 0$ *et* U *est une solution de* (S_{GL})*, lorsque* $U \geq 0$

Le système (S_{GL}) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j + f_i \quad \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S'_{GL}}$$

2.2.1 Le principe de maximum pour le cas général

Théorème 2.3 *Le système* (S'_{GL}) *sous les hypothèses* $(2.7), (2.10)$ *et* $f_i \geq 0$ *satisfait le principe de maximum si*

$$\textit{la matrice } (\Lambda_1 - A) \textit{ est une M-matrice non-singulière} \tag{2.12}$$

Où

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Preuve. Supposons tout d'abord que $f_i \geq 0$ et $(u_i)_{i=1}^n \in (H_0^1(\Omega))^n$ est la solution de (S'_{GL}). Multipliant (S'_{GL}) par $u_i^- = \max(0, -u_i)$ et intégrant sur Ω. Nous obtenons par la formule de Green

$$\int_\Omega (-\Delta u_i) u_i^-\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i^-\, dx + \int_\Omega f_i u_i^-\, dx$$

Alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_i^-\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i^-\, dx + \int_\Omega f_i u_i^-\, dx$$

Donc

$$\int_\Omega \left|\nabla u_i^-\right|^2 dx = a_{ii} \int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i^-\, dx - \int_\Omega f_i u_i^-\, dx$$

Et ainsi, par (2.11) on trouve

$$\lambda_1 \int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 dx \leq a_{ii} \int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i^-\, dx - \int_\Omega f_i u_i^-\, dx$$

Alors

$$(\lambda_1 - a_{ii}) \int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 dx \leq -\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega (u_j^+ - u_j^-) u_i^-\, dx - \int_\Omega f_i u_i^-\, dx$$

Donc

$$(\lambda_1 - a_{ii}) \int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 \, dx \leq \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j^- u_i^- \, dx$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(\lambda_1 - a_{ii}) \left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \left(\int_\Omega |u_j|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

Qui peut être reécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_1 - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\int_\Omega \left|u_1^-\right|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} \\ (\int_\Omega \left|u_2^-\right|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ (\int_\Omega \left|u_n^-\right|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \leq 0$$

Donc : $u_1^- = u_2^- = \cdots = u_n^- = 0$, alors $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ \cdots,\ u_n \geq 0$. ■

2.2.2 L'exictence et l'unicité de solution positive

Théorème 2.4 *Soient $a_{ij} \geq 0,\ i \neq j$. Le système (S'_{GL}) sous les hypothèses $(2.7) - (2.10)$ et $f_i \geq 0$ a une solution positive unique si la condition (2.12) est satisfaite.*

Preuve. On utilise le lemme de Lax-Milgram pour prouver l'existence et l'unicité de solution du système (S'_{GL}).
Nous considérons la forme bilinéaire $a : (H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \to \mathbb{R}$ défini par

$$a(U,V) = a((u_1,u_1,\ldots,u_n);(v_1,v_2,\ldots,v_n)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \int_\Omega u_i v_i \, dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j v_i \, dx$$

Et la forme linéaire $F : (H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(V) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

La coercivité de a :

On peut choisir $m \geq 0$ tel que $m + a_{ii} > 0$. Alors on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta u_i) u_i \, dx + m \int_\Omega |u_i|^2 \, dx = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \, dx + m \int_\Omega |u_i|^2 \, dx + \int_\Omega f_i u_i \, dx$$

Alors

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \ dx + m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx = a_{ii}\int_\Omega |u_i|^2 \ dx + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \ dx + m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx + \int_\Omega f_i u_i \ dx$$

Donc

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \ dx + m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - a_{ii}\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \ dx - m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx = \int_\Omega f_i u_i \ dx$$

Alors

$$\begin{aligned} a(U,U) &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \ dx \ - \sum_{i=1}^{n} m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \ dx + \sum_{i=1}^{n} m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{i=1}^{n} m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \ dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx - \sum_{i=1}^{n}(m+a_{ii})\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_j u_i \ dx \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$a(U,U) \geq \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx - \sum_{i=1}^{n}(m+a_{ii})\int_\Omega |u_i|^2 \ dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \left(\int_\Omega |u_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Et par la caractérisation de λ_1, on trouve

$$\lambda_1\int_\Omega |u_i|^2 \ dx + m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \leq \int_\Omega |\nabla u_i|^2 \ dx + m\int_\Omega |u_i|^2 \ dx$$

Alors

$$(\lambda_1 + m)\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx$$

Donc

$$\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \leq \frac{1}{\lambda_1 + m}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx \tag{2.14}$$

Par conséquent

$$-\sum_{i=1}^{n}(m+a_{ii})\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \geq -\sum_{i=1}^{n}\frac{(m+a_{ii})}{(\lambda_1+m)}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx$$

Alors

$$\begin{aligned} a(U,U) &\geq \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \left(\int_\Omega |u_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\frac{(m+a_{ii})}{(\lambda_1+m)}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{m+a_{ii}}{\lambda_1+m}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m\,|u_i|^2\right) dx \\ &\quad - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \left(\int_\Omega |u_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

On a :

$$\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \leq \frac{1}{\lambda_1 + m} \int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx$$

Alors par (2.14)

$$\left(\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + m}} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et

$$\left(\int_\Omega |u_j|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + m}} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^2 + m |u_j|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\begin{aligned} -\left(\int_\Omega |u_i|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_j|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \ &\geq \ \frac{1}{\lambda_1 + m} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^2 + m |u_j|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} a(U,U) \ &\geq \ \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{m + a_{ii}}{\lambda_1 + m} \right) \int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx \\ &\quad - \sum_{j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{\lambda_1 + m} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^2 + m |u_j|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (2.12), il s'ensuit que

$$a(U,U) \geq C \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 + m |u_i|^2 \right) dx = C \sum_{i=1}^n \|u_i\|_m^2$$

Où $C > 0$.

La continuité de a :

$$a(U,V) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \ dx - \sum_{i=1}^n a_{ii} \int_\Omega u_i v_i dx - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega u_j v_i \ dx$$

Alors

$$|a(U,V)| \leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\nabla u_i| \, |\nabla v_i| \ dx + \sum_{i=1}^n a_{ii} \int_\Omega |u_i| \, |v_i| \ dx + \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega |u_j| \, |v_i| \ dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|a(U,V)| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega |\nabla u_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla v_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\left(\int_\Omega |u_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}\left(\int_\Omega |u_j|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ \|u_i\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \|u_j\|_{L^2(\Omega)}\right) \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(1+a_{ii}) \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \leq C \|U\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} \|V\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

La continuité de F :

$$F(V) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f_i v_i\ dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
|F(V)| &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |f_i|\,|v_i|\ dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega |f_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v_i|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C \|V\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de F

Donc les conditions de lemme de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème (S'_{GL}) admet une solution unique non négative par le principe de maximum. ■

2.3 L'insertion d'un système elliptique non coopératif dans un système coopératif

Dans cette section, nous utiliserons les résultats de deux sections précédentes pour obtenir le principes de maximum pour une classe de systèmes non coopératifs avec des coefficients constants.
Nous étudions ici un système non coopératif de n équations définies sur $\mathbb{R}^n$ que nous insérons dans un système coopératif de $(n+1)$ équations pour obtenir le principe de maximum
Nous considérons le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ -\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j + f_i \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{S_{NC}}$$

Où
1. pour $1 \leq i, j \leq n,\ a_{ij}$ sont des constantes
2. pour $1 \leq i \leq n,\ f_i \in L^2(\Omega)$.

2.3.1 L'insertion d'un système non coopératif de deux équations dans un système coopératif de trois équations

Nous rédéfinissons le système (S_{NC}) pour $n = 2$.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + f_1 \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta u_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + f_2 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{S}$$

Où a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} sont des constantes réelles.
Hypothèses :
soient les hypothèses suivants :
(H_1) $a_{12} \leq 0$ et $a_{21} \leq 0$.
(H_2) λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$
(H_3) $a_{11} < \lambda_1,\ a_{22} < \lambda_1$
Commençant par le cas le plus simple lorsque $a_{12} \leq 0$ et $a_{21} \leq 0$.
Bien que le système non coopératif, il peut être transformé en un système coopératif pour les inconnus u_1 et $(-u_2)$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = a_{11} u_1 + a_{12}(-u_2) + f_1 \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta(-u_2) = +a_{21} u_1 + a_{22}(-u_2) + f_2 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = a_{11}u_1 - a_{12}u_2 + f_1 & \text{dans } \Omega \\ -\Delta u_2 = -a_{21}u_1 + a_{22}u_2 - f_2 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{S'}$$

Théorème 2.5 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$ *et si* $f_1 \geq 0$ *et* $f_2 \leq 0$ *dans* Ω, *alors* $u_1 \geq 0,\ u_2 \leq 0$ *dans* Ω *tel que* $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *la solution de* (S').

Ensuite, nous considérons le cas difficile qui correspond à

$$a_{12} < 0,\ a_{21} \geq 0 \tag{2.15}$$

Notre objectif principal est de trouver des conditions sur les coefficients du système (S) qui nous donneront le principe de maximum.

Lidéé maintenant est d'inserer le système non coopératif 2×2 dans un système coopératif 3×3

Ensuite, nous appliquons les résultats déja établis pour le système coopératif afin d'obtenir les informations sur le système donné.

Nous introduisons un nouvel inconu $u_3 = \xi_1 u_1 - \xi_2 u_2$ avec $\xi_1 \neq 0,\ \xi_2 \neq 0$ sont des nombres positifs.

Et on a

$$\xi_2 = \frac{-a_{12}}{r},\ s = \frac{-a_{12} + a_{22}\xi_2}{\xi_2}$$

Alors

$$\begin{aligned} -\Delta u_3 &= \xi_1(-\Delta u_1) - \xi_2(-\Delta u_2) = \xi_1(a_{11} - r\xi_1)u_1 + \xi_1(a_{12} + r\xi_2)u_2 \\ &\quad + r\xi_1 u_3 + \xi_1 f_1 - \xi_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + f_2) \\ &= \xi_1 a_{11}u_1 - r\xi_1^2 u_1 + \xi_1 a_{12}u_2 - r\xi_2\xi_1 u_2 + r\xi_1 u_3 + \xi_1 f_1 \\ &\quad - \xi_2 a_{21}u_1 - \xi_2 a_{22}u_2 - \xi_2 f_2 \\ &= (a_{11}\xi_1 - \xi_2 a_{21})u_1 + (a_{12}\xi_1 - a_{22}\xi_2)u_2 + \xi_1 f_1 - \xi_2 f_2 + r\xi_1(-\xi_1 u_1 - \xi_2 u_2 + u_3) \end{aligned}$$

Tel que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (a_{11} - r\xi_1)u_1 + (a_{12} + r\xi_2)u_2 + ru_3 + f_1 \\ -\Delta u_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + f_2 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (a_{11} - r\xi_1)u_1 + (a_{12} + r\xi_2)u_2 + r\xi_1 u_3 + f_1 \\ -\Delta u_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + f_2 \\ -\Delta u_3 = (a_{11}\xi_1 - \xi_2 a_{21})u_1 + (a_{12}\xi_1 - a_{22}\xi_2)u_2 + \xi_1 f_1 - \xi_2 f_2 + r\xi_1(-\xi_1 u_1 - \xi_2 u_2 + u_3) \end{cases}$$

et comme $-\xi_1 u_1 - \xi_2 u_2 + u_3 = 0$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (a_{11} - r\xi_1)u_1 + (a_{12} + r\xi_2)u_2 + r\xi_1 u_3 + f_1 \\ -\Delta u_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + f_2 \\ -\Delta u_3 = (a_{11}\xi_1 - \xi_2 a_{21} - s\xi_1)u_1 + (a_{12}\xi_1 - a_{22}\xi_2 + s\xi_2)u_2 + su_3 + (\xi_1 f_1 - \xi_2 f_2) \end{cases}$$

Nous pouvons, sans perte de généralité, prendre $\xi_1 = 1$. Nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (a_{11} - r)u_1 + (a_{12} + r\xi_2)u_2 + ru_3 + f_1 \\ -\Delta u_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + f_2 \\ -\Delta u_3 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + su_3 + f_3 \end{cases} \tag{S_1}$$

Où $f_3 = f_1 - \xi_2 f_2,\ b_1 = a_{11} - \xi_2 a_{21} - s,\ b_2 = a_{12} - a_{22}\xi_2 + s\xi_2$

Le système (S_1) satisfait le principe de maximum si

$$\text{la matrice } (\lambda_1 I - N) \text{ est uneM-matrice non singulière} \tag{2.17a}$$

Où

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} + r\xi_2 & r \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & s \end{pmatrix}$$

Alors le système (S_1) est coopératif si

$$r > 0,\ a_{12} + r\xi_2 = 0 \tag{2.17b}$$

$$b_1 = 0,\ b_2 = 0 \tag{2.18}$$

Alors

$$a_{11} - r < \lambda_1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - a_{11} + r & 0 \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - a_{11} + r & 0 & -r \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - s \end{vmatrix} > 0$$

Donc

$$\lambda_1 - a_{11} + r > 0,\ (\lambda_1 - a_{11} + r)(\lambda_1 - a_{22}) > 0$$

$$(\lambda_1 - a_{11} + r)(\lambda_1 - a_{22})(\lambda_1 - s) > 0$$

Ce implique que

$$\lambda_1 - a_{11} + r > 0,\ \lambda_1 - a_{22} > 0,\ \lambda_1 - s > 0$$

Il resulte de (2.18) que

$$s = r + a_{22}$$

Et comme $\lambda_1 > s$, alors

$$\lambda_1 > r + a_{22} \text{ et } r > a_{11} - \lambda_1$$

Théorème 2.6 *Le système* (S_1) *sous les conditions* (2.15) , $(2.17a)$ *et pour* $0 \leq \xi_2 f_2 \leq f_1$ *satisfait le principe de maximum si*

$$a_{11} - \lambda_1 < r < a_{22} - \lambda_1$$

2.3.2 L'insertion d'un système non coopératif de n équations dans un système coopératif de $(n+1)$ équations

Pour système non coopératif (S_{NC}), nous posons les conditions suivantes

$$\begin{aligned} a_{1j} &< 0 \text{ pour } j = 2, 3, ..., n \\ a_{ij} &\geq 0 \text{ pour } i = 2, 3, ..., n,\ j = 1, 2, 3, ..., n\ ,\ i \neq j \end{aligned} \tag{2.19a}$$

De manière similaire à construire un système coopératif $(n+1) \times (n+1)$, nous présentons l'équation suivante d'une nouvelle variable

$$u_{n+1} = u_1 - \sum_{i=2}^{n} \xi_i u_i$$

Où $\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$ sont des nombres positifs et

$$\xi_i = -\frac{a_{1i}}{r} > 0,\quad i = 1, ..., n \tag{2.19b}$$

Alors

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} &= -\Delta u_1 - \sum_{i=2}^{n} \xi_i(-\Delta u_i) \\ &= (a_{11} - r)u_1 + (a_{12} + r\xi_2)u_2 + \cdots + (a_{1n} + r\xi_n)u_n + ru_n + f_1 \\ &\quad -\xi_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n + f_2) \\ &\quad - \cdots\cdots \\ &\quad -\xi_n(a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n + f_n) \\ &= (a_{11} - \xi_2 a_{21} - \cdots - \xi_n a_{n1} - s)u_1 + (a_{12} - \xi_2 a_{22} - \cdots - \xi_n a_{n2} + s\xi_2)u_2 \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad +(a_{1n} - \xi_2 a_{2n} - \cdots - \xi_n a_{nn} + s\xi_n)u_n + su_{n+1} + (f_1 - \xi_2 f_2 - \cdots - \xi_n f_n) \end{aligned}$$

Alors

$$-\Delta u_{n+1} = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots b_n u_n + s u_{n+1} + f_{n+1}$$

Où

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11} - \xi_2 a_{21} - \cdots - \xi_n a_{n1} - s \\ b_i &= a_{1i} - \sum_{j=2}^{n} \xi_j a_{ji} + s\xi_i \end{aligned}$$

Et

$$f_{n+1} = f_1 - \xi_2 f_2 - \cdots - \xi_n f_n$$

Alors le système (S_{NC}) peut être transformé en système de la forme

$$\begin{cases} -\Delta U = MU + F \quad \text{dans } \Omega \\ U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_3}$$

Où

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} + r\xi_2 & \cdots & a_{1n} + r\xi_n & r \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & s \end{pmatrix}$$

Le système (S_3) est coopératif si

$$\begin{cases} a_{1i} + r\xi_i = 0 \quad \text{tel que} \quad i = 2, .., n \\ b_i = 0 \quad \text{tel que} \quad i = 1, .., n \end{cases} \tag{2.20}$$

Le système (S_3) satisfait le principe de maximum si

$$\text{la matrice } (\lambda_1 I - M) \text{est une M-matrice non singulière} \tag{2.21}$$

Où

$$(\lambda_1 I - M) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} + r & 0 & \cdots & 0 & -r \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_1 - a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 - s \end{pmatrix}$$

Théorème 2.7 *Le système* (S_3) *sous la condition* $(2.19a)$,$(2.19b)$ *et* (2.21), *et pour* $0 \leq \xi_n f_n \leq \cdots \leq \xi_2 f_2 \leq f_1$ *satisfait le principe de maximum si*

$$a_{11} - \lambda_1 < r < \lambda_1 - \ a_{ii}, \quad \textit{pour tout } i = 2, 3, ..., n$$

2.4 Système semi-linéaires

Dans cette chapitre, nous adaptons la méthode des sous et sur solutions, pour prouver l'existence de solutions pour le système coopératif semi-linéaire.

2.4.1 Le principe de maximum pour les systèmes semi-linéaires et l'existence d'une solution positive

Considérons le système :

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + f(u,v), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + g(u,v), & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_{SL}}$$

Tels que : a, b, c, d sont des constantes et $b > 0,\ c > 0$ et f, g sont des fonctions localement lipschitziennes telles qu'il existe $M > 0$ satisfaisant :

$$0 \leq f(u,v) \leq M,\ 0 \leq g(u,v) \leq M \quad \text{pour tout } u \text{ et } v \tag{2.22}$$

Définition 2.2 ***(Sous et sur solutions)***
On dit que $(u_0, v_0), (u^0, v^0) \in H$ sont respectivement sous solution et sur solution de (S_{SL}) si :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 \leq au_0 + bv_0 + f(u_0, v),\ v \in (v_0, v^0) \\ -\Delta v_0 \leq cu_0 + dv_0 + g(u, v_0), u \in (u_0, u^0) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} -\Delta u^0 \geq au^0 + bv^0 + f(u^0, v),\ v \in (v_0, v^0) \\ -\Delta v^0 \geq cu^0 + dv^0 + g(u, v^0), u \in (u_0, u^0) \end{cases}$$

Théorème 2.8 *Sous les hypothèses $(2.1) - (2.6)$ et (2.22) il existe au moins une solution positive de système (S_{SL}).*

Preuve. Existence
Il provient de les propositions (1.2) et (1.3) qu'il existe un domaine $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ tel que $\widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1(1, \widetilde{\Omega})$ satisfait :

$$a < \widetilde{\lambda}_1 < \lambda_1,\ d < \widetilde{\lambda}_1 < \lambda_1$$
$$(\lambda_1 - d)(\lambda_1 - a) > (\widetilde{\lambda}_1 - d)(\widetilde{\lambda}_1 - a) > bc \tag{2.23}$$

Et $\widetilde{\varphi}_1$ est la fonction propre positive associée à $\widetilde{\lambda}_1$donc :

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\varphi}_1, & \widetilde{\varphi}_1 > 0 \ \text{ dans } \widetilde{\Omega} \\ \widetilde{\varphi}_1 = 0 & \text{sur } \partial\widetilde{\Omega} \end{cases} \tag{2.24}$$

On pose :

$$\alpha = \inf\left\{\widetilde{\varphi}_1(x) : \ x \in \widetilde{\Omega}\right\} > 0 \tag{2.25}$$

Considérons maintenant le système linéaire

$$\begin{cases} (\widetilde{\lambda}_1 - a)\epsilon - b\delta = \alpha^{-1}M = P > 0 \\ -c\epsilon + (\widetilde{\lambda}_1 - d)\delta = \alpha^{-1}M = P > 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Il résulte que (2.26) a une solution unique. Par la formule de Cramer :

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} (\widetilde{\lambda}_1 - a) & -b \\ -c & (\widetilde{\lambda}_1 - d) \end{vmatrix} = (\widetilde{\lambda}_1 - a)(\widetilde{\lambda}_1 - d) - bc > 0$$

$$\epsilon = \widetilde{D}^{-1}\begin{vmatrix} P & -b \\ P & \widetilde{\lambda}_1 - d \end{vmatrix} = \widetilde{D}^{-1}P\left[(\widetilde{\lambda}_1 - d) + b\right] > 0 \tag{2.27}$$

$$\delta = \widetilde{D}^{-1}\begin{vmatrix} \widetilde{\lambda}_1 - a & P \\ -c & P \end{vmatrix} = \widetilde{D}^{-1}P\left[(\widetilde{\lambda}_1 - a) + c\right] > 0 \tag{2.28}$$

Soit $((u_0, v_0), (u^0, v^0)) = ((0,0), (\epsilon\widetilde{\varphi}_1, \delta\widetilde{\varphi}_1))$ avec $\epsilon,\ \delta$ définie dans $(2.27), (2.28)$ une sous-sur solution couplée.
Il est évident que $(u_0, v_0) = (0,0)$ est une sous solution de système (S_{SL}).
Vérifiant maintenant que $(u^0, v^0) = (\epsilon\widetilde{\varphi}_1, \delta\widetilde{\varphi}_1)$ une sur solution de système (S_{SL}) :
On a : $(u^0, v^0) = (\epsilon\widetilde{\varphi}_1, \delta\widetilde{\varphi}_1)$,
et

$$\begin{aligned} -\Delta u^0 - au^0 - bv^0 &= -\Delta\left(\epsilon\widetilde{\varphi}_1\right) - a\epsilon\widetilde{\varphi}_1 - b\delta\widetilde{\varphi}_1 \\ &= \epsilon(-\Delta\widetilde{\varphi}_1 - a\epsilon\widetilde{\varphi}_1 - b\delta\widetilde{\varphi}_1 \end{aligned}$$

Et comme :

$$-\Delta\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\varphi}_1$$

Alors

$$\begin{aligned} -\Delta u^0 - au^0 - bv^0 &= \widetilde{\lambda}_1\epsilon\widetilde{\varphi}_1 - a\epsilon\widetilde{\varphi}_1 - b\delta\widetilde{\varphi}_1 \\ &= \left[(\widetilde{\lambda}_1 - a)\epsilon - b\delta\right]\widetilde{\varphi}_1 \\ &\geq \left[(\widetilde{\lambda}_1 - a)\epsilon - b\delta\right]\alpha = M \geq f(u^0, v) \end{aligned}$$

Alors

$$-\Delta u^0 - au^0 - bv^0 \geq f(u^0, v), \quad \forall v \in \left[0, v^0\right]$$

De même façon pour la deuxième équation :

$$-\Delta v^0 - cu^0 - dv^0 \geq g(u, v^0),\ \forall u \in \left[0, u^0\right]$$

Donc on a construit une sous et sur solutions tels que :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 < u^0 \\ v_0 &= 0 < v^0 \end{aligned}$$

Alors il existe une solution positive (u, v) tel que :

$$\begin{aligned} u_0 &< u < u^0 \\ v_0 &< v < v^0 \end{aligned}$$

Unicité :

L'unicité de la solution consiste à poser plus des conditions sur le non linéarité de f et g.

Nous supposons qu'il existe des fonctions concaves $(u, v) \longmapsto H(u, v)$ tel que

$$f(u, v) = b\frac{\partial H}{\partial u}(u, v) \quad \text{et} \quad g(u, v) = c\frac{\partial H}{\partial v}(u, v) \tag{2.29}$$

On suppose que (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont deux solutions de (S_{SL}).

On pose $w = u_1 - u_2$ et $z = v_1 - v_2$.

Donc

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = au_1 + bv_1 + f(u_1, v_1), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v_1 = cu_1 + dv_1 + g(u_1, v_1), & \text{dans } \Omega \\ \qquad u_1 = v_1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = au_2 + bv_2 + f(u_2, v_2), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v_2 = cu_2 + dv_2 + g(u_2, v_2), & \text{dans } \Omega \\ \qquad u_2 = v_2 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \Delta u_2 = a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2) \\ -\Delta v_1 + \Delta v_2 = c(u_1 - u_2) + d(v_1 - v_2) + g(u_1, v_1) - g(u_2, v_2) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta w = aw + bz + b\left[\dfrac{\partial H}{\partial u_1}(u_1, v_1) - \dfrac{\partial H}{\partial u_2}(u_2, v_2)\right] & \text{dans } \Omega \\ -\Delta z = cw + dz + c\left[\dfrac{\partial H}{\partial v_1}(u_1, v_1) - \dfrac{\partial H}{\partial v_2}(u_2, v_2)\right] & \text{dans } \Omega \\ \qquad w = z = 0, \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Multipliant la première équation par $\frac{w}{b}$ et le deuxième équation par $\frac{z}{c}$ et intégrons par partie, on obtient :

$$b^{-1}\int_\Omega (-\Delta w).w = b^{-1}a\int_\Omega w^2 + \int_\Omega wz + \int_\Omega w\left[\frac{\partial H}{\partial u_1}(u_1,v_1) - \frac{\partial H}{\partial u_2}(u_2,v_2)\right]$$

Et

$$c^{-1}\int_\Omega (-\Delta z).z = c^{-1}d\int_\Omega z^2 + \int_\Omega zw + \int_\Omega z\left[\frac{\partial H}{\partial v_1}(u_1,v_1) - \frac{\partial H}{\partial v_2}(u_2,v_2)\right]$$

Alors

$$\begin{aligned} b^{-1}\int_\Omega |\nabla w|^2 + c^{-1}\int_\Omega |\nabla z|^2 &= b^{-1}a\int_\Omega w^2 + c^{-1}d\int_\Omega z^2 + 2\int_\Omega wz + \int_\Omega (u_1-u_2)\left(\frac{\partial H}{\partial u_1}(u_1,v_1) - \frac{\partial H}{\partial u_2}(u_2,v_2)\right) \\ &\quad + \int_\Omega (v_1-v_2)\left(\frac{\partial H}{\partial v_1}(u_1,v_1) - \frac{\partial H}{\partial v_2}(u_2,v_2)\right) \end{aligned}$$

Et par la caractérisation de la première valeur propre, on a :

$$\lambda_1 \|w\|^2 \leq \|\nabla w\|^2$$

Donc :

$$b^{-1}\int_\Omega |\nabla w|^2 + c^{-1}\int_\Omega |\nabla z|^2 \geq b^{-1}\lambda_1\int_\Omega w^2 + c^{-1}\lambda_1\int_\Omega z^2$$

Et

$$b^{-1}a\int_\Omega w^2 + c^{-1}d\int_\Omega z^2 + 2\int_\Omega wz \geq b^{-1}\lambda_1\int_\Omega w^2 + c^{-1}\lambda_1\int_\Omega z^2$$

Alors

$$b^{-1}(\lambda_1 - a)\int_\Omega w^2 + c^{-1}(\lambda_1 - d)\int_\Omega z^2 \leq 2\int_\Omega wz \tag{2.30}$$

On choisi θ tel que :

$$c(\lambda_1 - d)^{-1} < \theta^2 < b^{-1}(\lambda_1 - a)$$

On a

$$\theta^2 < b^{-1}(\lambda_1 - a) \Rightarrow \theta^2\int_\Omega w^2 < b^{-1}(\lambda_1 - a)\int_\Omega w^2$$

Et

$$c(\lambda_1 - d)^{-1} < \theta^2 \Rightarrow \frac{1}{\theta^2} < c^{-1}(\lambda_1 - d)$$

Donc

$$\frac{1}{\theta^2}\int_\Omega z^2 < c^{-1}(\lambda_1 - d)\int_\Omega z^2$$

Alors

$$\theta^2\int_\Omega w^2 + \frac{1}{\theta^2}\int_\Omega z^2 < b^{-1}(\lambda_1 - a)\int_\Omega w^2 + c^{-1}(\lambda_1 - d)\int_\Omega z^2$$

Par (2.30), on trouve :

$$b^{-1}(\lambda_1 - a)\int_\Omega w^2 + c^{-1}(\lambda_1 - d)\int_\Omega z^2 \leq \theta^2\int_\Omega w^2 + \frac{1}{\theta^2}\int_\Omega z^2 < b^{-1}(\lambda_1 - a)\int_\Omega w^2 + c^{-1}(\lambda_1 - d)\int_\Omega z^2$$

Donc : $w = z = 0$.
D'où l'unicité de la solution. ■

Remarque 2.1 *La condition* (2.29) *est satisfaite en particulier si* f *(resp* g*) dépend uniquement de* u *(resp* v*) et décroissante pour* $u > 0$ *(resp* $v > 0$*)*

Remarque 2.2 *Si* $f(0,0) = g(0,0) = 0$*, le système* (S_{SL}) *possède toujours la solution triviale* $u = v = 0$*; le même pour* (S_{SL}) *sous l'hypothèse* (2.22)*. Donc des conditions* $f(0,0) > 0,\ g(0,0) > 0$*, associées à* (2.22) *et* (2.29) *assurent l'existence et l'unicité d'une solution positive non triviale de* (S_{SL})

2.5 Généralisation à un système de n équations

Nous utilisons la méthode de sous-sur solution, pour prouver l'existence de solutions pour le système coopératif semi-linéaire à n équations.
Soit le système

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (S'_{SL})$$

Hypothèses : on suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $\vartheta_i \in L^2(\Omega),\ \vartheta_i > 0,\ \exists\, M > 0$ tel que

$$(\Lambda_1 - (A + MI)) \text{ est une M-matrice non singulière} \qquad (2.31)$$

$$0 \leq f_i(x, U) = f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n)) \leq Mu_i + \vartheta_i \text{ pour } u_i \geq 0 \qquad (2.32)$$

$$f_i \text{ sont des fonctions Lipschitziennes} \qquad (2.33)$$

Théorème 2.9 *Le système* (S'_{SL}) *a aux moins une solution positive si les conditions* $(2.9), (2.31) - (2.33)$ *sont satisfaites*
Où Λ_1 *est défini par la relation* (2.13) *et* I *la matrice d'identité.*

Preuve. On ultilise la méthode de sous et sur solutions.

Considérons maintenant le système :

$$\begin{cases} (-\Delta + mI)u_i = (m + a_{ii})u_i + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + Mu_i + \vartheta_i \text{ dans } \Omega \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S''_{SL}}$$

Il résulte du théorème (2.4) que sous la condition (2.31) le système (S''_{SL}) a au moins une solution positive

$$U^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$$

Par $(2.32),\ U^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$ est une sur solution, (i.e)

$$-\Delta u_i^0 \geq a_{ii}u_i^0 + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_j^0 + f_i(x, (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)) \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.34}$$

évidement par $(2.32),\ U_0 = (0, 0, ..., 0)$ est une sous solution, (i.e) :

$$-\Delta u_{i0} \leq a_{ii}u_{i0} + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_{j0} + f_i(x, (u_{10}, u_{20}, ..., u_{n0})) \quad \text{dans } \Omega \tag{2.35}$$

On défini l'opérateur compact T tel que

$$T : [U_0, U^0] \longrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^n$$

$$T : U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = TU \tag{2.36}$$

Où V est la solution unique de système suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta + mI)v_i = (m + a_{ii})u_i + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n)) \quad \text{dans } \Omega \\ v_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S^*_{SL}}$$

Où $m \geq 0$, $m + a_{ii} > 0$.L'équation de système (S^*_{SL}) peut être réécrite comme

$$v_i = (-\Delta + mI)^{-1}\left[(m + a_{ii})u_i + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n))\right]$$

Il résulte de (2.32) et par le cas scalaire que TU est bien défini
Nous prouvons maintenant que T est un opérateur continue et donc par (2.33) et par la compacité des opérateurs $(-\Delta + mI)^{-1},\ T$ est compact.
Soient $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes dans $(L^2(\Omega))^n : \forall\ 1 \leq i \leq n,\ u_{ik} \longrightarrow u_i.$

On pose $T(U_k) = V_k$ et $T(U) = V$

$$\begin{aligned}(-\Delta + mI)(v_{ik} - v_i) &= (m + a_{ii})(u_{ik} - u_i) \\ &\quad + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}(u_{jk} - u_j) + f_i(x,(u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{nk})) - f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n))\end{aligned}$$

Nous multiplions chaque équation par $(v_{ik} - v_i)$ et intégrons sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\Delta + mI)(v_{ik} - v_i)(v_{ik} - v_i) &= (m + a_{ii}) \int_\Omega (u_{ik} - u_i)(v_{ik} - v_i) \\ &\quad + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \int_\Omega (u_{jk} - u_j)(v_{ik} - v_i) \\ &\quad + \int_\Omega \left[f_i(x,(u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{nk})) - f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n))\right](v_{ik} - v_i)\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwatz on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(v_{ik} - v_i)|^2 + m\int_\Omega |v_{ik} - v_i|^2 &= (m + a_{ii}) \left(\int_\Omega (v_{ik} - v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (u_{ik} - u_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \left(\int_\Omega (u_{jk} - u_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (v_{ik} - v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_\Omega \left[f_i(x,(u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{nk})) - f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n))\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int_\Omega (v_{ik} - v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Alors

$$\|v_{ik} - v_i\|_m^2 \leq \|v_{ik} - v_i\|_{L^2(\Omega)} \left[\begin{array}{c}(m + a_{ii}) \|u_{ik} - u_i\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} \|u_{jk} - u_j\|_{L^2(\Omega)} \\ + \|f_i(x,(u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{nk})) - f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n))\|_{L^2(\Omega)}\end{array}\right]$$

Par (2.33)

$$\|v_{ik} - v_i\|_m^2 \leq C \sum_{j=1}^{n} \|u_{jk} - u_j\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ si } k \longrightarrow +\infty$$

$[U_0, U^0]$ est un intérvalle invariant par T : $T([U_0, U^0]) \subseteq [U_0, U^0]$

Il résulte de (2.32) que $1 \leq i \leq n$, $f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n)) \geq 0$ pour tout $u_i \geq 0$, donc pour $U \geq U_0$ on obtient

$$\left[(m + a_{ii})u_i + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x,(u_1, u_2, ..., u_n))\right] \geq 0$$

Puis appliquer le principe de maximum, on obtient

$$TU \geq U_0 = (0, 0, ..., 0)$$

Nous montrons que $0 \leq U \leq U^0$ implique que $TU \leq U^0$.
Nous soustrayons (2.35) de l'équation de système (S^*_{SL}) :

$$(-\Delta + mI)(u_i^0 - v_i) = (m + a_{ii})(u_i^0 - u_i) + \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij}(u_j^0 - u_j) + Mu_i^0 + \vartheta_i - f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n))$$

Bien sur

$$(m + a_{ii})(u_i^0 - u_i) + \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij}(u_j^0 - u_j) \geq 0$$

Par (2.32)

$$0 \leq f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n)) \leq Mu_i + \vartheta_i$$

Donc

$$(-\Delta + mI)(u_i^0 - v_i) \geq 0$$

Par le cas scalaire $u_i^0 - v_i \geq 0$, alors $[U_0, U^0]$ est un intérvalle invariant par T
Puisque $[U_0, U^0]$ est convex, borné et fermé dans $(L^2(\Omega))^n$, on peut appliquer le théorème de point fixe de Schauder qui donne l'existence d'au moins une solution dans $[U_0, U^0]$ ■
Pour prouver l'unicité, nous supposons qu'il existe une fonction concave

$$(u_1, u_2, ..., u_n) \longrightarrow H(x, u_1, u_2, ..., u_n)$$

telle que

$$f_i(x, (u_1, u_2, ..., u_n)) = \frac{\partial H}{\partial u_i}(x, u_1, u_2, ..., u_n) \tag{2.37}$$

Théorème 2.10 *le système (S'_L) a une solution unique si les conditions $(2, 3), (2.31) - (2.33)$ et (2.37) sont satisfaites*

Preuve. Si $(\lambda_1 I - (A + MI))$ est une M-matrice non singulière, $(\lambda_1 I - A)$ est aussi une M-matrice non singulière alors nous considérons une matrice diagonale D telle que $(\lambda_1 I - A)^t D + D(\lambda_1 I - A)$ est définie positive
Supposons que $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ sont solutions de (S'_L) ; on pose $W = U - V$ alors

$$-\Delta w_i = a_{ii} w_i + \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} w_j + \left(\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_1, u_2, ..., u_n) - \frac{\partial H}{\partial v_i}(u_1, u_2, ..., u_n) \right)$$

multipliant chaque équation par $d_i w_i$ et ajoutant les n équations, on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i \int_\Omega |\nabla w_i|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} d_i a_{ii} \int_\Omega w_i^2 + \sum_{j \neq i}^{n} d_i a_{ij} \int_\Omega w_i w_j + \sum_{i=1}^{i=n} d_i \int_\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_1, u_2, ..., u_n) - \frac{\partial H}{\partial v_i}(u_1, u_2, ..., u_n) \right) w_i$$

Par (2.37) on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i(\lambda_1 - a_{ii}) \int_\Omega w_i^2 \leq \sum_{j \neq i}^{n} d_i a_{ij} \int_\Omega w_i w_j \leq \sum_{j \neq i}^{n} d_i a_{ij} \int_\Omega w_i^2 \int_\Omega w_j^2$$

On pose $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $x_i = \int\limits_\Omega w_i^2$, on prend

$$X^t D(\lambda_1 I - A)X \leq 0$$

ou équivalent

$$X^t((\lambda_1 I - A)^t D + D(\lambda_1 I - A))X \leq 0$$

Donc $(\lambda_1 I - A)^t D + D(\lambda_1 I - A)$ est définie positive, ça suit $X = 0$ $(w_i = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq n)$ ■

Chapitre 3

L'étude des systèmes elliptiques intervenant le p-Laplacien

3.1 Le principe de maximum et l'existence d'une solution positive pour une seule équation

Dans cette partie par donner $p > 1$, nous étudions l'équation non-linéaire (S_{NL}).

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = a\psi_p(u) + f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_{NL}}$$

Où a est une constante, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $\psi_p(u) = |u|^{p-2}u$ et $f \in L^{p*}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
On indique par φ_1 la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(p,\Omega)$ normalisée par :

$$\|\varphi_1\| = 1$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_1 = \lambda_1 \psi_p(\varphi_1) = \lambda_1(p,\Omega).{\varphi_1}^{p-1}, \ \ \varphi_1 > 0 \\ \varphi_1 = 0 \quad \text{sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Rappelons que $\lambda_1(p,\Omega)$ est positive et simple, et par la caractérisation variationnelle de la première valeur propre $\lambda_1(p,\Omega)$, on obtient :

$$\lambda_1 \|u\|^p \leq \|\nabla u\|^p \tag{3.2}$$

Et l'inégalité est satisfait si et seulement si :

$$u = k\varphi_1 \tag{3.3}$$

3.1.1 Le principe de maximum

Nous prouvons le principe de maximum pour le p-Laplacien, qui est une extension naturelle de celui où $p = 2$.
Nous nous intéressons à la forme suivante du principe de maximum, l'hypothèse $f \geq 0$ sur Ω implique $u \geq 0$ pour toute solution u de (S_{NL})

Théorème 3.1 *Pour $f \in L^{p'}(\Omega)$, le principe de maximum est vérifié pour le système (S_{NL}) si est seulement si*

$$a < \lambda_1(p, \Omega)$$

Preuve. Supposons que $a > \lambda_1(p, \Omega)$ et $-\varphi_1 \leq 0$.
On a

$$\Delta_p \varphi_1 = -\lambda_1 \psi_p(\varphi_1) = -a\psi_p(\varphi_1) + f$$

Donc : $f = (a - \Lambda)\psi_p(\varphi_1)$ est non négative et jamais $(-\varphi_1)$ satisfait (3.1) et aussi le principe de maximum n'est pas satisfait.

Inversement :
Supposons que $a < \lambda_1(p, \Omega)$
Multiplions l'équation de système (S_{NL}) par u^- et intégrons sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega (-\Delta_p u)\, u^- = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- = a\, |u|^{p-2}\, u u^- + \int_\Omega f u^-$$

Et comme $u^- = \max(0, -u)$, alors

$$-\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 = -a \left|u^-\right|^p + \int_\Omega f u^-$$

et d'après (3.2)

$$\lambda_1 \left\|u^-\right\|^p \leq a \left|u^-\right|^p - \int_\Omega f u^- \leq a \left|u^-\right|^p$$

Alors

$$(\lambda_1 - a) \left\|u^-\right\|^p \leq 0$$

Alors $u^- = 0$, $u \geq 0$ ■

3.1.2 L'existence et l'unicité de la solution

Nous établissons maintenant que la même condition $a < \lambda_1(p, \Omega)$ est aussi suffisante pour l'existence d'une solution positive de l'équation quasi-linéaire

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = a\psi_p(u) + f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (S'_{NL})$$

Où

$$f \text{ est une fonction } \textbf{Carathéodory} \tag{3.4}$$

Il existe $M > 0$ et $0 \leq \sigma < 1$ satisfait la condition

$$0 \leq f(x,u) \leq M(1+|u|^{\sigma(p-1)}) \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et } u \geq 0 \tag{3.5}$$

Corollaire 3.1 *Si $\lambda_1(p,\Omega) > \gamma > 0$,il existe certains $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ tel que*

$$\gamma < \lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) < \lambda_1(p,\Omega)$$

Il résulte de les propositions (1.1) et (1.2), qu'il existe un domaine $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ tel que $\widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1(p,\widetilde{\Omega})$ satisfait

$$a < \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) < \lambda_1(p,\Omega) \tag{3.6}$$

Si $\widetilde{\varphi}_1$ la fonction propre associée à $\widetilde{\lambda}_1$ et normalisée par $\|\widetilde{\varphi}_1\|_\infty = 1$, alors comme (S'_{NL}), $\widetilde{\varphi}_1$ satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta_p\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\lambda}_1\psi_p(\widetilde{\varphi}_1) = \widetilde{\lambda}_1(p,\widetilde{\Omega}).{\widetilde{\varphi}_1}^{p-1}, \quad \widetilde{\varphi}_1 > 0 \quad \text{dans } \widetilde{\Omega} \\ \widetilde{\varphi}_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\widetilde{\Omega} \end{cases} \tag{3.7}$$

et elle sera borné sur $\widetilde{\Omega}$ par le nombre positif :

$$\beta = \inf\left\{\widetilde{\varphi}_1(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}\right\} > 0 \tag{3.8}$$

m et δ sont des nombres donné satisfaisants

$$a + m > 0 \tag{3.9}$$

$$(\delta\beta)^{p-1}(\widetilde{\lambda}_1 - a) \geq M(1+|u|^{\sigma(p-1)})$$

alors

$$(\delta\beta)^{p-1} \geq (\widetilde{\lambda}_1 - a)^{-1}M(1+|u|^{\sigma(p-1)}) \tag{3.10}$$

On défini l'opérateur T par

$$T : u \longrightarrow (-\Delta_p + m\psi_p)^{-1}\left[(a+m)\psi_p(u) + f(x,u)\right] \tag{3.11}$$

T est bien défini en $L^P(\Omega)$.

Théorème 3.2 *Le système (S'_{NL}) a une solution positive faible sous les conditions $(3.5) - (3.11)$, et la proposition précédente et du corollaire (3.1) si*

$$\lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) > a$$

Preuve. Nous procédons en trois étapes :

1) Construction de sous -sur solution pour (S'_{NL})

Soient $(u_0, u^0) = (0, \delta\widetilde{\varphi}_1)$ sous-sur solution couplée.

En effet par (3.5) on a $u_0 = 0$ est une sous solution de (S'_{NL}).

On prouve que $u^0 = \delta\widetilde{\varphi}_1$ est une sur solution de (S'_{NL}), c'est-à-dire

$$-\Delta_p u^0 - a\psi_p(u^0) - f(x, u^0) \geq 0 \tag{3.12}$$

Par $(S'_{NL}), (3.5) - (3.10)$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\Delta_p u^0 - a\psi_p(u^0) - f(x, u^0) &= -\Delta_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - a\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - f(x, \delta\widetilde{\varphi}_1) \\
&\geq \widetilde{\lambda}_1\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - a\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - M(1 + |u|^{\sigma(p-1)}) \\
&= (\widetilde{\lambda}_1 - a)\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - M(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)}) \\
&\geq (\widetilde{\lambda}_1 - a)\psi_p(\delta\beta) - M(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)}) \\
&= (\widetilde{\lambda}_1 - a)\,|\delta\beta|^{p-1} - M(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)})
\end{aligned}$$

Et on a par (3.10) on trouve

$$(\widetilde{\lambda}_1 - a)(\delta\beta)^{p-1} - M(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)}) \geq 0$$

2) L'opérateur T défini en (3.11) envoie l'intérvalle $[0, \delta\widetilde{\varphi}_1]$ en lui même (i.e) :

$$T\left([0, \delta\widetilde{\varphi}_1]\right) \subseteq [0, \delta\widetilde{\varphi}_1]$$

Pour prouver cela : soit $u \in [0, \delta\widetilde{\varphi}_1]$ et $v = Tu$; de la monotonie du pseudo-Laplacien et par (3.8) et (3.9), et comme $(v - \delta\widetilde{\varphi}_1)^+ = \max(v - \delta\widetilde{\varphi}_1, 0)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega - \Delta_p(v) + m\psi_p(v) + \Delta_p(\delta\widetilde{\varphi}_1) - m\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1)\right)(v - \delta\widetilde{\varphi}_1)^+ \\
= \;& m\int_\Omega \left(\psi_p(v) - \psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1)\right)(v - \delta\widetilde{\varphi}_1)^+ \\
\leq \;& \int_\Omega \left((a+m)\psi_p(u) + f(x,u) - (\widetilde{\lambda}_1 + m)\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1)\right)\cdot(v - \delta\widetilde{\varphi}_1)^+ \\
\leq \;& \int_\Omega \left((a+m)\psi_p(u) + M(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)}) - (\widetilde{\lambda}_1 + m)\psi_p(\delta\widetilde{\varphi}_1)\right)(v - \delta\widetilde{\varphi}_1)^+
\end{aligned}$$

De la monotonie de ψ_p, on en déduit

$$v \leq \delta\widetilde{\varphi}_1$$

De même (ou par le principe de maximum) $v \geq 0$.

3) T est compact

L'injection compact de $W_0^1(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$ est compact.
Par conséquent, il résulte du théorème de points fixes de Schauder qu'il existe au moins une solution positive.
De plus, $u > 0$ dans Ω et la dérivée normale est négative sur $\partial\Omega$
Pour montrer l'unicité, nous avons besoin d'une autre hypothèse :

$$u \longrightarrow \frac{f(x,u)}{u^{p-1}} \text{ est une fonction décroissante} \tag{3.13}$$

Supposons que $u_1 > 0,\ u_2 > 0$ sont deux solutions de (S_{NL}), alors par (3.10) on obtient

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p(u_1)}{u_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p(u_2)}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p) = \int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1^{p-1}} + \frac{f(x,u_2)}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)$$

Mais, par **Diaz** et **Saa** (voir *[14]*)

$$\Im(u_1,u_2) = \int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p(u_1)}{u_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p(u_2)}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p) > 0, \text{ si } u_1 > 0,\ u_2 > 0,\ u_1 \neq k u_2$$

De sorte que nécessairement, $k = 1$; remplacement en (S'_{NL}), on trouve

$$k = 1, \text{ ou } u_1 = u_2$$

■

3.2 Le principe de maximum et l'existence d'une solution positive pour le p-Laplacien

Soit le système

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left|u_j\right|^{p-2} u_j + f_i(x,u_1,u_2,\ldots,u_n) \quad \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_{PL}}$$

qui est peut aussi être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p U = A\psi_p(U) + F \quad \text{dans } \Omega \\ U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S'_{PL}}$$

Où U (resp F) désigne une matrice de colonne avec des éléments u_i(resp f_i), $\psi_p(U)$ une matrice colonne avec des éléments $\psi_p(u_j) = \left|u_j\right|^{p-2} u_j$ et $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$. Comme si-dessus, $p > 1$.
De plus, nous supposons que les coefficients a_{ij} sont constants et

$$a_{ij} \geq 0 \text{ pour } i \neq j \tag{3.14}$$

$$f_i \in L^{P^*}(\Omega) \tag{3.15}$$

3.2.1 Le principe de maximum

Théorème 3.3 *Le principe de maximum est vérifié pour le système* (S_{PL}) *sous les conditions* $(3.14), (3.15)$ *si et seulement si la matrice carré* $(\lambda_1 I - A)$ *est une M-matrice non singulière avec* $\lambda_1 = \lambda_1(p, \Omega)$

Introduisons d'abord quelques notations et préliminaires techniques.
Pour $1 \leq k \leq n$, nous désignons par B_k a la matrice obtenue en prenant les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes hors de la matrice $B = (\lambda_1 I - A)$
On dit qu'une matrice non singulière $B = (b_{ij})$ est une M-matrice si $b_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j,\ b_{ii} > 0$ et $\det B_k > 0$ pour $1 \leq k \leq n$.

Lemme 3.1 *Soit* $B_n = \lambda I - A$, *supposons que tous les mineurs principaux d'ordre* $j \leq k$ *extraits de* B_n *sont positifs si* $\det B_{k+1} < 0$, *alors pour tous* $Y \in \mathbb{R}^{K+1},\ Y > 0$, *la solution* $X \in \mathbb{R}^{K+1}$ *de l'équation* $B_{k+1}X = Y$ *est négative*

Lemme 3.2 *Si* B_n *est une M-matrice non singulière, alors pour tous* $Y \in \mathbb{R}^n, Y \leq 0$ *(resp* ≥ 0*), la solution* $X \in \mathbb{R}^n$ *de* $B_n X = Y$ *est non positive (resp non négative).*

Preuve. de théorème (3.3)
$1)$ La condition nécessaire :
Nous supposons que le principe de maximum est satisfait, on prouve par induction sur k que tous les mineurs principaux d'ordre k extraits de B_n sont positifs. Il résulte du cas scalaire dans section précédent que le résultat est valable pour $k = 1$.
Supposons maintenant qu'il satisfait pour k.
$i)$ Si $\det\ B_{k+1} < 0$, on choisi $Y \in \mathbb{R}^n$ avec les composants $Y_i = 1$ pour $1 \leq i \leq k+1$, de Y et de $X \in \mathbb{R}^n$ avec les composants X_i, nous dérivons $X' \in \mathbb{R}^{k+1}$ (resp $Y' \in \mathbb{R}^{k+1}$) avec les composants X_i (resp Y_i), $1 \leq i \leq k+1$.
On peut choisi $X_i = 0$ pour $k+2 \leq i \leq n$ alors $B_{k+1}X' = Y'$. Par lemme (1), $X_i < 0$ pour $1 \leq i \leq k+1$.
De plus on peut choisi Y tel que $Y = B_n X$ avec $Y_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ puisque le système est coopératif.
Alors $U = \psi_p(X)\phi$ satisfait

$$-\Delta_p U = \lambda_1 X \psi_p(\phi) = (AX + Y)\psi_p(U) = A\psi_p(U) + F$$

Avec $F = Y\psi_p(\phi) \geq 0$ qui est en contradiction avec le principe de maximum.
$ii)$ Si $\det\ B_{k+1} = 0$, nous considérons avec les mêmes notations que ci-dessus, X' tel que $B_{k+1}X' = 0$.Comme $\det B_k \neq 0,\ X_{k+1} \neq 0$ nous pouvons prendre $X_{k+1} = -1$, alors $B_k X' \leq 0$.

Par lemme (1), $X_i \leq 0$, et nous contredisons le principe de maximum
Il résulte de (i) et (ii) que tous les principaux mineurs d'ordre $k+1$ extraits de B_n sont positifs.
Par conséquent $\Lambda I - A$ est une M-matrice non singulière.
$2)$ La condition suffisante :
Soit $U \in (W_0^1(\Omega))^n$ satisfait (S_{PL}) pour $F \geq 0$.
Multipliant l'équation de (S_{PL}) par u_i^- et intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega (-\Delta_p u_i) u_i^- = \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega |u_j|^{p-2} u_j u_i^- + \int_\Omega f_i u_i^-$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\nabla u_i^-\right|^p &= -\sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega |u_j|^{p-2} u_j u_i^- - \int_\Omega f_i u_i^- \\
&= -\sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^+\right|^{p-2} (u_j^+ - u_j^-) u_i^- - \int_\Omega f_i u_i^- \\
&= -\sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^+\right|^{p-2} u_j^+ u_i^- + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^- - \int_\Omega f_i u_i^- \\
&= -a_{ii} \int_\Omega \left|u_i^+\right|^{p-2} u_i^+ u_i^- - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^+\right|^{p-2} u_j^+ u_i^- + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^- - \int_\Omega f_i u_i^-
\end{aligned}$$

Et comme $\int_\Omega \left|u_j^+\right|^{p-2} u_j^+ u_i^- = 0$ et par (3.14)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\nabla u_i^-\right|^p &= -\sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^+\right|^{p-2} u_j^+ u_i^- + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^- - \int_\Omega f_i u_i^- \\
&\leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^- = a_{ii} \int_\Omega \left|u_i^-\right|^p + \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^-
\end{aligned}$$

Par (3.2) et l'inégalité de Holder :

$$\lambda_1 \int_\Omega \left|u_i^-\right|^p \leq a_{ii} \int_\Omega \left|u_i^-\right|^p + \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^-$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - a_{ii}) \int_\Omega \left|u_i^-\right|^p &\leq \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- u_i^- \\
&\leq \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \left(\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2} u_j^- \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1 \Rightarrow p' = \dfrac{p}{p-1}$

Alors

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - a_{ii})\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p &\leq \sum_{j\neq i}^n a_{ij}\left(\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^{p-2}u_j^-\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \sum_{j\neq i}^n a_{ij}\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Si $\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p \neq 0$, on obtient :

$$(\lambda_1 - a_{ii})\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{\frac{-1}{p}} \leq \sum_{j\neq i}^n a_{ij}\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Alors

$$(\lambda_1 - a_{ii})\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{j\neq i}^n a_{ij}\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Donc

$$(\lambda_1 - a_{ii})\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \sum_{j\neq i}^n a_{ij}\left(\int_\Omega \left|u_j^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Donc la matrice colonne Z avec les éléments $\left(\int_\Omega \left|u_i^-\right|^p\right)^{\frac{1}{p'}}$ satisfait $(\lambda_1 I - A)Z = F$ où $F \leq 0$. Comme $(\lambda_1 I - A)$ est une M-matrice non singulière et par lemme (2) cela implique que $Z \leq 0$ et donc $U \geq 0$. ■

3.2.2 L'existence des solutions positives

Dans cette partie, nous démontrons l'existence de solutions faibles positives pour le système (S_{PL}).

$$f_i(x,U),\ 1 \leq i \leq n \text{ sont des fonctions } \textbf{Carathéodory} \tag{3.16}$$

Et il existe $M > 0$ et $0 \leq \sigma < 1$ satisfaisant

$$0 < f_i(x,U) \leq M(1 + |u|^{\sigma(p-1)})N, \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } u \geq 0. \tag{3.17}$$

Pour prouver le théorème de l'existence, nous utilisons le théorème de point fixe de Schauder.

Définition 3.1 *Soit $A = D + E$ où D est une matrice diagonal et E est une matrice de diagonal 0. On dit que $(U_0, U^0) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^{2n}$ est une sous-sur solution de (S_{NL}) si*

$$U_0 \leq U^0 \text{ sur } \Omega$$

Pour tout $U \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, tel que $U_0 \leq U \leq U^0$, nous avons dans le sens de distribution

$$-\Delta_p U_0 - D\psi_p(U_0) - E\psi_p(U) - F(x,(U \cup U_0)) \leq 0 \leq -\Delta_p U^0 - D\psi_p(U^0) - E\psi_p(U) - F(x,(U \cup U^0)) \tag{3.18}$$

$$U_0 \leq 0 \leq U^0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Où, pour tout $U, V \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^n$, la composante k de $F(x,(U \cup V))$ est

$$F(x,(U \cup V))_k = f_k(x, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

Nous exigons maintenant

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et $(\lambda_1 I - A)$ est une M-matrice non singulière, alors pour tout $F \in L^{P^*}(\Omega)$,le système (S_{PL}) admet une solution non négative*

Preuve. Nous procédons en trois étapes :
1) Construction de sous-sur solution pour (S_{PL}).Par hypothèse $(\lambda_1 I - A)$ est une M-matrice non singulière, par conséquent

$$\lambda_1 > r$$

Où r est la plus grande valeur propre de A.Alors, nous utilisons les propositions (1.1) et (1.2), on peut choisir $\widetilde{\Omega} \supset \Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ tel que $\lambda_1(p,\Omega) > \lambda_1(p,\widetilde{\Omega}) > r$.
Donc

$$(\lambda_1(p,\widetilde{\Omega})I - A) \text{ est une M-matrice non singulière}$$

Nous désignons par $\widetilde{\varphi}_1$ la fonction propre positive associée à $\lambda_1(p,\widetilde{\Omega})$ normalisée : $\|\widetilde{\varphi}_1\| = 1$ et par β sa limite inférieure sur Ω.
On peut choisi $0 < Y < \dfrac{M}{\beta}(1 + |\delta|^{\sigma(p-1)})(1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$
La solution $X \in \mathbb{R}^n$ de

$$(\lambda_1(p,\widetilde{\Omega})I - A)X = Y \tag{3.19}$$

est positive par le lemme (3.2).
Soit $U_0 = 0$ et $U^0 = \psi_p(X)\widetilde{\varphi}_1$.
Par $(3.14), (3.17)$ et (3.19), pour tout $U \in [U_0, U^0]$ on obtient

$$\begin{aligned} -\Delta_p U^0 - D\psi_p(U^0) - E\psi_p(U) - F(x,(U \cup U^0)) &\geq -\Delta_p U^0 - D\psi_p(U^0) - E\psi_p(U) - \beta Y \\ &\geq (\lambda_1(p,\widetilde{\Omega})I - D)\psi_p(U^0) - E\psi_p(U^0) \\ &\quad + E\left[\psi_p(U^0) - \psi_p(U^0)\right] - \beta Y \\ &\geq (\lambda_1(p,\widetilde{\Omega})I - A)\psi_p(\widetilde{\varphi}_1)X - \beta Y \geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent (U_0, U^0) satisfait (3.18).

2) Construction d'un ensemble invariant. En veut d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder.

Soient $\Sigma = [L^p(\Omega)]^n$ et $K = [0, U^0]$

Considérons $m > 0$ tel que $m + a_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Ensuite, nous définissons l'opérateur non linéaire $T : K \longrightarrow \Sigma$ de la manière suivante : pour tout $U \in K, V = TU$ est la solution unique du système

$$\begin{cases} -\Delta_p V + m\psi_p(V) = (mI + A)\psi(U) + F(x, U) \ \text{ dans } \Omega \\ V = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S'_{NL}}$$

En effet, l'existence et l'unicité pour la solution de (S'_{PL}) sont bien connues, de sorte que T est bien défini, de plus pour tout $1 \leq i \leq n$ la composante V_i de V est dans $W_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est positive

En outre

$$T(K) \subset K$$

Comme $U \in [0, U^0]$, par $(3.16), (3.18)$

$$\begin{aligned} 0 \ \geq \ & -\Delta_p V + mI\psi_p(V) - (mI + A)\psi_p(U) + F(x, U) \\ & +\Delta_p U^0 - m\psi_p(U^0) + (mI + D)\psi_p(U^0) + E\psi_p(U) + \beta Y \\ \geq \ & -\Delta_p V + \Delta_p U^0 + mI\left[\psi_p(V) - \psi_p(U^0)\right] - (mI + D)\left[\psi_p(U) - \psi_p(U^0)\right] \\ & +\beta Y - F(x, U) \\ \geq \ & -\Delta_p V + \Delta_p U^0 + mI\left[\psi_p(V) - \psi_p(U^0)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Multiplions (3.20) par $(V - U^0)^+$ et intégrons sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \left[\psi_p(\nabla V) - \psi_p(\nabla U^0)\right]\left[\nabla(V - U^0)^+\right] + m\int_\Omega \left[\psi_p(V) - \psi_p(U^0)\right]\left[(V - U^0)^+\right] \leq 0$$

Comme ψ_p est une fonction décroissante, $(V - U^0)^+ = 0$ et $0 \leq V \leq U^0$

3) T est complètement continue.

D'abord nous prouvons que T est compact

Soit (U_j) une suite bornée dans $\left(L^P(\Omega)\right)^n$, par conséquent $\psi_p(U_j)$ est bornée dans $\left(L^{P'}(\Omega)\right)^n$

Multiplions l'équation de système (S'_{NL}) par $V_j + TU_j$ on obtient

$$\int_\Omega |\nabla V_j|^p + m\int_\Omega |V_j|^p = \int_\Omega (mI + A)\psi_p(U_j)V_j + F(x, U_j)V_j \leq C\left[\int_\Omega |V_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Donc, V_j est bornée dans $(W^{1,p}(\Omega))^n$ et elle possède une sous-suite convergente dans $(L^p(\Omega))^n$

Maintenant, nous prouvons la continuité.
Soit $U_j \longrightarrow U$ dans $L^p(\Omega)$, par théorème de la convergence dominé on obtient

$$F(x,U_j) \longrightarrow F(x,U) \text{ dans } (L^{p'}(\Omega))^n \tag{3.21}$$

$$(mI+A)\psi_p(U_j) \longrightarrow (mI+A)\psi_p(U) \text{ dans } (L^{p^*}(\Omega))^n \tag{3.22}$$

Multiplions (3.20) par $(V_j - V)$ et intégrons sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\psi_p(\nabla V_j) - \psi_p(\nabla V)\right][\nabla(V_j - V)] + m\int_\Omega \left[\psi_p(V_j) - \psi_p(V)\right][(V_j - V)] \\ &= \int_\Omega (mI+A)\left[\psi_p(U_j) - \psi_p(U)\right](V_j - V) + \int_\Omega \left[F(x,U_j) - F(x,U)\right](V_j - V) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Il résulte de $(3.21), (3.22)$ que le coté droit de (3.23) tend vers zéro lorsque j tend vers $+\infty$
C'est bien connu que l'inégalité suivante satisfaite

$$\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n, |\xi - \xi'|^p \leq C\left(\left[|\xi|^{p-2}\xi - |\xi'|^{p-2}\xi'\right](\xi - \xi')\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(|\xi|^p + |\xi'|^p\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.24}$$

Où

$$\begin{cases} \alpha = p & \text{si } 1 \leq p \leq 2 \\ \alpha = 2 & \text{si } \quad p > 2. \end{cases}$$

Par (3.24) et l'inégalité de Holder, appliquée à la partie gauche de (3.24) on obtient

$$\int_\Omega [\nabla V_j - \nabla V]^p + m\int_\Omega |V_j - V|^p \longrightarrow 0 \text{ si } j \longrightarrow +\infty$$

Comme K est un sous-ensemble convexe, borné et fermé de Σ, nous pouvons appliquer le théorème de point fixe de Schauder et obtenir l'existence d'un point fixe de T qui donne l'existence d'au moins une solution de (S_{PL}). ■

.

Conclusion

Le chois des méthodes de résolutions des problèmes des équations différentielles partielle est étroitement lié aux opérateurs démentielles et les contraintes imposées sur les non linéarités. Par exemple les problèmes elliptiques linéaires sont résolubles par le lemme de Lax-Milgram, mais les problèmes semi-linéaires exigent d'autres méthodes comme la méthode de comparaison ou les théorèmes de points fixe du types différents.
Et la vérification du principe de maximum permet d'étudier l'unicité des solutions, et des propriétés qualitatives comme la positivité des solutions.

Bibliographie

[1] **S. Agmon,** Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equation : Bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators. Mathematical Notes. Princeton University Press. 1983.

[2] **G. AllAIRE-F.AlOUGES,** Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, Polycopié du cours MAP 431, Département de Mathématiques Appliquées, Ecole poly technique, 16 Janvier 2015.

[3] **B. Alziary, L. Cardoulis and J. Fleckinger-Pellé,** Maximum principle and existence of solutions for elliptic systems involving Schrödinger operators, Rev. R.Acad. Cienc. Exact. fis. Nat. (Esp), Vol. 91, N°. 1, pp 47-52, 1997 Matemáticas, Presentado por J.I.Diaz, 10 de febrero 1995.

[4] **G. Barles,** Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p-Laplacian, Ann. Fac.Sc.Toulouse, (1988),65-75.

[5] **H. Brezis,** Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson. Parie.

[6] **L. CARDOULIS,** EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR NON-NECESSARILY COOPERATIVE SYSTEMS INVOLVING SCHRÖDINGER OPERATORS, IJMMS 27 : 12 (2001), 725–736, (Received 1 October 1999)

[7] **L. Cardoulis,** Insertion of a non cooperative elliptic system involving Schrödinger operators into a cooperative one, Univ. Toulouse 1 ; pl. A.France, 31042 TOULOUSE CEDEX. Monografias del Seminario Matemático Garcia de Galdeano. 27 : 169-176, (2003).

[8] **T. Cometx,** Stage de L3, Introduction à la Théorie Spectrale, 27 octobre 2014.

[9] **R. Courant and D.Hilbert,** "Methods of Mayhematical Physics", Interscience, New York, 1953.

[10] **F. Dayrens,** Petit rappel sur les inclusions de Sobolev, 5 octobre 2016.

[11] **C. De Coster et J. Tabka,** Introduction à la théorie des sous et des sur solutions, Institut des Sciences et Techniques de Valencienne, année 09/10.

[12] **D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri,** Maximum principles for linear elliptic systems, Quaderno Matematico 177, Dip. Sc. Mat. Univ. Trieste, (1988) ;

[13] [1]**D.G.de Figueiredo (in Campinas) and Mitidieri (in Trieste) (**),** Maximum principles for linear elliptic systems (*).

[14] **J.I. Diaz and J.E.Saa**, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 305, Série I (1987), 521-524.

[15] **D.E. Edmunds and W.D. Evans,** Spectral Theory and Differential Operators. Oxford Science Publications, 1987.

[16] **J. Fleckinger, J. Hernández, F. De Thélin, (Submitted by : Petter Hess),** On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems, Differential and Integral Equations, Volume 8, Number 1, January 1995, pp.69-85.

[17] **T. Gallouët, R. Herbin,** Equations aux dérivées partielles, Master 2 de mathématiques, Université Aix Marseille, Submitted on 10 Sep 2015.

[18] **F.R. Gantmacher,** "Théorie des Matrices", t.2 Dunod, Paris 1966.

[19] **D. Gilbarg and N.S. Trudinger,** "Elliptic Partial Differential Equations of second Order", Springer.

[20] **A. Henrot,** Extremum Problems fo Eigenvalues of Elliptic Operators, Birkhäuser Verlag Basel. Boston. Berlin.

[21] **O. Kavian,** Introduction à la théorie des points Critiques et applications aux problèmes elliptique. Springer-Velag.

[22] **M.H. Lécureux,** Au delà du principe du maximum pour des systèmes d'opérateurs elliptiques, Mathématiques [math]. Université des Sciences Sociales - Toulouse I, 2008. Français, Submitted on 21 May 2011.

[23] **H. Le Dret,** Notes de cours M2-Équations aux dérivées partielles elliptiques, UNIVERSITE PIERRE AND MARIE CURIE, LA SCIENCE A PARIS, 4 mars 2010.

[1](*) Pervenuto in Redazione il 3 giugno 1991.

(**) Indirizzo degli Autori : D.G. de Figueiredo : Departemento de Matematica-Universi-dade de Campinas-Unicamp-Campinas (Brazil) ; E.Mitidieri : Dipartemento di Matematica e Informatica- Università degli Studi di Udine-Via Zanon, 6-33100 Udine (Italy) e Di-partimento di scienze Matematiche- Università degli Studi di Trieste-Piazzale Europa, 1-34100 Trieste (Italy).

[24] **V. MECUM,** OPTIMISATION STATIQUE. LAGRANGE ET CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER, TD d'Economie-Julien Grenet, Ecole Normale Spérieure, Année 2007-2008.

[25] **A. Nowak,** CHARACTERIZATION OF CARATHÉODORY FUNCTIONS, Prace Naukowe Uniwersytetu Slaskiego nr 3106 ; Katowice, Annales Mathematicae Silesianae 27 (2013), 93–98.

[26] **M.H. Protter and H. Weinberger,** "Maximum principles in Differential Equations", Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1967).

[27] **J.P. RAYMOND,** Systèmes Différentiels, résumé de cours, Université Paul Sabatier.

[28] **S. Sakaduchi,** Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, S. 4, 14, (1988), 403-421.

[29] **H.M. Serag and A.H.Qamlo,** Maximum principle and existence of solutions for non-necessarily cooperative systems involving Schrödinger operators, Miskolc Mathematical Notes. Vol. 10 (2009) No. 2, pp. 207-221. Received 13 February 2006.

[30] **H.M. Serag and S.A. Khafagy,** On maximum principle and existence of positive weak solutions for $n \times n$ nonlinear elliptic systems involving degenerated p-Laplacian operators, Turk J Math, 34(2010), 59-71.

[31] **J. Simon,** Régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaire, Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. 3 (1981), 247-274.

[32] **P. Tolksdorf,** Régularity for a more general class of quasilinear elliptic equations, J.Diff. Eqs, 51 (1984), 126-150.

[33] **D. Villemonais,** Probabilité 2. Fonctions mesurables et variables aléatoire, Intégrale de Lebesgue et Espérance, IECL-École des Mines de Nancy, 21 mars 2016.