Table des matières

1 Préliminaires **4**

1.1 **Eléments d'analyse convexe :** 4

1.1.1 Ensemble, Fonction : 4

1.1.2 Programmation mathématique : 6

1.1.3 Existence et Unicité d'une solution : 7

1.1.4 la Conditions d'optimalité : 8

1.2 **Théorie du contrôle optimale** 11

1.2.1 Chronologie de la théorie du contrôle : 11

1.2.2 Quelques éléments du contrôle linéaire :

1.2.3 Problème de contrôle optimal : 15

1.2.4 Contrôle optimale (Cas sans contraintes sur le contrôle) : 18

2 Application des méthodes de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal (cas égalité) **23**

2.1 **Méthode de la trajectoire centrale non réalisable pour la** (CQP) **:** 23

2.2 **Méthode de la trajectoire centrale réalisable pour(CQP) :** 26

3 Application des méthodes de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal (cas égalité et inégalité) **32**

3.1 **L'algorithme de méthode de trajectoire centrale pour les programmations convexes quadratiques :** 32

3.2 **Forme Bolza d'un problème du contrôle optimal avec les contraintes mixtes :** 38
3.3 **Application de méthode de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal :** 39

Introduction

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologique, chimique, économique... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal, ou commande optimale.

Les méthodes de trajectoires centrales joues un rôle important a l'étude pour rechercher le contrôle optimale. Beaucoup des scientifiques essayer s'appuyant sur nombreuses méthodes numériques parmi eux les méthodes de points intérieurs (méthode de trajectoire centrale réalisable, non réalisable)

Ce mémoire est organisé en trois chapitres et s'inscrit dans cette problèmatique.

Dans le premier chapitre On trouve trois sections, à savoir :

1 Étude de la relation entre l'analyse convexe et la théorie de contrôle optimale.

2 Rappelant quelques définitions pour l'analyse convexe et donner un aperçu de la partie théorique du contrôle optimale.

Dans le deuxième chapitre Mettez en évidence les méthode de trajectoire en mettant l'accent sur les méthode suivant :

-Méthode de la trajectoire centrale non réalisable pour le (CQP)

- Méthode de la trajectoire centrale non réalisable pour le (CQP)

- Un exemple appliqué à un problème du contrôle optimale de forme Bolza

Dans le troisième chapitre Application des méthodes de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimale avec contrainte mixte.

Qui s'écrit à la forme de Bolza.

Chapitre 1

Préliminaires

Grâce à cette recherche, nous avons parlé de l'existence d'une relation entre l'analyse convexe et la théorie de contrôle optimale. Il a beaucoup cherchien de scientifiques pour certaines méthodes numériques parmi aux (Newton, Gauss, Cramer, Gradient conjugué...) dans les champs mentionné ci-dessus où nous avons étudié cette relation. Dans ce chapitre on va donner quelques définitions pour l'analyse convexe, Ensemble convexe, Fonction convexe ...ect, on donnée une idée générale de partie théorique de contrôle optimale.

1.1 Eléments d'analyse convexe :

Dans ce que suit nous rappelons quelques notions d'analyse convexe

1.1.1 Ensemble, Fonction :

Ensemble convexe :

Définition 1.1 *On dit que l'ensemble $D \subset H$ est convexe si :*

$$\boxed{\forall\,(x,y) \in D \times D\ \forall t \in [0,1] \qquad tx + (1-t)\,y \in D\ .}$$

Définition 1.2 *Autrement dit D est convexe s'il contient tout "segment "radiant deux quelconques de ses point.*

Un ensemble est dit affine si pour toute paire de point x et y appartenant à

$$\boxed{D, t \in \mathbb{R} : tx + (1-t)\, y \in D\ ,}$$

Un ensemble D est un polyèdre s'il s'écrit comme suite :

$$\boxed{D = \left\{x \in \mathbb{R}^n : P_i^t x \leq \alpha_i, i = 1, ..., m\right\},}$$

où P_i est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et α_i est un scalaire pour $i = 1, ..., m$.

Fonction convexe :

Définition 1.3 *On dit que la fonction convexe $J : D \subset H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si D est convexe et si:*

$$\boxed{\forall\, (x, y) \in D \times D \forall t \in [0, 1] \quad J\left(tx + (1-t)\, y\right) \leq tJ\left(x\right) + (1-t)\, J\left(y\right).}$$

Définition 1.4 *On dit que la fonction $J : D \subset H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est strictement convexe et si*

$$\boxed{\forall\, (x, y) \in D \times D \text{ avec } x \neq y \forall t \in\,]0, 1[\, : J\left(tx + (1-t)\, y\right) < tJ\left(x\right) + (1-t)\, J\left(y\right).}$$

Définition 1.5 *On dit que la fonction J strictement concave sur un ensemble convexe D si $(-J)$ est strictement convexe sur D.*

Définition 1.6 *Soit $J : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe on appelle domaine de J l'ensemble*

$$\boxed{dom\ J \left\{x \in H\ /\ J\left(x\right) < +\infty\right\},}$$

cet ensemble est convexe lorsque le domaine de J est dite propre

1.1.2 Programmation mathématique :

Dans cette partie on va présenter la formule de programmation mathématique (PM) d'un problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min J(x) \\ s.c \\ D = \{x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1...n \text{ et } h_j(x) = 0, j = 1...m\}, \end{cases} \tag{PM}$$

où J, g_i, h_j sont des fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Le tableau suivante contient les propriété de classification de problème d'optimisation d'après les contrainte de programmation mathématique.

Classifiction des problèmes d'optimisation :

Il existe beaucoup d'algorithmes d'optimisation dans différentes application scientifique. Cependant beaucoup de méthodes ne sont valables que pour certains types de problèmes le but est trouver la permutation optimale des variables d'optimisation ($Tableau$). ces problèmes sont connus sous le nom de problème d'optimisation combinatoire :

Caractéristiques	Propiété	*Classification*
Nombre de variables	-Une seule variable -Plus une variable	-Mon variable -Multi variable
Type de variables	-Réelles -Entiéres -Réelles et entiéres -Entiéres avec permution	-Continue -Discréte -Mixte -Combinatoire
Type de fonction objectif	-Linéaire en fonction des variables -Quadratique en fonction de variables -Non linéaire en fonction des variables	-Linéaire -Quadratique -Non linéaire
Formulation du problème	- Soumis à des limitations -Pas des limitations	-Avec contraintes -Sans contrainte

Définition 1.7 *On dit que le problème (PM) est un problème de programmation convexe quand*

les fonctions $J, g_i, i = 1, ..., n$ sont convexe et les fonctions $J, h_j, j = 1, ..., m$ sont affines.

Définition 1.8 *On dit que le problème (PM) est un problème de programmation linéaire quand les fonctions $J, g_i, i = 1, ..., n$, $h_j(x), j = 1...m$ sont affines*

Définition 1.9 *Étant donne le problème non linéaire suivant*

$$\inf \{J(x) : x \in D\},$$

avec

$$\boxed{D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on notera

$$\boxed{\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.}$$

$$\boxed{L(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i=1} g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_{j=1} hj(x), \qquad \lambda \geq 0.}$$

D et $\bar{D}$ sont appelés ensembles des solution réalisables et stricement réalisables,L est le lagrangien associé au problème.

1.1.3 Existence et Unicité d'une solution :

Théorème 1.1 ***Weierstrass** : [2]*

Si D est compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et si f est continue sur D alors (PM) admet au moins une solution optimale globale x^*.

Si D est non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$, f est continue et coércive sur D, ($c'est\text{-}a\text{-}dire : \lim f(x) = +\infty$), alors (PM) admet au moins une solution optimale globale.

Définition 1.10 *Une solution $x^* \in D$ est un minimum globale de (PM) si*

$$\boxed{f(x^*) \leq f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}^n \ ,}$$

la valeur optimale est $f(x^*)$.

Définition 1.11 *Une solution* $x^* \in D$ *est un minimum locale de* (PM) *si*

$$\boxed{f(x^*) \leq f(x) \, \forall x \in D \cap B_\varepsilon(x^*),}$$

où

$$\boxed{B_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\},}$$

est une boule ouvert de rayon ε $(\varepsilon > 0)$ *centrée un* x^*.

Notons que le minimum globale n'est pas nécessairement unique, mais la valeur optimale l'est, par exemple si x *possède une infinité de minimum globaux.*

1.1.4 la Conditions d'optimalité :

Afin d'analyser ou de résoudre d'une manière efficace un problème d'optimisation, il est fondamental de pouvoir disposer des conditions d'optimalité. En effet, celles-ci nous servent non seulement à vérifier la validité des solutions obtenues, mais l'étude de ces conditions aboutit au développement des algorithmes de résolution eux-mêmes. L'approche considérée ici pour l'obtention de conditions est basée sur les notions de descente et de direction admissible. Le développement des conditions d'optimalité en présence des contraintes est basé sur la même intuition que dans le cas sans contraintes : il est impossible de descendre à partir d'un minimum.

On considère le programme mathématique(PM), où J, g_i, h_j, sont des fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et g_i, h_j linéaires.

Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre :

soit H un espace de Hilbert réel et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux-différentiable sur H. Si x^*réalise un minimum $(global$ ou $local)$de J sur H alors $\nabla J(x^*) = 0$.

Condition nécessaire d'optimalité du second ordre :

on suppose que x^*est un minimum $(local)$ de j et que J est deux fois dérivable sur H. Alors

a-$\nabla J(x^*) = 0$ et

b-$\forall x \in H \qquad (D^2 J(x^*) x, x) \geq 0$

Condition suffisante d'optimalité du second ordre :

soit J deux fois dérivable sur H vérifiant $\nabla J(x^*) = 0$ et $\exists \alpha \succ 0$, tel que

$$\forall x \in H \qquad \left(D^2 J(x^*) x, x\right) \geq \alpha \|x\|^2 .$$

Alors la fonction J admet un minimum local strict en x^*

D´érivabilité-notion de gradient

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable, alors on définit le gradient de f en x par $\left[\frac{df}{dx_1}(x), ..., \frac{df}{dx_n}(x)\right]$ On le note $\nabla f(x)$.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est classe C^2 alors on définit la matrice *Hessienne* de f en x par

$$\boxed{H_f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x) & ... & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^2 f}{dx_n dx_1}(x) & ... & \frac{d^2 f}{dx_n^2}(x) \end{pmatrix}.}$$

Théorème 1.2 ***Karush-kuhn-Tucker :*** [**2**]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur D. Si x^* un minimum local du problème (PM), alors, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla hj(x^*) = 0 \\ \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., n \\ h_j(x^*) = 0, j = 1, ..., m \ . \end{cases}$$

Méthode de Newton pour résoudre un système non linéaire :

La résolution du (PM) revient à résoudre le système d'équation non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla h_j(x) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., n \\ h_j(x^*) = 0, j = 1, ..., m \ . \end{cases}$$

Posons

$$\boxed{F(x,\lambda,y)=\begin{pmatrix} \nabla f(x)+ & \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(x)+ & \sum_{j=1}^{m}y_j\nabla h_j(x)= & 0 \\ \lambda_i g_i(x)= & 0 & i= & 1,...,n \\ h_j(x)= & 0 & j= & 1,...,m \end{pmatrix},}$$

où $F:\mathbb{R}^{2n+m}\to\mathbb{R}^{2n+m}$

$$\boxed{(x,\lambda,y)\mapsto\left(\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(x)+\sum_{j=1}^{m}y_j\nabla h_j(x),\lambda_i g_i(x^*),h_j(x)\right).}$$

Les méthodes les plus populaires appliquées pour la résolution d'un système non linéaire est la méthode de Newton, dans ce qui suit décrivons son principe.

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue, différentiable et soit $J(x)$ est la matrice jacobéenne de la fonction f. Alors nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\boxed{f(x)=0.}$$

A partir d'un vecteur x^0 de $\mathbb{R}^n$ et l'utilisation de la formule suivante :

$$\boxed{x^{k+1}=x^k-J\left(x^k\right)^{-1}f\left(x^k\right),}$$

on construit une suite de point définie par

$$\boxed{x^{k+1}=x^k+d^k,}$$

où d^k est le vecteur de direction, avec

$$\boxed{J\left(x^k\right)d^k=-f\left(x^k\right).}$$

1.2 Théorie du contrôle optimale

1.2.1 Chronologie de la théorie du contrôle :

300 avant J.C : la première mise en oeuvre d'un système de commande à contre-réaction (feedback) est l'oeuvre des grecs dans l'antiquité avec des régulations de niveau par flotteur afin de mesurer précisément le temps,

$800 - 1200$: différents ingénieurs Arabes (Al-Jazari, les trois frêres Musa et Ibn al_Sa'ati) utilisent des régulateurs à flotteur pour des horloges à eau et autres applications,

$1600 - 1900$: la révolution industrielle débute réellement avec l'avénement des procédés de commande à contre-réaction. En effet, l'invention de nouveaux mécanismes (moulins à grains de commande perfectionnés allant au-delà de la régulation manuelle.

- Régulation de température (Drebbel-1624, Becher-1680,...).

- Régulation de niveaux (Salmon-1746,Crapper-1775,...).

- Régulation de pression (Papin-1707, Delap-1799, Murray-1803).

- Régulation à gouverme contrifuge (Watt-1788, Siemens-1846, Porter-1858, Hartnell-1872).

$1800 - 1935$: Cette période préclassique de la théorie de la commande fût celle pendant laquelle les principales contributions furent d'ordre mathématique.

On peut parler de mathématisation de la théorie de la régulation.

- Introduction des équations différentielles pour l'étude des systèmes à contre-réaction et mise en évidence du problème de la stabilité des systèmes bouclés (Lagrange), (Hamilton), (Poncelet), (Airy-1840), (Hermite-1854), (Maxwell-1868), (Routh-1877), (Vyshnegradsky-1877), (Hurwitz-1895), (Lyapounove-1892).

- Développement de l'analyse des systèmes dans le domaine fréquentiel (Minorsky-1922), (Black-1927), (Nyquist-1932), (Hàzen-1934).

$1940 - 1960$: La deuxième guerre mondiale a joué le rôle de stimulant intellectuel primordial pour le développement des systèmes de commande et a donné naissance à la période dite classique.

- Développement de la théorie des servomécanismes dans le domaine fréquentiel aux laboratoire des radiations do MIT (Hall-1940), (Nichols-1947) et au laboratoire de Bell Telephone

(Bode-1988).

- Développement de l'analyse stochastique (Kolmogorov-1941), (Wiener et Bigelow-1942).

- Développement de la théorie de l'information (Shannon-1948) et de cybernétique (Wiener-1949).

- Période classique de développement de la théorie des servomécanismes (Smith-1942), (McCall-1945), (Evans-1948), (Ziegler-Nichols-1942), (Truxall-1955).

$1960-1980$: Période moderne avec de développement de l'industrie aéronautique et spatiale. Les techniques fréquentielles classiques ne suffisent plus et des techniques temporelles appropriées doivent être proposées pour faire face aux problèmes non linéaires, temps variant et de commande optimale rencontrés en particulier dans le domaine spatial.

- Théorie de la commande non linéaire (Hamel-1949), (Tsypkui-1955), (Popov-1961), (Yakubovich-1962), (Sandberg-1964), (Narendra-1964), (Dessor-1965), (Zames-1966).

V.M.Popov propose le critère de stabilité (dite de Popov) pour l'étude du problème de stabilité absolue proposé initialement par Lur'e et Postnikov en 1944. Ce travail est prolongé par Yakubovich qui relie les travaux de Popov et ceux de Lur'e. Ces problèmes de stabilité absolue sont à bordés à travers la théorie de la stabilité de Lyapounov alors que les problèmes de stabilité entrée-sortie sont ensentiellement étudiés par Sandberg et Zames donnant naissance aux théorèmes du faible gain, au critère du cercle et de la passivité.

- Théorie de la commande optimale et théorie de l'estimation, introduction du formalisme d'état (Bellman-1957), (Pontryagin-1958), (Kalman-1960).

R.Bellman établit le principe d'optimalité et développe la programmation dynamique pour résoudre les problèmes de commande optimale en temps discret. De son côté L.S. Pontryagin pose les bases de la commande optimale avec le principe du maximum qui généralise l'approche d'Hamilton. R. Kalman introduit les conceptes d'observabilité et de commandabilité (contrôlabilité) insistant, ainsi sur l'importance de la représentation d'état.

Exemple 1.1 ***stabilisation de véhicule***

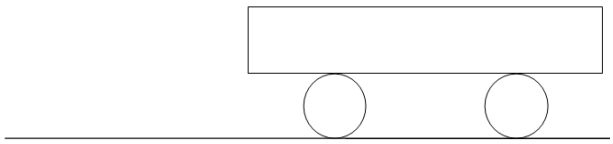


Figure1.1:Véhicule

Se problème revient à l'étude d'une équation différentielle de la forme

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).}$$

Si on peut imaginer que le mobile ne poura attiendre l'origine : on décide alors de s'en rapprocher le plus possible et de formuler le problème au sens des moindres carrés, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \textit{Chercher un contrôle } u \textit{ à temps fixé } T \textit{ solution de} \\ \min\limits_{u \in U_{ab}} \|x[u, x_0](T)\|^2 = \|p[u, x_0](T)\|^2 + \left\|\frac{dp}{dt}[u, x_0](T)\right\|. \end{cases}$$

Nous avons alors affaire à un problème de ***contrôle optimal****.*

1980-L'introduction des capacités de calcul étendues et l'extension des logiciels de simulation et d'assistance à la conception s'est traduite par la réunification des théories classiques et modernes et par l'émergence du problème spécifique de la commande robuste.

- Théorie de la commande H_∞ (Zames-1971), (Doyle-1981).
- Théorie de la valeur singulière structurée (Doyle-1982), (Safonov-1982).
- Introduction de la programmation semi-définie positive.

Exemple 1.2 ***Économie***

L'économie d'un pays est un système constitué d'une population (consommateurs-producteurs), de compagnies, de bourses, ect.L'état de ce système est une collection importante de données (slalaires, profits, coûts de production, taux d'inflation, chômage, ect.)On peut agir sur ce système

en agissant sur les taux, en débloquant des crédits etc. Ces systémes sont toutefois trés difficiles à modiliser du fait de leur complexité.

Exemple 1.3 ***Stockage de l'eau dans un réservoi***

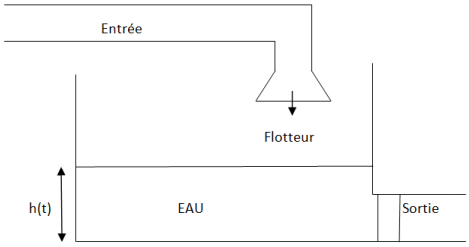


Figure1.2:Réservoir

On considére un résevoir dont le schéma est donné par la figure (1.2) *.Le flotteur régule le niveau de l'eau.L'eau dans le résvoir est le système ;le contrôle est la position du flotteur.L'état à chaque instant est un vecteur constitué par la hauteur de l'eau dans le résevoir* $h(t)$*, le débit d'entrée et débit de sortie de l'eau.*

1.2.2 Quelques éléments du contrôle linéaire :

Représentation des systèmes linéaires à coefficients constants :

On appelle système linéaire contrôlé à coefficients constants la donnée de

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} = Ax + Bu & \text{Equation dynamique} \\ y = Cx + Du & \text{Equation de mesure} \\ x(t_0) = x_0 & \\ G(s) = \left(C(sI - A)^{-1} B + D\right) & \text{La matrice de transfert,} \end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

où $(I, A, B, C, D) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$, avec n, m et $p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur **d'état**, $t_0 \in \mathbb{R}$ est l'instant initial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'état initial du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur **d'entrée (input)**, appelé aussi vecteur de contrôle et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur **de sortie (output)**, appelé aussi vecteur **d'observabilité** et $s \in \mathbb{C}$.

Lorsque les matrices A, B, C et D sont des fonctions d'une variable $t \in \mathbb{R}$, on dira que le système linéaire (1.2.1) est à coefficients variables.

- $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice dynamique.
- $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice de commande ou d'entrée.
- $C(t) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ est la matrice de mesure ou de sortie.
- $D(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est la matrice de transmission directe.

1.2.3 Problème de contrôle optimal :

On se donne à présent un système dont l'état est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), u(t)) & t \in]0, +\infty[, x(0) = x_0 \\ u \in U_{ad}, \end{cases}} \tag{1.2.2}$$

l'équation (1.2.2) a une solution supposée unique ($cf.$ *théorème de cauchy − lipschitz*) notée $x[u, x_0](.)$ .Désormais on fixe x_0.

On se donne alors une fonctionnelle *coût* J (ou objectif), et on cherche une fonction de contrôle qui rend minimale cette fonctionnelle. On choisit J par exemple de la forme

$$\boxed{J(x, u) = \int_0^T \Phi(x(t), u(t))\, dt,}$$

et on cherche à résoudre

$$\boxed{\begin{cases} \min J(x, u) & \\ x = x[u, x_0](.) & \text{Équation d'état.} \\ u \in Uad \subset U_p & \text{contraintes sur le contrôle.} \end{cases}} \tag{P}$$

Où $T > 0$.

Deux question se posent alors :

-résoudre le problème de l'existence d'un contrôle optimal

-trouver un moyen de le calculer s'il existe. Pour cela, on va écrire des condition d'optimalité.

Boucle ouverte :

On considère un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôle optimal qui ne dépend pas a priori de l'état du système à un moment quelconque. Ce type de stratégie peut se résumer par la figure (1.3)

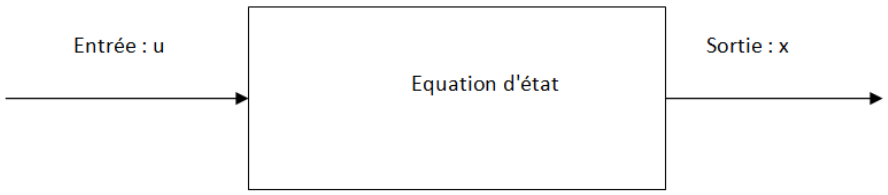


Figure 1.3: boucle ouverte

Boucle fermée :

On considère toujours un système. L'équation d'état retourne une fonction d'état (*contrôlée*) . On introduit alors une loi de commande qui permet d'exprimer la fonction de contrôle précisément en fonction de cet état. L'état du système est pris en compte à chaque instant pour déterminer "en temps réel" la commande. Le contrôle est alors appelé contrôle est alors appelé contrôle est alors appelé contrôle feedback. Cette stratégie est schématisée par la figure (1.4)

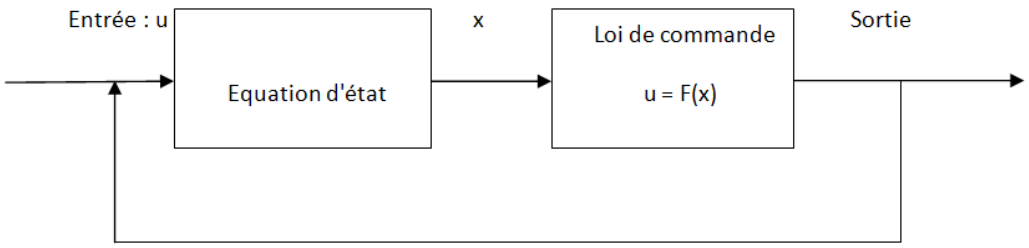


Figure 1.4: boucle fermée

La solution $\overline{v}$ du problème (P) est caractérisée par les conditions d'optimalité du premier

ordre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) + B\overline{v}(t) + f(t) \\ sur\ \ ]0,T[\,, \overline{x}(0) = x_0 \qquad : \text{équation d'état.} \\ \frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^t\overline{p}(t) - Q(\overline{x}(T) - z_d(T)) \\ sur\ \ ]0,T[\,,\ \overline{p}(T) = D(\overline{x}(T) - z_d(T)) \quad : \text{équation adjointe.} \\ \forall v \in U,\ \int_0^T \langle B^t\overline{p}(t) + R\overline{v}(t), v(t)\rangle_p\, dt \geq 0. \end{cases}$$

Cas particulièr fondamental :

On se place dans le cas où

$$\boxed{U = \{v \in L^2(0,T)^p \quad v(t) \in U \ \text{ presque par tout }\},}$$

et où U est convexe fermé de $\mathbb{R}^p$.Alors la relation de

$$\boxed{J'(\overline{v})(v - \overline{v}) = \int_0^T \langle B^t\overline{p} + R\overline{v}(t), v(t) - \overline{v}(t)\rangle_p\, dt \geq 0,} \tag{1.2.3}$$

est équivalente à

$$\boxed{\forall v \in U, pp.t \in [0,T] \qquad \langle B^t\overline{p} + R\overline{v}(t), v - \overline{v}(t)\rangle_p \geq 0.} \tag{1.2.4}$$

Autrement dit, pour presque tout t dans $[0,T]$, Hamiltonien est minimisé pour $v = \overline{v}(t)$.

Théorème 1.3 ***Cauchy-lipschitz : [3]***

Le problème (PM) admet une solution unique.

Démonstration :

C'est un résultat classique d'existence dans espace de Hilbert car J est convexe, continue et coércive et U est (convexe) fermé. L'unicité provient de la stricte convexité de J et de la convexité de U.

On peut toutefois donner une démonstration discrète. Comme J est positive,

$$\boxed{m = \inf_{v \in U} J(v) \geq 0.}$$

Soit V_n une suite minimisant :

$v_n \in U$ et $J(v_n) \to m$.

Grâce la λ convexité, on a

$$\boxed{J\left(\frac{v_n+v_p}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[J(v_n)+J(v_p)\right] - \frac{\lambda}{8}\|v_n - v_p\|_U^2 .}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\lambda}{8}\|v_n - v_p\|_U^2 \leq \frac{1}{2}\left[J(v_n)+J(v_p)\right] - m,}$$

et par passage à la limite on voit que (v_n) est un suite de Cauchy. l'espace des contrôles étant un espace de Hilbert, cette suite converge vers une limite $\overline{v}$ (dans U car U est fermé) . de plus J est continue : on a donc bien $J(\overline{v}) = m$. Supposons qu'on ait deux solution u et v de (PM). l'inégalité de λ convexité donne encore :

$$\boxed{0 \leq \frac{\lambda}{8}\|v_n - v_p\|_U^2 \leq \frac{1}{2}\left[J(v_n)+J(v_p)\right] - m = 0.}$$

1.2.4 Contrôle optimale (Cas sans contraintes sur le contrôle) :

Détaillons ce que deviennent les condition d'optimalité quand il n'y a pas de contrainte sur le contrôle : $U = L^2(0,T)^p$ (ou $U = \mathbb{R}^p$) .

Dans ce cas (1.2.4) nous donne

$$\boxed{\overline{v}(t) = -R^{-1}B^t\overline{p}(t) \qquad \text{presque partout.}}$$

On remarque que le contrôle ne dépend que de la sortie $\overline{x}$ via $\overline{p}$: c'est donc un contrôle $feedback$. Les conditions d'optimalité se réduisent à

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) - BR^{-1}B^t p(t) + f(t) \ \text{ sur } \ ]0,T[\,,\ \overline{x}(0) = x_0 \\ \frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^t\overline{p}(t) - Q\left(\overline{x}(t) - z_d(t)\right) \ \text{ sur } \ ]0,T[\,, \overline{p}(T) = D\left(\overline{x}(T) - z_d(T)\right). \end{cases}} \tag{1.2.5}$$

On va simplifier encore ces équations pour obtenir plus précisément le résultat suivant :

Théorème 1.4 *[3]*

On se place dans le cas sans contraintes sur le contrôle $(U = \mathbb{R}^p)$ *et on suppose en outre que* $f \equiv 0$ *et* $z_d \equiv 0$.

Alors, il existe une unique matrice $p(t)$, $n \times m$, C^1 *sur* $[0,T]$, *telle que la solution* $\overline{v}$ *du problème* (P), *l'état optimal associété* $\overline{x}$ *et l'état adjoint* $\overline{p}$ *vérifient les relations suivantes :*

$$\boxed{\overline{v}(t) = -R^{-1}B^t\overline{p}(t). \qquad \overline{p}(t) = p(t)\,\overline{x}(t), \qquad \forall t \in [0,T].} \tag{1.2.6}$$

La matrice P *est l'unique solution de l'équation différentielle suivante, appelée* (*équation de ricatti*)

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = -A^tP - PA + PBR^{-1}B^tP - Q\ ,}$$

sur $[0,T]$,

$$\boxed{P(T) = D \quad .} \tag{1.2.7}$$

De plus, pour tout $t \in [0,T]$ *la matrice* $P(t)$ *est symétrique semi-définie positive, et elle est définie positive si* D *l'est.*

Démonstration :

Dans le cas où $f \equiv 0$ et $z_d \equiv 0$ les conditions d'optimalité (1.2.5) deviennent

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = A\overline{x}(t) - BR^{-1}B^t\overline{p}(t) \quad \text{sur} \quad]0,T[\,, \overline{x}(0) = x_0 \\ \frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^t\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t) \ \text{ sur } \ ]0,T[\,,\ \overline{p}(T) = D\overline{x}(T). \end{cases}} \tag{1.2.8}$$

La solution $(\overline{x}, \overline{p})$ de (1.2.8) dépend linéairement de x_0 : en effet $\overline{x}$ dépend linéairement de x_0 et $\overline{p}$ dépend linéairement de $\overline{x}$. Comme on est en dimension finie on peut donc écrire, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\boxed{\overline{x}(t) = X(t)\,x_0, \overline{p}(t) = \Pi(t)\,x_0,}$$

où X et Π sont deux applications C^1 de $[0,T]$ dans l'ensemble des matrices $n \times n$. D'autre

part $X(0) = I_n$.

Montrons que $X(t)$ est inversible pour tout $t \in [0,T]$ cela, on va montrer que le noyau de $X(t)$ est réduit à $\{0\}$, pour tout t. Soit donc t^* (*quelconque*) de $[0,T]$ et $x^* \in \ker X(t^*)$ c'est-a-dire $X(t^*)\, x^* = 0$.

Soit $t \in [0, T - t^*]$ et (x,p) définis par :

$$\boxed{x(t) = X(t+t^*)\, x^* \text{ et } p(t) = \Pi(t+t^*)\, x^*.}$$

On vérifie que (x,p) est solution du système (1.2.8), avec $T - t^*$à la place de T et 0 à la place de x^*. Ou le système (1.2.8) qui est linéaire admet aussi $(0,0)$ comme solution. D'après l'unicité de la solution, on en déduit que $x \equiv 0$ et par conséquent $x^* = 0$. On a donc prouvé que la matrice $X(t)$ est inversible pour tout $t \in [0,T]$. On peut donc écrire $x_0 = X^{-1}(t)\, \overline{x}(t)$ pour tout t et

$$\boxed{\overline{p}(t) = \Pi(t)\, x_0 = \Pi(t)\, X^{-1}(t)\, \overline{x}(t).}$$

Posons

$$\boxed{p(t) = \Pi(t)\, X^{-1}(t).}$$

P est de classe C^1 et on peut écrire la deuxième équation de (1.2.8) de la matrice suivante :

$$\boxed{\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^t P(t)\, \overline{x}(t) - Q\overline{x}(t),}$$

sur $]0,T[$, $\overline{p}(T) = D\overline{x}(T)$.

Comme

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{p}}{dt}(t) &= \frac{dp}{dt}(t)\, \overline{x}(t) + p(t)\, \frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{dp}{dt}(t)\, \overline{x}(t) + p(t)\left[A\overline{x} - BR^{-1}B^t\overline{p}(t)\right] \\
&= \frac{dp}{dt}(t)\, \overline{x}(t) + p(t)\, A\overline{x}(t) - p(t)\, BR^{-1}B^t p(t)\, \overline{x}(t),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\boxed{\left(\frac{dp}{dt}(t) + p(t)A - p(t)BR^{-1}B^t p(t)\right)\overline{x}(t) = -\left(A^t p(t) - Q\right)\overline{x}(t),}$$

c'est-a-dire pour tout $t \in [0,T]$

$$\boxed{\left(\frac{dp}{dt}(t) + p(t)A - p(t)BR^{-1}B^t p(t) + A^t p(t) - Q\right)\overline{x}(t) = 0.}$$

D'autre part, cette relation est vraie quel que soit le choix de x_0. comme $\overline{x}(t)$ décrit $\mathbb{R}^n$ lorsque x_0 décrit $\mathbb{R}^n$, on obtient l'équation de Ricatti annoncée. La condition finale est donné par

$$\boxed{\overline{p}(t) = D\overline{x}(T) = p(T)\overline{x}(T),}$$

qui entraîne $P(T) = D$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué à l'équation de Ricatti montre que celle-ci a une solution unique. Comme p^t est aussi solution de cette équation, on déduit par unicité que $p(t)$ est symétrique.

Il reste à montrer la positivité de p. Pour cela, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle \overline{x}(t), \overline{p}(t)\right\rangle_n &= \left\langle \frac{d\overline{x}}{dt}(t), \overline{p}(t)\right\rangle_n + \left\langle \overline{x}(t), \frac{d\overline{p}}{dt}(t)\right\rangle_n \\
&= \left\langle A\overline{x}(t) - BR^{-1}B^t\overline{p}(t), \overline{p}(t)\right\rangle_n - \left\langle \overline{x}(t), A^t\overline{p}(t) + Q\overline{x}(t)\right\rangle_n \\
&= -\left\langle BR^{-1}B^t\overline{p}(t), \overline{p}(t)\right\rangle_n - \left\langle \overline{x}(t), Q\overline{x}(t)\right\rangle_n.
\end{aligned}$$

En intégrant entre t et T on obtient

$$\boxed{\left\langle \overline{x}(t), \overline{p}(t)\right\rangle_n = \left\langle D\overline{x}(T), \overline{x}(T)\right\rangle_n + \int_t^T \left\langle R^{-1}B^t\overline{p}(s), \overline{p}(s)\right\rangle_n ds + \int_t^T \left\langle Q\overline{x}(s), \overline{x}(s)\right\rangle_n ds,}$$

c'ést-à-dire

$$\boxed{\langle \overline{x}(t), \overline{p}(t)\,\overline{x}(t)\rangle_n \geq \langle D\overline{x}(T), \overline{x}(T)\rangle_n \geq 0.}$$

Comme $\overline{x}(t)$ décrit $\mathbb{R}^n$ lorsque x_0 décrit $\mathbb{R}^n$, on obtient la positivité de $p(t)$ ($définie\ si\ D\ l'est\ aussi$).

Chapitre 2

Application des méthodes de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal (cas égalité)

L'objectif principal de ce chapitre est de mettre en évidence l'étroite relation entre la théorie du contrôle optimale et les méthodes de *point intérieurs* suivant :

1- Méthode de la trajectoire centrale non réalisable pour la (CQP)

2- Méthode de la trajectoire centrale réalisable pour la (CQP).

2.1 Méthode de la trajectoire centrale non réalisable pour la (CQP) :

On considère le programme quadratique convexe (CQP) suivant :

$$\boxed{\min\left\{\tfrac{1}{2}x^tQx + c^tx : Ax = b, x \geq 0\right\},} \qquad \text{(CQP)}$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n*n}$ est une matrice symétrique semi définie positive, $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ est une matrice de rang plein, c, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

On associé à (CQP) le problème paramétrisé (CQP_μ) suivant :

$$\boxed{\min\left\{f_\mu(x) : Ax = b, x > 0\right\},} \tag{CQP$_\mu$}$$

où

$$\boxed{f_\mu(x) = \tfrac{1}{2}x^tQx + c^tx - \mu\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i), \mu > 0.}$$

La solution $x(\mu)$ est définie d'une façon unique par des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker(KKT) suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \boxed{Qx + c - \mu X^{-1}e - A^ty = 0} \\ \boxed{Ax = b}. \end{cases}} \tag{KKT}$$

Où $y \in \mathbb{R}^m$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $Ax = b$ du problème (CQP_μ).

Posons : $s = \mu X^{-1}$avec $s \in \mathbb{R}^n_{++}$, le système (KKT) devient :

$$\boxed{\begin{cases} \boxed{Xs = \mu e} \\ \boxed{Ax = b, x > 0} \\ \boxed{A^ty + s = Qx + c, s > 0.} \end{cases}} \tag{S$_\mu$}$$

Notons que (S_μ) correspond aux conditions de complémentarité pour un problème de programmation quadratique primal-dual.

Le système (S_μ) désigne aussi les conditions d'optimalité du problème dual paramétrisé (CQD_μ) suivant :

$$\boxed{\max\left\{b^ty - \tfrac{1}{2}x^tQx + \mu\sum_{i=1}^{n}\ln(s_i) : A^ty + s = Qx + c, s > 0\right\}.} \tag{CQD$_\mu$}$$

En effet, les conditions d'optimalité de(KKT) pour ce dernier problème sont données par :

$$\boxed{\begin{cases} \boxed{b - Ax = 0} \\ \boxed{\mu S^{-1}e - x = 0} \\ \boxed{A^t y + s = Qx + c.} \end{cases}} \qquad (S'_\mu)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n_{++}$est le multiplicateur associé à la contrainte $A^t y + s = Qx + c$ et $S = diag\ (s_1, ...s_n)$.D'où (S'_μ)est équivalent à (S_μ)

Le système (S_μ) est un système d'équations non linéaire. Pour cela, la méthode de Newton est envisageable pour sa résolution. A chaque $\mu > 0$ on trouve une solution approchée$(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$qui doit être réalisable (Conditions de faisabilité).

Pour contrôler la faisabilité et l'optimalité, on introduit la fonction de mérite suivante :

$$\boxed{\phi(x, y, s) = x^t s + \|Ax - b\|_2 + \|A^t y + s - Qx - c\|_2 ..} \qquad (2.1.1)$$

Nous résolvons le système d'équations non linéaire (S_μ) à partir d'un point initial

$$(x^0, y^0) > 0,\ y \in \mathbb{R}^m et \mu^0 = \frac{(x^0)^t s^0}{n},$$

par la méthode de Newton, on obtient le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \boxed{-Q\Delta x + A^t \Delta y + \Delta s = A^t y + s - Qx - c} \\ \boxed{A\Delta x = b - Ax} \\ \boxed{x\Delta s + S\Delta x = -Xs + \mu e,} \end{cases}} \qquad (2.1.2)$$

dont la solution est :$(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$

Le nouvel itéré est :

$$\boxed{(x^+, y^+, s^+) = (x, y, s) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta s),}$$

où $\alpha > 0$ est le pas de déplacement choisi de telle manière que

$$\boxed{(x^+, s^+) > 0 \text{ et } \phi\ (x^+, y^+, s^+) < \phi(x, y, s).}$$

Maintenant, on donne l'algorithme générique de cette méthode.

Algorithme 1 :

Début algorithme

Soit $\varepsilon > 0$(un paramètre de précision) ;

on choisi (x^0, y^0, s^0) tel que :$(x^0, s^0) > 0$

$k = 0$(indices des itérations)

While($\phi\ (x^k, y^k, s^k)) > \varepsilon$ do

1 $\mu^k = \frac{(x^t)^t s^k}{n}$

2 calculer($\Delta x, \Delta y, \Delta s$), solution du système(2.1.2)

3 trouver un pas de déplacement α_k tel que$(x^k, s^k) > 0$ et$\phi\ (x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) < \phi(x^k, y^k, s^k)$

4 mettre à jour $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + \alpha_k(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$

5 posé $k = k + 1$

End While.

Fin algorithme.

2.2 Méthode de la trajectoire centrale réalisable pour(CQP) :

Nous considérons le problème quadratique convexe (CQP) et son dual (CQD) sous forme standard

$$\boxed{\min\left\{\tfrac{1}{2}x^tQx + c^tx : Ax = b, x \geq 0\right\}} \qquad \text{(CQP)}$$

$$\boxed{\max\left\{b^ty - \tfrac{1}{2}x^tQx + c^tx : A^ty + s - Qx = c,\ s > 0,\ y \in \mathbb{R}^m\right\},} \qquad \text{(CQD)}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ est une matrice, $Q \in \mathbb{R}^{n*n}$est une matrice symétrique semi-définie positive $x, s, c \in \mathbb{R}^n$, et $b \in \mathbb{R}^m$.

Nous supposons que les problèmes(CQP) et (CQD) satisfait aux conditions de points strictement intérieurs, il existe une solution initiale(x^0, y^0, s^0)de telle sorte que :

$$Ax^0 = b,\ x^0 > 0,\ A^t y^0 + s^0 = Qx^0 + c,\ s^0 > 0,\ y^0 \in \mathbb{R}^m.$$

Les conditions d'optimalité pour(CQP) et (CQD) sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{Ax = b, x \geq 0} \\ \boxed{A^t y + s - Qx = c, s \geq 0} \\ \boxed{x^t s = 0 \qquad .} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Si la condition (IPC) détiennent, le μ central de(CQP)et(CQD)est définie par la solution$(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ du système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{Ax = b, x \geq 0} \\ \boxed{A^t y + s - Qx = c, s \geq 0} \\ \boxed{xs = \mu e,} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

avec $\mu > 0$ L'ensemble de μ central donne un trajet homotopie, que l'on appelle le chemin (trajectoire) centrale du (CQP) et (CQD) :

Si $\mu \to 0$, la limite de la voie centrale existe depuis le point limite satisfont à la condition de complémentarité, la limite d'un conduit ε solution approchée pour (CQP) et (CQD) :

En appliquant la méthode de Newton pour le système (2.2.2), nous déterminons les équations suivantes pour les directions de descente$(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$

$$\begin{cases} \boxed{A(x + \Delta x) = b} \\ \boxed{A^t(y + \Delta y) + (s + \Delta s) - Q(x + \Delta x) = c} \\ \boxed{(x + \Delta x)(s + \Delta s) = \mu e,} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Le système (2.2.3) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \boxed{A\Delta x = 0} \\ \boxed{A^t \Delta y + \Delta s - Q\Delta x = 0} \\ \boxed{s\Delta x + x\Delta s = \mu e - xs.} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Ce dernier peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^t & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e - xs \end{pmatrix},} \tag{2.2.5}$$

où $X = diag\ (x)$, $S = diag\ (s), I$ est la matrice identité d'ordre n

Le format dans (2.2.5) est adapté à la mise en œuvre numérique pour déterminer $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ et par conséquent le nouvel itéré est donné par :

$$\boxed{x^+ = x + \Delta x,\ y^+ = y + \Delta y,\ s^+ = s + \Delta s.}$$

Maintenant, nous introduisons une norme de mesure de proximité définie comme suit :

$$\boxed{\delta(xs, \mu) = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{(\frac{xs}{\mu})^{-1}} - \sqrt{\frac{xs}{\mu}} \right\|_2.}$$

Pour mesurer la proximité de points réalisables pour la trajectoire centrale. Nous utilisons également une valeur seuil $0 < \beta < 1$ et nous supposons que le point initial (x^0, y^0, s^0) est strictement réalisable de telle sorte que $\delta(x^0 s^0, \mu^0) < \beta$ pour $\mu^0 = \frac{(x^0)^t s^0}{n}$.

Dans ce qui suit, on présente l'algorithme primal-dual de la méthode de la trajectoire centrale réalisable pour résoudre un programme quadratique convexe.

Algorithm 2 :

Début Algorithme

$\varepsilon > 0$ (un paramètre de précision) ;

un paramètre de mise à jour θ, $0 < \theta < 1$

un paramètre de seuil β; $0 < \beta < 1$

un point initial strictement réalisable (x^0, y^0, s^0)tel que $\delta(x^0 s^0, \mu^0) \leq \beta$ et $\mu^0 = \frac{(x^0)^t s^0}{n}$

$k = 0$

While $(n\mu^k) > \varepsilon$ do

1 calculer$(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ solution du système (2.2.5)

2 mettre à jour $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$

3 poser $\mu^{k+1} = (1-\theta)\mu^k = (1-\theta)\frac{x^k s^k}{n}$ et $k = k+1$.

End While.

Fin Algorithme.

Exemple 2.1 ***(cas de contrainte égalité)***

$$\boxed{\begin{cases} \min\limits_{x,u} \int\limits_0^T L\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) dt + \Phi_f\left(x\left(T\right)\right), \\ x^{\cdot}\left(t\right) = f\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right), \qquad x\left(0\right) = x_{init}, \end{cases}} \tag{1}$$

ici, $x : [0,T] \to \mathbb{R}^{n_s}$, $u : [0.T] \to \mathbb{R}^{n_c}$, $L : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_c} \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $\Phi_f : \mathbb{R}^{n_s} \to \mathbb{R}$.

On peut s'écrit ce problème ce la forme d'éscrète suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \min\limits_{x_i u_i} \sum\limits_{i=1}^{N} L_i\left(x_i, u_i\right) + \Phi N\left(x_{N+1}\right), \\ x_{i+1} = f_i\left(x_i, u_i\right), \qquad x_i\ , u_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., N, x_1\ fixé. \end{cases}} \tag{2}$$

Dans ce exemple Bande de la matrice des coefficients qui est pris en compte à chaque itération dans ce exemple nous concentrons sur une méthode linéaire-quadratique version du problème discret cela peut être formulé comme

$$\boxed{\begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{N} r_i^T u_i + z_i^T x_i + \frac{1}{2}\left(x_i^T Q_i x_i + 2x_i^T R_i u_i + u_i^T S u_i\right) + z_{N+1}^T x_{N+1} + \frac{1}{2} x_{N+1}^T Q_{N+1} x_{N+1}, \\ x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i + s_i, \qquad x_i\ , u_i\ \geq 0 \qquad i = 1, ..., N, \qquad x_1 fixé. \end{cases}} \tag{3}$$

Le Lagrangien pour (3) *est*

$$\boxed{\bar{L}\left(x, u, p\right) = \sum_{i=1}^{N} L_i\left(x_i, u_i\right) + \phi_N\left(x_{N+1}\right) + \sum_{i=1}^{N} p_{i+1}^T\left(x_{i+1} - f_i\left(x_i, u_i\right)\right).}$$

Remarque :*La dérivée partielle de problème de Bolza et les contrainte mixte* (1) *est :*

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dz} + \frac{dh^T}{dz}\omega &= 0 \\ h(z) &= 0. \end{aligned}$$

Nous supposons que la condition de convexité :

$$\boxed{\begin{pmatrix} Q_i & R_i \\ R_i^T & S_i \end{pmatrix} \text{ est semi défini positive pour } i = 1, ..., N.} \tag{4}$$

$$Q_{N+1} \text{ est semi défini positive.}$$

Les conditions de suffisance de la deuxième ordre pour (3) *avoir une solution locale isolée sont plus faibles que cela est en pratique pour beaucoup de problème.*

Nous passons maintenant à le problème de contrôle optimal (3)*et décrivons la structure spéciale pour ce problème .Nous supposons que* $x_i \in \mathbb{R}^{n_s}$, $i = 1, ..., N+1$*et* $u_i \in \mathbb{R}^{n_c}$, $i = 1, ..., N$ *pour la simplicité de l'exposition supposent que le nombre de contraintes auxiliaires à chaque étape est fixé à* m *en introduisant des variables adjointes* p_i, $i = 2, ...N + 1$

$$\boxed{\begin{cases} Q_i x_i + R_i u_i + z_i - A_i^T p_{i+1} + p_i = 0, \quad i = 2, ..., N; \\ Q_{N+1} x_{N+1} + z_{N+1} + p_{N+1} = 0; \\ R_i^T u_i + S_i u_i + r_i - B_i^T p_{i+1} = 0, \quad i = 1, ..., N; \\ x_{i+1} - A_i x_i - B_i u_i = s_i, \quad i = 1, ..., N; \end{cases}} \tag{5}$$

Les états x_i*, les contrôles* u_i *correspondre à les variables primitives* z_i *et* p_i *les correspondre à* ω*. Nous ordonnons maintenant les variables comme suit :*

$$\boxed{(\delta u_1, \delta p_2, \delta x_2, \delta u_2, ..., \delta u_N, \delta p_{N+1}, \delta x_{N+1}).}$$

Si nous ordonnons les équations (5)*de manière similaire la matrice des coefficients est*

$$\begin{pmatrix}
S_1 & -B_1^T & & & & & & & & \\
-B_1 & 0 & I & & & & & & & \\
 & I & Q_2 & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & I & & & & & \\
 & & & I & Q_i & R_i & -A_i^T & & & \\
 & & & & R_i^T & S_i & -B_i^T & & & \\
 & & & & -A_i & -B_I & 0 & I & & \\
 & & & & & & I & Q_{i+1} & \ddots & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & I \\
 & & & & & & & & I & Q_{N+1}
\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Cette matrice a une dimension $(n)\,(2n+m) \times (n)\,(2n+m)$.

au SQP itérate (x, u, p)*, nous définissons*

$$\begin{aligned}
Q_i &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2}, \quad R_i = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial u_i}, \quad S_i = \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} \\
z_i &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_i}, \quad r_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial u_i}, \quad s_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial p_{i+1}}, \\
A_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}.
\end{aligned}$$

Et résoudre le problème quadratique linéaire qui en résulte pour obtenir le SQP étape

Chapitre 3

Application des méthodes de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal (cas égalité et inégalité)

Nous examinerons cette section pour appliquer les méthodes de trajectoire centrale sur les problèmes des contrôles optimaux avec contrainte mixte où notre étude est limitée sur les problèmes de la forme de Bolza.

3.1 L'algorithme de méthode de trajectoire centrale pour les programmations convexes quadratiques :

On considère le problème :

$$\boxed{\min \frac{1}{2} z^T Q z + c^T z, \qquad Az = b, \qquad Cz \leq d,} \tag{3.1.1}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^m$,etc, et Q est semi définie positive. Nous supposons que (3.1.1) a une solution optimale $(z, v) = (z^*, v^*)$ où v est vecteur de pantalons pour contrainte d'inégalité double de (3.1.1) est :

$$\boxed{\max -\frac{1}{2}v^T Qv - b^T w - d^T y, \qquad Qv + A^T\ \omega + C^T\ y + c = 0, \qquad y \geq 0\ .} \tag{3.1.2}$$

La relation entre le problème (3.1.1)et(3.1.2) est décrite dans la proposition suivante :

Proposition 3.1 (*i*) *Si* (3.1.1) *a une solution optimale* (z^*, v^*), *alors il existe* ω^* *et* y^**tel que* $(v, \omega, y) = (z^*, \omega^*, y^*)$ *est une solution optimale pour* (3.1.2) *inversement, si* (3.1.2) *a une solution optimale , alors aussi* (3.1.1)

(*ii*) *Si* (z^*, v^*) *et* (v^*, ω^*, y^*) *sont solution optimale de* (3.1.1) *et* (3.1.2) *respectivement puis* $(y^*)^T v^* = 0$ *inversement si* (v^*, ω^*, y^*) *est une solution réalisable de* (3.1.2)

tel que $z = v^*, v = d - Cv^*$ *sont réalisable dans* (3.1.1) *and* $(y^*)^T (d - Cv^*) = 0$ *puis* $(v^*, d - Cv^*)$ *et* (v^*, ω^*, y^*) *sont solution optimale de* (3.1.1) *et* (3.1.2) *respectivement*

Puisque nous avons supposé qu'il existe une solution primordiale il résulte de proposition qu'il y a un quatuor (z, v, ω, y) tel que :

$$\boxed{Qz + A^T\omega + C^T y + c = 0} \tag{3.1.3}$$

$$\boxed{-Az + b = 0} \tag{3.1.4}$$

$$\boxed{v = -Cz + d \geq 0} \tag{3.1.5}$$

$$\boxed{y \geq 0} \tag{3.1.6}$$

$$\boxed{y^T v = 0.} \tag{3.1.7}$$

Si (z, v, ω, y) est réalisable par rapport à les quatre premières de ces conditions (3.1.3) (3.1.6) puis

$$\begin{aligned} y^T v &= y^T (d - Cz) \\ &= y^T d - z^T \left(-c - Qz - A^T \omega\right) \\ &= y^T d + \omega^T b + z^T Q z + z^T c. \end{aligned}$$

Alors $\left(y^T v\right)$ la différence entre les valeurs de fonction primale et duale.

$$\boxed{\Psi (y, v) = \rho_\rho \ln \left(y^T v\right) - \sum_{j=1}^{m} \ln (y_j v_j),} \tag{3.1.8}$$

où ρ_ρ est une paramètre de barrière fixe en plus d'éléments de F_+, c'est désirable pour chaque itération rester au voisinage d'un chemin central défini par

$$\boxed{C = \left\{(v, y) \in F_+ \mid v_i y_i = \left(v^T y\right)/m, \qquad i = 1, ..., m\right\}.} \tag{3.1.9}$$

Maintien de la proximité au chemin central aide à retenir la propriété d'intériorité stricte et facilite l'analyse de convergence.

En général, chacun étape de la méthode vise à conserver la faisabilité par rapport à (3.1.3) (3.1.6), tout en se rapprochant au chemin central et ou en réduisant le saut de dualité, les deux derniers objectifs peut être satisfaite en effectuant une newton comme la linéarisation de l'équation

$$\boxed{v_i y_i = \mu \qquad i = 1, ..., m,}$$

ou plus,

$$\boxed{MYe = \mu e,} \tag{3.1.10}$$

où

$$\boxed{M = diag\ (v_1, v_2, ..., v_m), Y = (y_1, y_2, ..., y_m), e = (1, 1, ..., 1)^T.}$$

Et $\mu \geq 0$. Si nous mettons $\mu = 0$ alors nous sommes viser clairement pour satisfaire la condition de complémentarité (3.1.7) sans attribuer d'importance au chemin central alors que si nous mettons $\mu = \left(y^{kT} v^k\right)/m$ où $\left(v^k, y^k\right)$ est l'itinéraire actuel alors nous visons se rapprocher

au point le plus proche sur le chemin central en quelques sortes tout en ne réduisant pas l'écart de dualité comme on le voit ci dessous μ est souvent choisi pour se situer strictement entre ces deux extrêmes donc c'est ça satisfait partiellement les deux objectifs.

Nous notons ici que (3.1.3) (3.1.7) est un problème de complémentarité linéaire dans lequel la matrice des coefficients

$$\begin{pmatrix} Q & A^T & C^T \\ -A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est semi définie positive. Le point de complémentarité linéaire lorsque l'on discute de la convergence des algorithmes des points intérieurs et en décrivez le choix d'un point initial comme dans ce que suit :

L'intérieur cadre de point peut maintenant être spécifie supposons une point initiale (z^0, v^0, w^0, y^0) qui satisfait $(3.1.3) - (3.1.6)$, avec des inégalités strictes $(3.1.5) - (3.1.6)$ est disponible. À l'itinéraire actuel $\left(z^k, v^k, w^k, y^k\right)$, nous générons la direction de recherche $\left(\delta z^k, \delta v^k, \delta w^k, \delta y^k\right)$ en résolvant le système de équation :

$$\boxed{\begin{cases} Q\delta z^k + A^T\delta w^k + C^T\delta y^k = 0 \\ A\delta z^k = 0 \\ C\delta z^k + \delta v^k = 0 \\ Y^k\delta v^k + M^k\delta y_k = \mu_k e - Y^k M^k e. \end{cases}} \tag{3.1.11}$$

Alors : élimination de δv^k on a :

$$\boxed{\begin{bmatrix} Q & A^T & C^T \\ A & 0 & 0 \\ C & 0 & -\left(Y^k\right)^{-1} M^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z^k \\ \delta w^k \\ \delta y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_k \left(y^k\right)^{-1} e + M^k e \end{bmatrix}.} \tag{3.1.12}$$

Maintenant nous avons

$$\boxed{\begin{cases} z^{k+1} = z^k + \theta_k \delta z^k, v^{k+1} = v^k + \theta_k \delta v^k, w^{k+1} = w^k + \theta_k \delta w^k, \\ y^{k+1} = y^k + \theta_k \delta y^k, \end{cases}}$$

où θ_k est choisi conserver la faisabilité de la nouvelle itération par rapport à$(3.1.3) - (3.1.6)$, entre aurès les algorithmes de réduction de potentiel choisissent μ_k dépend de l'écant de dualité :

spécifiquement

$$\boxed{\mu_k = \frac{\Delta_k}{\rho_k}, \Delta_k =^{def} y^{kT} v^k,} \tag{3.1.13}$$

où la valeur de ρ_k sera discutée ci desons, θ_k est un suite choisi de soit que

$$\boxed{\Psi\left(y^k + \theta_k \delta y^k, v^k + \theta_k \delta v^k\right).}$$

Atteint au moins une certaine constant réduction par rapport à $\Psi\left(y^k, v^k\right)$, où Ψ est défini en $(3.1.8)$, le résultat suivant peut être utilisé pour démontrer complexité polynomiale de l'algorithme de réduction de potentiel de base. pour linéaire problème de complémentarité sous forme standard, mais peut être facilement étendu au problème de complémentarité linéaire ‹*mixte*› $(3.1.3), (3.1.7)$.

Théorème 3.1 ***[6]***

Supposer que :

$1-$ *l'ensemble* C *est non vide.*

$2 - \rho_k \equiv \rho_k = m + \sqrt{m}$ *dans* $(3.1.8)$ *et* $(3.1.13)$.

$3 - m \geq 2.$

$4 - \theta_k = 0.4 \frac{\min_{j=1\ldots m} \sqrt{y_j^k v^k j}}{\left\| \left(y^k M^k\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta_k}{\rho_k} e - y^k M^k e\right) \right\|}$. *Alors les itérations produit par l'algorithme du point intérieur satisfaire.*

Supposons que l'hypothèse du théorème (3.1) *tenir, et laisser* L *être n'importe quel nombre avec*

$$\boxed{L > -\Psi\left(y^0, v^0\right) / \sqrt{m}.}$$

Alors les itérations généré par l'algorithme sera satisfaire

$$\boxed{\Delta_k = y^{kT} v^k \leq e^{-L}.}$$

pour tous

$$\boxed{k \geq 5\left[\Psi\left(y^0, v^0\right) + \sqrt{m}L\right].}$$

Le résultat suivant forme immédiatement théorème (3.1) *en ensemble avec le fait que*

$$\boxed{\Psi\left(y, v\right) \leq -\sqrt{m}L \Rightarrow y^T v \leq e^{-L}.}$$

La complexité polynomiale se produit si

$$\boxed{\Psi\left(y^0, v^0\right) = O\left(\sqrt{m}L\right),}$$

De puis l'époque l'itération est polynomiale dans la taille du problème (à proprement parler l'hypothèse standard que toutes les données dans le problème (3.1.1) *est rationnel est également nécessaire) l'algorithme du théorème* (3.1.2) *certainement ne devrait pas entraîner superlinéaire convergence et choix de* ρ_p, ρ_k *et* θ_k *sont détendus. Cependant les choix de* ρ_k *et* θ_k *cette rendez-vous le plus efficace possible les algorithmes se situent en dehors de la portée de cette analyse.*

initialement : $\rho_{\min} \leftarrow m^{1.5}$

la $k-^{éme}$itération :$\rho_k \leftarrow \max\left(\rho_{\min}, \frac{1}{\Delta_k}\right)$;

calcules l'étape $\left(\delta z^k, \delta v^k, \delta w^k, \delta w^k, \delta y^k\right)$;

ensemble $\bar{\theta}_k = \max\left\{\theta/\theta \leq 1, y_i^k + \theta\delta y_i^k \geq 0, v_i^k + \theta\delta v_i^k \geq 0, i = 1, ..., m\right\}$,

Si $\bar{\theta}_k \leq 5$ puis $\rho_{\min} \leftarrow 5 * \rho_{\min}$;

Si $\bar{\theta}_k = 1$ puis $\rho_{\min} \leftarrow 2 * \rho_{\min;}$

Si $\bar{\theta}_k = 1$ puis $\theta_k \leftarrow 1$ puis $\theta_k \leftarrow \beta\bar{\theta}_k$.

tel que β est constante

Dans notre expérience, le choix de ρ_k devrait être manipule pour être, aussi large que possible tout en permettant des longueurs d'étapes θ_k de 1,puisque ces étapes étaient habituellement

observé à la plus grande réduction de l'écart de dualité la heuristique ci-dessus a été trouvé. Après une certaine expérimentation pour réussir. le choix $\rho_k = \frac{1}{\Delta_k}$ (qui prend effet pendant les dernières itérations) .

3.2 Forme Bolza d'un problème du contrôle optimal avec les contraintes mixtes :

Le problème du contrôle optimal d'une équation différentielle ordinaire de valeur initiale, avec les objectifs de *Bolza* et les contraintes mixte s'écrit ce la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \min\limits_{x,u} \int\limits_0^T L\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) dt + \Phi_f\left(x\left(T\right)\right), \\ x^{\cdot}\left(t\right) = f\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right), \qquad x\left(0\right) = x_{init}, \\ g\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) \leq 0,\ t \in [0,T],\ g_f\left(x\left(T\right)\right) \leq 0, \end{cases}} \tag{3.2.1}$$

ici, $x : [0,T] \to \mathbb{R}^{n_s}$, $u : [0.T] \to \mathbb{R}^{n_c}$, $L : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_c} \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $\Phi_f : \mathbb{R}^{n_s} \to \mathbb{R}$,
$g : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_s} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n_g}$, $g_f : \mathbb{R}^{n_s} \to \mathbb{R}^{n_f}$.

On peut s'écrit ce problème ce la forme discrete suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \min\limits_{x_i u_i} \sum\limits_{i=1}^{N} L_i\left(x_i, u_i\right) + \Phi N\left(x_{N+1}\right), \\ x_{i+1} = f_i\left(x_i, u_i\right),\ i = 1, ..., N,\ x_1\ fix\acute{e}, \\ g_i\left(x_i, u_i\right) \leq 0,\ i = 1, ..., N, \qquad g_f\left(x_{N+1}\right) \leq 0. \end{cases}} \tag{3.2.2}$$

Dans ce travail : bande de la matrice des coefficients qui est pris en compte à chaque itération dans ce travail nous concentrons sur une méthode linéaire-quadratique version du problème

discrete cela peut être formulé comme

$$\boxed{\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{N} r_i^T u_i + z_i^T x_i + \frac{1}{2}\left(x_i^T Q_i x_i + 2x_i^T R_i u_i + u_i^T S_i u_i\right) + z_{N+1}^T x_{N+1} + \frac{1}{2} x_{N+1}^T Q_{N+1} x_{N+1}, \\ x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i + s_i, \ i = 1, ..., N, \qquad x_1 \ fixé \\ G_i u_i + H_i x_i \leq g_i, \ i = 1, ..., N. \ H_{N+1} x_{N+1} \leq g_{N+1}. \end{cases}} \tag{3.2.3}$$

Nous supposons que la condition de convexité :

$$\boxed{\begin{pmatrix} Q_i & R_i \\ R_i^T & S_i \end{pmatrix} \quad \text{est semi défini positive pour } i = 1, ..., N.} \tag{3.2.4}$$

Q_{N+1} est semi défini positive.

Les conditions de suffisance de la deuxième ordre pour (3.2.3) avoir une solution locale isolée sont plus faibles que cela est en pratique pour beaucoup de problème.

Remarque 3.1 *La dérivée partielle de problème de Bolza et les contrainte mixte* (3.2.1) *est :*

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dz} + \frac{dh^T}{dz}\omega + \frac{dg}{dz}y &= 0 \\ h(z) &= 0 \\ g(z) &\leq 0 \qquad y \geq 0 \quad y^T g(z) = 0. \end{aligned}$$

3.3 Application de méthode de trajectoire centrale sur le problème de contrôle optimal :

Nous passons maintenant au problème de contrôle optimal (3.2.3) , et décrivons la structure spéciale du système (3.1.12) , pour ce problème. Nous supposons que $x_i \in \mathbb{R}^{n_s}$, $i = 1, ..., N+1$ et $u_i \in \mathbb{R}^{n_c}$, $i = 1, ..., N$. Pour la simplicité de l'exposition supposent que le nombre des contraintes auxiliaires à chaque étape est fixé à m en introduisant des variables adjointes p_i, $i = 2, ...N+1$qui sont multiplicateurs de lagrange pour l'équation d'état et des vecteurs d'écart v_i, $i = 1, ..., N+1$

et les vecteurs multiplicateurs de lagrange y_i, $i = 1, ..., N+1$ pour les contraintes auxiliaires nous arrivons à un ensemble des conditions d'optimalité qui correspondent à (3.1.3) (3.1.7)

$$\boxed{\begin{cases} Q_i x_i + R_i u_i + z_i - A_i^T p_{i+1} + p_i + H_i^T y_i = 0, \ i = 2, ..., N; \\ Q_{N+1} x_{N+1} + z_{N+1} + p_{N+1} + H_{N+1}^T y_{N+1} = 0; \\ R_i^T u_i + S_i u_i + r_i - B_i^T p_{i+1} + G_i^T y_i = 0, \ i = 1, ..., N; \\ x_{i+1} - A_i x_i - B_i u_i = s_i, \ i = 1, ..., N; \\ G_i u_i + H_i x_i + v_i = g_i, \ i = 1, ..., N; \\ H_{N+1} x_{N+1} + v_{N+1} = g_{N+1}; \\ v_i \geq 0, \ y_i \geq 0, \ i = 1, ..., N+1; \\ v_i^T y_i = 0, \ i = 1, ..., N+1. \end{cases}} \tag{3.3.1}$$

Les états x_i, les contrôles u_i correspondre à les variables primitives z_i et p_i les correspondre à ω. Nous ordonnons maintenant les variables dans le système (3.1.12) comme suit :

$$\boxed{(\delta u_1, \delta y_1, \delta p_2, \delta x_2, \delta u_2, \delta y_2, ..., \delta u_N, \delta y_N, \delta p_{N+1}, \delta x_{N+1}, \delta y_{N+1}) .}$$

Si nous ordonnons les équations (3.3.1) de manière similaire la matrice des coefficients dans (3.1.12) est

$$\begin{pmatrix}
S_1 & G_1^T & -B_1^T & & & & & & & & & & \\
G_1 & -V_1^k & 0 & & & & & & & & & & \\
-B_1 & 0 & 0 & I & & & & & & & & & \\
 & & I & Q_2 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & & I & & & & & & & \\
 & & & & I & Q_i & R_i & H_i^T & -A_i^T & & & & \\
 & & & & & R_i^T & S_i & G_i^T & -B_i^T & & & & \\
 & & & & & H_i & G_i & -V_i^k & 0 & & & & \\
 & & & & & -A_i & -B_I & 0 & 0 & I & & & \\
 & & & & & & & & I & Q_{i+1} & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & & I & \\
 & & & & & & & & & & I & Q_{N+1} & H_{N+1}^T \\
 & & & & & & & & & & & H_{N+1} & -V_{N+1}^K
\end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

où $V_i^k = diag\left(\left(v_i^k\right)_1 / \left(y_i^k\right)_1, ..., \left(v_i^k\right)_1 / \left(y_i^k\right)_m\right)$ cette matrice a une dimension $N\left(2n_s + n_c + m\right)+ m$ et bande passante $\left(2n_s + n_c + m - 1\right)$ et donc peut factorisée en $O\left(N\left(n_s + n_c + m\right)^3\right)$ opération la substitution en avant avec les facteurs triangulaires résultants prend $O\left(N\left(2n_s + n_c + m\right)^2\right)$ les opérations.

pour le problème non linéaire (3.2.2) , l'application de programmation quadratique séquentielle (SQP) donne lieu aux problèmes de la forme (3.2.3), pour le cas dans lequel des contraintes auxiliaire sont absentes le lagrangien pour (3.2.2) est :

$$\boxed{L\left(x, u, p, y\right) = L\left(x, u, p\right) + \sum_{i=1}^{N} y_i^T g_i\left(x_i, u_i\right) + y_{N+1}^T g_f\left(x_{N+1}\right),}$$

où

$$\boxed{\bar{L}(x,u,p) = \sum_{i=1}^{N} L_i(x_i,u_i) + \phi_N(x_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} p_{i+1}^T (x_{i+1} - f_i(x_i,u_i)),}$$

au SQP itérate (x,u,p,y), nous définissons

$$\begin{aligned}
Q_i &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2}, \quad R_i = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial u_i}, \quad S_i = \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} \\
z_i &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_i}, \quad r_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial u_i}, \quad s_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial p_{i+1}}, \quad g_i = -g_i(x_i,u_i) \\
A_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}, \quad H_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_i}, \quad G_i = \frac{\partial g_i}{\partial u_i}.
\end{aligned}$$

Et résoudre le problème quadratique linéaire qui en résulte pour obtenir le SQP étape.

Conclusion

Les méthodes des trajectoires centrales jouent un rôle important en théorie du contrôle contemporaine, en particulier pour le calcule de contrôle optimal Les objectifs de ce mémoire sont :

- Présentation de quelques méthodes de trajectoires centrales.

- quelque applications pour le calcule de contrôle optimale (cas quadratique)

Bibliographie

[1] Arzelier. "Représentation et analyse des systèmes linèaires". Version 5.2,07 Avenue du colonel Roche 31077 Toulouse cedex 04 France.

[2] El Amir DJEFFAL. Etude de quelques algorithmes de points interieurs pour la programmation convexe. Université de Hadj Lakhdar -Batna-Faculté des Sciences ,Département de Mathématiques. 10 septembre 2013.

[3] Maïtine Bergounioux. Optimisation et contrôle des systèmes linéaires (cours et exercices avec solutions).Dunod,Paris,2001 ISBN 2100056263.

[4] Mohammed Ouriemchi. Résolution des problèmes non linéaires par les méthodes de point intérieurs. Théorie et algorithmes. Universit e du Havre. 13 jan 2006.

[5] P. Apkarian. "Eléments de la théorie de la command robuste". 1993.

[6] STEPHEN J.WRIGHT. Méthodes de point intérieur pour un contrôle optimal des systèmes à temps discret. Mthematic and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, IL60439.Research supported by the Applied Mathematical Sciences subprogram of the office of Energy Research , U.S.Department of Energy, under contract W-31-109-Eng-38.