وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي- تبسة-

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

مطبوعة بيداغوجية

التحليل العددي 1

(دروس)

لطلبة السنة الثانية ليسانس رياضيات

ميدان: الرياضيات و الإعلام الآلي

من إعداد:

د. قصري أحلام

أستاذ محاضر قسم أ

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة الجامعية: 2023- 2024

فهرس المحتويات

العنوان		الصفحة
فهرس المحتويات		أ
المقدمة		1
الفصل الأول: مفاهيم الأخطاء		
.1.1	الطرق العددية و الطرق التحليلية	2
.2.1	أنواع الأخطاء	3
.3.1	التعبير عن الأخطاء	5
.4.1	أخطاء تمثيل التوابع والعلاقات	6
.5.1	خواص الأخطاء و تراكمها و دقة الأعداد	15
.6.1	تمارين	20
الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المستمرة حل المعادلات غير الخطية		
.1.2	شرح مبدأ حل المعادلات غيرالخطية بالطرق التكرارية	24
.2.2	طريقة عزل جذور المعادلة	24
.3.2	الطرق التكرارية لحل المعادلات غير الخطية	28
.4.2	تمارين	47
الفصل الثالث: الاستقطاب و التقريبات		
.1.3	شرح تقريب التوابع باستخدام الاستقطاب(الاستيفاء الداخلي)	53
.2.3	نظرية التقارب لـ Weiestrass	53
.3.3	استقطاب لاغرانج	54
.4.3	كثير حدود استقطاب نيوتن	62
.5.3	تقريب التوابع باستخدام طريقة المربعات الصغرى	69
.6.3	تمارين	74

الفصل الرابع: التفاضل العددي		
.1.4	حساب التفاضل باستخدام صيغة لاغرانج الاستقطابية	82
.2.4	حساب التفاضل باستخدام كثير حدود Newton الاستقطابي الأول (الصيغة الأولى للفروق المقسمة)	86
.3.4	تمارين	93
الفصل الخامس: التكامل العددي		
.1.5	التكامل باستخدام كثيرات الحدود الاستقطابية	97
.2.5	علاقات أشباه المنحرف التكاملية	99
.3.5	تمارين	108
المراجع العلمية		114

المقدمـــــة

التحليل العددي هو قسم من أقسام الرياضيات، فدراسته مهمة جدا نظرا لأهمية ما يقدمه من حلول لمسائل عديدة نعجز عن حلها بالطرق التحليلية، إذ أنه يهتم بدراسة طرق وخوارزميات تمكن من حل تقريبي للمسائل في التحليل الرياضي وعلم التقريب، حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير القابلة للحل بالطرق الرياضية التحليلية. ينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء سوف نتطرق لدراستها لاحقا.

وعلى هذا الأساس، قمت بوضع هذه المطبوعة والغرض منها هو تقديم كل التعريفات الأساسية المتعلقة بالتحليل العددي. وهذه المطبوعة معدة وفقا لمنهاج التحليل العددي 1 لطلبة السنة الثانية رياضيات في طور الليسانس. ولم أشأ أن أتعمق في مواضيعها فتصبح للمتخصصين فقط وأردتها أن تكون شرحا مبسطا مع أمثلة تطبيقية كثيرة تسهل على الطالب فهم المادة وترغبه بها ولا تنفره منها. و قد تضمنت هذه المطبوعة خمسة فصول متنوعة ومختلفة يمكن أن نعرضها كمايلي:

الفصل الأول: ويتضمن دراسة موضوع الأخطاء وهو من المواضيع الهامة في التحليل العددي وفي الرياضيات وبالتالي في كافة العلوم التي تستخدم هذا العلم.

الفصل الثاني: وقد تضمن مختلف الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية بما في ذلك طريقة التقسيم الثنائي، طريقة نيوتن وطريقة النقطة الثابتة.

الفصل الثالث: وقد تضمن الطرق العددية المختلفة لتقريب التوابع باستخدام الاستقطاب أو الاستيفاء الداخلي نذكر منها طريقتي لاغرانج ونيوتن بمختلف الصيغ الممكنة لتحقق هذا التقارب وهذا الجزء الأول، أما عن الجزء الثاني فهو يتضمن نظرية التقريب بطريقة المربعات الصغرى مستخدمة في ذلك أمثلة عديدة وثرية لتوضيح مختلف المفاهيم والنظريات.

الفصل الرابع: وقد تضمن مجمل الطرق العددية لمسألة التفاضل العددي مستخدمة في ذلك العديد من كثيرات الحدود الاستقطابية للاغرانج ونيوتن بمختلف الصيغ المتاحة.

الفصل الخامس: وقد تمت فيه دراسة التكامل العددي بعدة طرق عددية مثل طريق أشباه المنحرف لـ تراباز و سيمبسون وكذا طرق أشباه المنحرف المعممة، وكذلك موضوع أخطاء هذه الطرق.

إن مواضيع التحليل العددي من المواضيع الهامة جدا في الميادين العلمية المختلفة ولا غنى عنها لكل الفروع العلمية وخاصة التطبيقية، ولذلك فقد تم حل الكثير من الأمثلة العددية المتنوعة لتدريب الطالب على حل أكثر ما يمكن من التمارين والتي يمكن أن يواجهها في حياته العملية، العلمية أو البحثية في المستقبل.

و إني إذ أضع هذه المطبوعة لابد من الإشارة على أنني استفدت كثيرا من تجربتي التدريسية لهذه المادة و كذلك لما أطلعت عليه في بعض المصادر لإثراء محتواها، آملة أن أكون قد وفقت في تحقيق الهدف المنشود لإعداد هذه المطبوعة، متمنية أن تلقى قبولا في الوسط الجامعي فتكون مرجعا يثري مكتباتنا الجامعية.

و أخيرا أقدم شكري و امتناني للأستاذ الدكتور عادل وناس أستاذ التعليم العالي بجامعة أم البواقي و الدكتور حفظ الله عبد الحق أستاذ محاضرقسم أ بجامعة تبسة الذين تفضلا بمراجعة و تقييم محتواها العلمي واللغوي.

أرجو أن أكون قد وفقت.

د. قصري أحلام، قسم الرياضيات والإعلام الآلي، جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي-تبسة-

الفصل الأول

مفاهيم الأخطاء

تمهيد

التحليل العددي هو قسم من الرياضيات يهتم بدراسة طرق وخوارزميات تمكن من حل تقريبي للمسائل في التحليل الرياضي وعلم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير القابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة لكي نحكم على قبول هذه الإجابة أو رفضها.

لا تؤخذ كلمة خطأ بمعنى الخطأ (التفكير الخاطئ في الأسلوب، التعليمات الخاطئة في البرنامج...الخ)، بل يتعلق الأمر فقط بالأخطاء التي لا مفر منها، فغالبا ما ترتكب أخطاء في العمليات الحسابية التي يتم بها حل المسائل الرياضية بالطرق العددية والذي يتطلب في الكثير من الحالات تكرار العمليات الحسابية وهذا التكرار يضخم الأخطاء الصغيرة وقد يجعل منها أخطاء لا يستهان بها. ومع هذا لا يعد تكرار العمليات الحسابية السبب الوحيد الذي يؤدي إلى الوقوع في الأخطاء. وهذا ما يدعونا إلى تحديد مصادر الأخطاء، حسابها وكذا تصنيفها كي نتمكن من الحد من تضخمها، وهذا ما سنناقشه في المطبوعة والذي يدرس الفصل الأول من مقياس التحليل العددي والمعنون بمفاهيم الأخطاء.

1-1 الطرق العددية و الطرق التحليلية

1-1-1 مميزات الطرق العددية

من أهم مميزاتها ما يلي:

- تعوض الطرق التحليلية عندما تكون هذه الأخيرة عاجزة عن حلول دقيقة (حلول معقدة)
- تؤدي إلى حلول تقريبية (لكن يمكن تعيين الدقة بحسابات أكبر)
- يمكن تطبيقها وبرمجتها على الحاسوب

❖ **مزاياها**

- تستعمل في معظم الأحيان
- بسيطة في غالب الأحيان
- قوية أي بفضلها يمكن حل مسائل كثيرة وبنفس الطريقة

❖ **عيوبها**

- تؤدي إلى حل تقريبي
- في حالة المعادلات التفاضلية تؤدي إلى حل على شكل قيم تقريبية عند نقاط معينة
- تؤدي إلى حسابات كثيرة (لابد من حاسوب) أي لابد من برمجتها

1-1-2 معالجة مسألة بالطرق العددية

❖ **اختيار الطريقة**

يعتمد على معيارين هما الدقة والسرعة في تنفيذ العمليات وحجم الحسابات وأيضا دراسة تقارب الطريقة.

❖ **الخوارزمية**

هي مجموعة الخطوات التي يتم تنفيذها بصورة مرتبة لفرض إيجاد الحل

❖ **البرمجة**

تعويض الخوارزمية ببرنامج مكتوب بلغة راقية

❖ **) التنفيذ على الحاسوب ونقل النتائج**

مثال:
يعني تقارب الطرق والطرق التحليلية هي طرق تكرارية

لتكن الدالة $F(x)$ متتالية من القيم التقريبية:

(الحل المطلوب (النهاية)) $\alpha \leftarrow \cdots \leftarrow x_n \leftarrow \cdots \leftarrow x_2 \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$ (القيمة الابتدائية)

الطريقة تتقارب إذا كانت $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

عندما نتوقف عند الحد n أي قطع الطريقة قبل نهايتها وهذا يعني ارتكاب الخطأ التالي:

(حل دقيق α) $E = |\alpha - x_n|$ (حل تقريبي x_n)

3-1-1 معالجة مسألة بالطريقة التحليلية

❖ **مزاياها**

- تؤدي إلى حل دقيق
- تؤدي إلى حل على الشكل الواضح في حالة المعادلات التفاضلية أو التكاملات

❖ **عيوبها**

- تستعمل في حالات خاصة – وسيط
- عاجزة في معظم الحالات على إيجاد الحل (حلول معقدة)
- كل مسالة تحتاج الى طريقة خاصة لحلها

2-1 أنواع الأخطاء

1-2-1 الأخطاء الملازمة

هي أخطاء في قيم البيانات، لأن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية ،لأنها غالبا ما تمثل أطوالا وقياسات أو قيما لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبية، كذلك فان الكثير من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها بعدد منته من الأرقام فيلتزم علينا اخذ عدد منته ومثال ذلك العدد الذهبي π يساوي تقريبيا 3.14159 كذلك هو الحال بالنسبة للعدد e و $\sqrt{7}$...الخ من الأعداد غير المنتهية، وهذا لأننا لا نستطيع كتابتها كأعداد مضبوطة وهذا ما يؤدي بنا أو بمعنى أفضل يلتزم علينا الوقوع في الخطأ وهذا بسبب الدقة المحدودة لأجهزة القياس.

مثال 1.1:

إن أخطاء البيانات ترجع إلى حقيقة إن الآلة (نقصد بها آلة حاسبة الجيب أو الكمبيوتر) يمكن أن تمثل فقط أرقاما حقيقية مع عدد محدود من الأرقام مع كل عملية حسابية. مما يؤدي إلى وجود خسارة في أرقام ذات دلالة. ومثال ذلك الحد الأقصى للآلة الحاسبة العلمية هو 9 أرقام .

1-2-2 أخطاء الطريقة

وهي الأخطاء التي تنتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلا بعلاقة أخرى أبسط منها، ومثال على ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف في حساب قيمة التكامل المحدود.

مثال 2.1:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

أي حساب التكامل بالطرق التقريبية لأشباه المنحرف المعممة والفرق بالقيمة المطلقة بين القيمتين الحقيقة والتقريبية هو الخطأ.

3-2-1 أخطاء المعطيات

وهي الأخطاء الناتجة عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية غير الدقيقة بشكل كاف أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل للمستخدمين بذلك قواعد التدوير مثلا.

4-2-1 الأخطاء المتقطعة

وهي الأخطاء الناتجة عن اعتبار أن مجموعة السلسلة غير المنتهية مثلا هو عدد من حدودها أي قطع الطريقة بعد خطوات غير منتهية قبل أن تنتهي بطبيعتها.

مثال 3.1:

حل معادلات غير الخطية $f(x) = 0$ (مبرمجة في الفصل الثاني)

x_0 جدر أو حل ابتدائي $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to \cdots \to \alpha$(جذر)

مثال 4.1:

النشر في سلسلة تايلور لأي دالة ومثال الدالة الآسية

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \downarrow_{\text{قطع}} + \cdots \text{خطأ}$$

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ **ملاحظة:**

هناك أخطاء مهملة، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما مقارنة بشخص آخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

3-1 التعبير عن الأخطاء

يمكن أن نعبر عن الأخطاء عادة بأربع طرق:

1-3-1 الخطأ المطلق

ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية ويرمز له بالشكل:

$$E = |x - x_1| = \Delta x$$

حيثx القيمة الحقيقية (الدقيقة) و x_1 القيمة التقريبية المحسوبة أو القيمة التقريبية التجريبية.

2-3-1 الخطأ النسبي

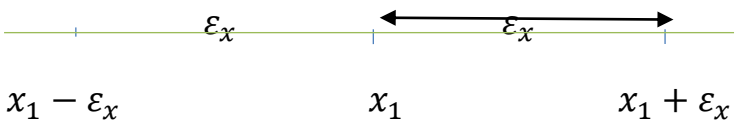
وهو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوما على القيمة الحقيقية. حيث أن الخطأ المطلق لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس ويعطى كمايلي:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (1.1)$$

عمليا لا يمكن معرفة القيمة الحقيقية x وبالتالي لا يمكن معرفة لا الخطأ المطلق ولا النسبي وعليه يجب أن نكتفي بالبحث σ حد اعلى حيث:

$$|x - x_1| \leq \varepsilon_x \Rightarrow -\varepsilon_x \leq x - x_1 \leq +\varepsilon_x$$

$$\Rightarrow x_1 - \varepsilon_x \leq x \leq x_1 + \varepsilon_x \Rightarrow x = x_1 \pm \varepsilon_x$$



مثال 5.1:

$$x = 3.12 \pm 0.02 \Leftrightarrow |x - 3.12| = |x - x_1| = 0.02$$

$$\Leftrightarrow 3.10 \leq x \leq 3.14$$

أما الخطأ النسبي هو:

$$\left|\frac{x - x_1}{x}\right| = \frac{0.02}{3.12} = 6.4 \times 10^{-3} = 0.64\%$$

مثال 6.1:

معادلة نواس بسيط

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \\ \theta(t_0) = \theta_0;\ \theta'(t_0) = \theta'_0 \end{cases}$$

- **الأخطاء الملازمة:** أخطاء في قيم $L, g, \theta_0, \theta'_0, t_0$

- **أخطاء الطريقة:** لا يمكن حل هده المعادلة التفاضلية بالطريقة التحليلية. فإذا استخدمنا الطريقة العددية فإننا نرتكب خطأ في النتيجة.

- **أخطاء التدوير:** هي أخطاء ناتجة عن تدوير الأعداد أثناء القيام بالعمليات الحسابية.

1-3-3 الخطأ المرتكب

وهو عبارة عن إحدى القيمتين

$$\sigma_x = x - x_1;\ \sigma_x = x_1 - x$$

أي أن:

$$E = |\sigma_x| = |x - x_1| = |x_1 - x| \qquad (1.2)$$

1-3-4 الخطأ المئوي

وهو عبارة عن الخطأ النسبي مضروب في 100، أي يساوي $E_r 100$

1-4 أخطاء تمثيل التوابع والعلاقات

إن الأخطاء المرتكبة بسبب تمثيل التوابع يمكن تحديدها بعلاقة خطا عامة كمايلي:

$$N = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1.3)$$

وهو تابع للمتغيرات المستقلة $(i = 1,2, \dots, n)\ ;\ x_i$، حيث أن كل من هذه المتغيرات خاضع للخطأ $(i = 1,2, \dots, n)\ ;\ \Delta x_i$ على الترتيب. عندئذ يوجد خطأ ΔN للتابع بحيث يكون:

$$N + \Delta N = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \qquad (1.4)$$

إن الطرف الأيمن من هذه العلاقة يمكن نشره على شكل سلسلة تايلور لعدة متغيرات فنجده:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$+ \left(\Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\Delta x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \Delta x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \Delta x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + 2\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots\right.$$

$$\left. + 2\Delta x_{n-1} \Delta x_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right) \qquad (1.5)$$

عادة أخطاء المتغيرات يجب أنة تكون نسبيا صغيرة، أي أن $\frac{\Delta x_i}{x_i} \ll 1$ ، وبالتالي فإنه يسمح بتجاهل التربيع و الجداءات والقوى العالية لـ $\Delta x_i \; ; \; (i = 1,2, \dots, n)$، وبكتابة تقريب المرتبة الأولى نجد:

$$N + \Delta N = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (1.6)$$

وإذا طرحنا الآن (1.3) من (1.6) نحصل على:

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad (1.7)$$

إن العلاقة (1.7) هي تقريب المرتبة الأولى لخطأ التابع. كما أنه يمكن ملاحظة أنه لدينا نفس التعبير كما للتفاضل الكلي للتابع N . وكذلك فإن علاقة الخطأ النسبي تكون مباشرة كمايلي:

$$E_r = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\partial N}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{N} + \frac{\partial N}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{N} + \cdots + \frac{\partial N}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{N} \qquad (1.8)$$

إن علاقة الخطأ يمكن أن تطبق على التوابع وتفيد بتقدير أي إجراء يمكن أن يعبر عنه على شكل علاقة.

مثال 7.1:

قدر الخطأ في العلاقة التالية:

$$N = \frac{3x^2y}{z^3}$$

الحل:

لتقدير الخطأ في العلاقة N المرتكب بسبب خطأ في x ، y و z نحدد أولا المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{6xy}{z^3}; \; \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{3x^2}{z^3}; \frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{9x^2y}{z^4}$$

وبالتالي نجد أن وباستخدام العلاقة (1.7) :

$$\Delta N = \frac{6xy}{z^3}\Delta x + \frac{3x^2}{z^3}\Delta y + -\frac{9x^2y}{z^4}\Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta N_{max} = \left|\frac{6xy}{z^3}\Delta x\right| + \left|\frac{3x^2}{z^3}\Delta y\right| + \left|-\frac{9x^2y}{z^4}\Delta z\right|$$

وللاستمرار في حل المثال، نفرض أن: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}005$

عندئذ الخطأ الأعظمي عند النقطة $(1,1,1)$ يكون:

$$\Delta N_{max} = 6(0{,}005) + 3(0{,}005) + 9(0{,}005) = 0{,}090$$

✓ إن قيمة التابع عند النقطة $(1,1,1)$ تكون $N = 3$ والخطأ النسبي الأعظمي الذي يعطى في العلاقة (1.8) يكون:

$$E_{rmax} = \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{max} = \frac{1}{3}(0{,}090) = 0{,}3$$

✓ إن احتواء حدود مراتب عليا يكون مطلوبا فقط في حالات نادرة، وهكذا مثلا في المثال السابق فإن حد المرتبة الثانية يكون:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta x^2\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \Delta y^2\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \Delta z^2\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) + \Delta x\Delta y\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y} + \Delta x\Delta z\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z} + \Delta y\Delta z\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}$$

إن المشتقات الجزئية المحسوبة عند النقطة $(1,1,1)$ تصبح:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \dfrac{6y}{z^3} = 6;\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0;\dfrac{\partial^2 N}{\partial z^2} = \dfrac{36x^2y}{z^5} = 36 \\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial x\partial y} = \dfrac{6x}{z^3} = 6;\dfrac{\partial^2 N}{\partial x\partial z} = \dfrac{-18xy}{z^4} = -18;\dfrac{\partial^2 N}{\partial y\partial z} = \dfrac{-9x^2}{z^4} = -9 \end{cases}$$

إن المربعات و الجداءات المتناوبة للأخطاء من أجل: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}005$

تصبح:

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \Delta x\Delta y = \Delta x\Delta z = \Delta y\Delta z = 25.10^{-6}$$

عندئذ الخطأ الأعظمي عند النقطة $(1,1,1)$ محتويا على حدود المرتبة الثانية يكون:

$$\Delta N_{max} = 0{,}090 + [3 + 0 + 18 + 6 + 9 + 18] + 25.10^{-6} = 0{,}09135$$

✓ **ملاحظة:**

1. إن معالجة مسألة هي مسالة واسعة ولا تقتصر عند حد أو طريقة حيث إنه كما هو المعلوم أن التحليل العددي هو علم التقريب وبالتالي فإنه عند حل أي مسألة وفق طرق التحليل العددي سيكون هناك خطأ لهذه الطريقة (سيعالج عند ذكر كل طريقة من طرق التقريب). ومن الأمثلة على ذلك حساب الخطأ الناتج عن نشر السلاسل والذي يمكن تقديره بالباقي بعد n حد.
2. يمكن استخدام طريقة ثانية لحساب الخطأ المرتكب في حساب قيمة تابع بالشكل التالي:

1-4-1 الخطأ المرتكب في حساب قيمة تابع

ليكن التابع $y = f(x)$ لمتغير واحد ولنحسب الخطأ المرتكب في حساب قيمة y من أجل قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية x.

من أجل x_1 قيمة تقريبية نحصل على القيمة التقريبية $y = f(x_1)$ ثم نقرب y_1 إلى قيمة y_2 وبذلك نكون قد ارتكبنا خطأ مقداره:

$$y - y_2 = (y - y_1) + (y_1 - y_2)$$

بأخذ القيمة المطلقة للطرفين نجد أن:

$$|y - y_2| \leq |y - y_1| + |y_1 - y_2| \qquad (1.9)$$

إذن الخطأ المطلق المرتكب عبارة عن قسمين: $|y - y_1|$ هو الخطأ المطلق و $|y_1 - y_2|$ هو الخطأ الحسابي.

ولحساب الخطأ المطلق ننشر سلسلة تايلور للتابع $f(x) = y$ حول النقطة x_1، أي:

$$y - y_1 = f(x) - f(x_1) = (x - x_1)f'(\xi) \qquad (1.10)$$

حيث اكتفينا بالحد الحاوي للمشتق الأول، لنأخذ القيمة المطلقة للطرفين فنجد:

$$|y - y_1| \leq \varepsilon_x \, k \; ; \; |x - x_1| \leq \varepsilon_x \qquad (1.11)$$

و $max|f'(x)| < k$

وبالتالي يمكن تعميم ذلك على تابع لأكثر من متغير (متغيرين مثلا) فنجد:

$$|z - z_1| \leq \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2 \qquad (1.12)$$

حيث أن:

$$|x - x_1| \leq \varepsilon_1 \; ; \; |y - y_1| \leq \varepsilon_2$$

$$max|f'_x(x,y)| < k_1; \; max\left|f'_y(x,y)\right| < k_2 \qquad (1.13)$$

مثال 8.1:

أحسب الخطأ المرتكب في حساب قيمة التابع:

$$y = \frac{x-1}{x}$$

وذلك من أجل: $x_1 = 3{,}14$ و $x = \pi$

الحل:

الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب x_1 هو:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{10^2}\right) = \frac{1}{2.100} = 0{,}005$$

ثم نحسب:

$$y' = \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

وبما أن:$3 < x < 4$ وبتعويض الحد الأدنى لـ x كونه في المقام نجد أن: $k = \frac{1}{9}$

وبالتالي:

$$\varepsilon_x . k = \frac{5}{1000} . \frac{1}{9} = \frac{5}{9000} = \frac{55}{10^5}$$

وبما أن قيمة التابع من أجل $x_1 = 3.14$ هي:

$$y_1 = \frac{3.14 - 1}{3.14} = 0{,}6815286 \approx 0{,}682 = y_2$$

فإننا نكون قد ارتكبنا خطأ حسابي مقداره:$|y_1 - y_2| = 0{,}0005$

وخطأ كلي مقداره:

$$\frac{55}{10^5} + \frac{5}{10^4} = \frac{105}{10^5} < \frac{2}{1000} = 0.002$$

وبالتالي حدوديات الناتج تكون:

$$0{,}680 < y(x) < 0{,}684$$

على سبيل المثال، لندرس علاقة الخطأ في نشر سلسلة تايلور من خلال النظرية التالية:

نظرية 1.1 نظرية تايلور:

لنفرض أن $f(x) \in C^n[a,b]$ ومشتقاتها f^{n+1} موجودة على المجال $[a,b]$،ولتكن النقطة $x_0 \in [a,b]$ من أجل كل $x \in [a,b]$، يوجد نقطة $\xi(x) \in [x, x_0]$ حيث:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \qquad (1.14)$$

حيث:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n f^n(x_0)}{n!} + R_n \qquad (1.15)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n f^{n+1}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!} \qquad (1.16)$$

وهنا يسمى $p_n(x)$ كثير حدود تايلور النوني من أجل $f(x)$ حول النقطة x_0 و $R_n(x)$ يسمى الحد الباقي أو الخطأ المرافق لـ $p_n(x)$. والسلسلة النهائية التي نحصل عليها من النهاية $\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$ تسمى سلسلة تايلور لـ f حول x_0 .

في الحالة الخاصة عندما $x_0 = 0$ كثير حدود تايلور يسمى كثير حدود "ماك لوران"و السلسلة تسمى بسلسلة "ماك لوران".

مثال 9.1:
عين كثير حدود الثاني والثالث من أجل $f(x) = \cos x$ عند النقطة $x_0 = 0$ واستخدم كثير الحدود لتقريب القيمة $\cos(0.01)$.

الحل:

1- نطبق النظرية السابقة لنشر الدالة $f(x) = \cos x$ عند النقطة $x_0 = 0$ من أجل $n = 2$ نجد:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x)\,;\ \xi(x) \in [0, x]$$

بأخذ $x = 0{,}01$ فإن كثير حدود تايلور والحد الباقي يكون:

$$\cos 0{,}01 = 1 - \frac{1}{2}(0{,}01)^2 + \frac{1}{6}(0{,}01)^3 \sin \xi(x) = 0{,}9999 + 0{,}166.10^{-6} \sin \xi(x)$$

حيث: $\xi(x) \in [0; 0{,}01\ ]$

يمكننا أن نستخدم كتقريب لـ $\cos 0{,}01$ مع ستة أرقام عشرية على الأقل في الدقة وباستخدام الجداول لدينا:

$$\cos 0{,}01 = 0{,}999950042$$

نحسب الباقي:

$$R_2(x) = \left|\frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x)\right| \le |0{,}166.10^{-6}| \max_{0\le\xi(x)\le 0.01} |\sin \xi(x)| = 1.6.10^{-8}$$

2- نطبق النظرية السابقة لنشر الدالة $f(x) = \cos x$ عند النقطة $x_0 = 0$ من أجل $n = 3$ نجد:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos \xi(x)\,;\ \xi(x) \in [0, x]$$

بأخذ $x = 0{,}01$ فإن كثير حدود تايلور والحد الباقي يكون:

$$\cos 0{,}01 = 1 - \frac{1}{2}(0{,}01)^2 + \frac{1}{24}(0{,}01)^4 \cos \xi(x) = 0{,}9999 + 0{,}1.10^{-7} \cos \xi(x)$$

حيث: $\xi(x) \in [0; 0{,}01\ ]$

يمكننا أن نستخدم كتقريب لـ $\cos 0{,}01$ مع ستة أرقام عشرية على الأقل في الدقة وباستخدام الجداول لدينا:

$$\cos 0{,}01 = 0{,}999950042$$

نحسب الباقي:

$$R_3(x) = \left|\frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x)\right| \leq \frac{1}{24}(0{,}01)^4 \max_{0\leq\xi(x)\leq 0.01}|\cos\xi(x)| = 4{,}2.10^{-10}$$

مثال 10.1:

بوضع: $f(x) = e^x$

الحل:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1$$

ومنه:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + R_{n+1}$$

مثال 11.1:

بوضع: $f(x) = ch(x)$

لدينا المشتقات الفردية

$$f'(x) = f'''(x) = f^{(5)}(x) = sh(x) \Rightarrow f'(0) = f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0$$

أما المشتقات الزوجية

$$f''(x) = f''''(x) = ch(x) \Rightarrow f''(0) = f''''(0) = 1$$

ومنه:

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+1}$$

$$sh(x) = 1x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}$$

مثال 12.1:

بوضع $f(x) = \sin x$ ولدينا المشتقات الفردية والزوجية:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x, f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

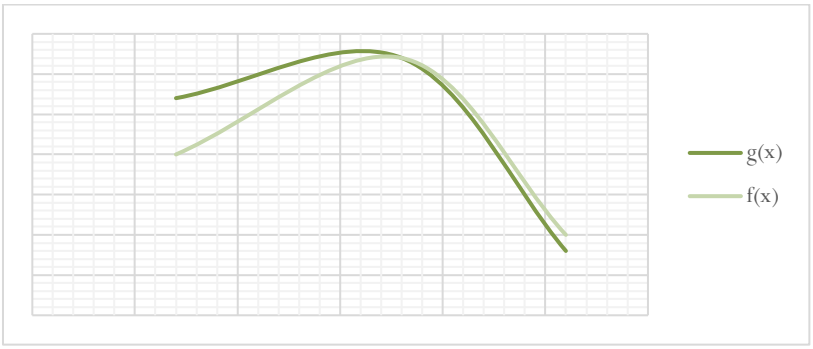
$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

ومنه:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}$$

2-4-1 تقريب تابع باستخدام تابع أخر

وهي تعويض الدالة$f(x)$ بدالة $g(x)$ حيث $f(x) \cong g(x)$ الى مجال $[a,b]$وفي كثير الأحيان تستعمل كثيرات الحدود كدوال تقريبية.



إن سلسلة تايلور عبارة عن كثيرات حدود

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{g(x)} + R_{n+1} \quad (1.17)$$

بخطأ $R \leq \frac{(x-x_0)}{(n+1)!} M$

- كلما كان n بعيدا عنx_0 كان الخطأ أكبر (زيادة الخطأ).
- كلما زادت رتبة القطع نقص الخطأ.

مثال 13.1:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

احسب كثير حدود تايلور من الرتبة الرابعة عند النقطة$x_0 = 3$ للدالة $f(x)$ ثم أوجد القيمة التقريبية لـ $\sqrt{11}; \sqrt{5}; \sqrt{4.5}; \sqrt{4.1}$ وماهي الأخطاء الناتجة عن ذلك؟

الحل:

$$f(x)=(1+x)^{1/2}\Rightarrow f(3)=2\ \ ;\ \ f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\ \rightarrow f'(3)=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\ \Rightarrow f''(3)=\frac{-1}{32};f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}\rightarrow f^{(3)}(3)=\frac{3}{256}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-15}{16}(1+x)^{-7/2}\Rightarrow f^{(4)}(3)=\frac{-15}{2048}$$

$$\Rightarrow g(x)=2+\frac{(x-3)}{4}-\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(x-3)^3}{512}-\frac{(x-3)^4}{16384}$$

ومنه:

$$\sqrt{4.1}=f(3.1)=g(3.1);\ \sqrt{4.5}=f(3.5)=g(3.5);\ \sqrt{5}=f(4)=g(4)$$

$$\sqrt{11}=f(10)=g(10)$$

x	3.1	3.5	5	11
القيمة التقريبية $g(x)$	2.0248457	2.1213188	2.2360229	2.91598
القيمة الحقيقية	2.0248457	2.1213203	2.2360680	3.316624
$E=\lvert f(x)-g(x)\rvert$	$E<10^{-7}$	1.5×10^{-6}	4.5×10^{-5}	0.4

- نلاحظ أن كثيرات الحدود المبنية حول النقطة $x_0=3$ تعطي ناتجا دقته تتناقص حسب ابتعاد x عن x_0
- كثيرات حدود تايلور لديها الخاصية ان كل المعلومات المستخدمة في التقريب مبنية حول النقطة الثابتة x_0 (أي تتطلب معرفة $\ldots,f''(x_0),f'(x_0),f(x_0)$) الشيء الذي حدد استخدامها في التقريب عند نقط بعيدة عن ولهذا يكون الأفضل استخدام طرق أخرى تحتوي على معلومات على الدالة عند نقاط مختلفة.

مثال 14.1:

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(x)=e^x$ عند $x_0=0.5$ باستعمال نشر تايلور من الدرجة الأولى، الثانية، الثالثة.

الحل:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

لدينا:

الدرجة الأولى: $e^x=p_1(x)=1+x\Rightarrow p_1(0.5)=1.5$

الدرجة الثانية : $e^x = p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \Rightarrow p_2(0.5) = 1.625$

الدرجة الثالثة : $e^x = p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \Rightarrow p_3(0.5) = 1.645833$

أما القيمة الحقيقية هي:

$$e^{0.5} = 1.6487213 \Rightarrow R_1 = 0.15;\ R_2 = 0.024;\ R_3 = 0.0029$$

5-1 خواص الأخطاء و تراكمها و دقة الأعداد

1-5-1 خواص الاخطاء

هناك خمس خوا ص للأخطاء

1) $\Delta(x+y) \leq \varepsilon(|x| + |y|)$
2) $\Delta x = |x' - x|;\ \Delta y = |y' - y|$
3) $\Rightarrow \Delta(x' + y') \leq \varepsilon(|x'| + |y'|) \sum \leq \varepsilon(|x| + |y| + \Delta x + \Delta y)$
4) $\Delta(xy) \leq \varepsilon(|xy|)$
5) $|x'y' - xy| = (x|y' - y| + y|x' - x|) \leq |x|(\Delta y + \Delta x)(\Delta y + \Delta x) \leq |x|\Delta y + \Delta x|y| + \Delta x.\Delta y$

2-5-1 دقة الأعداد

يوجد عادة نوعين من الأعداد، تلك الأعداد المضبوطة تماما، ونوع آخر يشير إلى قيم ذات درجات معينة من الدقة. مثال على ذلك: الأعداد الصحيحة ... ,1,2,3، الأعداد الكسرية ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, والأعداد ... $e, \pi, \sqrt{3}$, وغيرها من الأعداد المكتوبة بهذه الطريقة.

إن العدد المقرب هو واحد من تلك التي تعبر عن القيمة حيث الدقة تكون فقط لعدد من السجلات الرقمية وهكذا مثلا $\sqrt{3}$يكون مضبوطا كتابة ولكن لا يمكن أن نعبر عنه بدقة كرقم منته من الأعداد الرقمية، يمكننا أن نكتبه مثلا بالشكل 1.732 حيث يكون كتقريب أول، وكذلك يمكن كتابته بالشكل 1.73205 كتقريب أفضل. إن الأرقام المستخدمة للتعبير عن عدد تسمى أشكال معنوية إذا كان لهم معنى في العدد.

مثلا كل الأعداد الرقمية في 1.73205 تكون أشكال معنوية. بينما في العدد أشكال معنوية. الـ 0 1.73205 فقط 2,5,7استخدم لمكان النقطة العشرية.

إذا استخدم 0 في نهاية العدد، يجب إضافة معلومات إضافية لتحديد فيما إذا كان معنويا مثلا يمكن أن يكون دقيقا (مضبوطا) أو يمكن أن يكون تعبير مالي لأقرب ألف. إذا كانت الدقة مطلوبة، كل الأعداد تكتب على شكل نقطة عائمة مثل $5.25.10^5$ أو $5.25000.10^5$

إن العمليات الرياضية تقود الأعداد إلى عدم تحديد ولذلك من الضروري حذف أو قطع هذه الأعداد إلى الشكل المراد ويسمى هذا القطع بالتدوير والذي يخضع للقواعد التالية على الأعداد.

ليكن العدد:

$$X = x_1x_2x_3 \dots x_nx_{n+1} \dots x_{n+l}$$

عندئذ لتدوير هذا العدد إلى عدد معنوي يحتوي على n تحذف l رقم متتالي وفق مايلي:

1- إذا كان: $x_{n+1} > 5$ تحذف بزيادة 1 على x_n فتصبح $x_n + 1$

مثال 15.1:
60.73721 يدور إلى عدد يحوي على أربعة أرقام معنوية فيصبح بالشكل 60.74

2- إذا كان: $x_{n+1} < 5$ تحذف دون تغيير x_n

مثال 16.1:
60.7542 يصبح بعد تدويره لأربعة أرقام معنوية فيصبح بالشكل 60.75.

3- إذا كان: $x_{n+1} = 5$ نميز حالتين:

1-3 إذا كانت جميع الأرقام على يمين x_{n+1} معدومة فتتم عملية الحذف بزيادة 1 إلى x_n وذلك إذا كان: x_n فردي وإلا زوجي فيتم الحذف دون تغيير x_n.

2-3 إذا وجد رقم على يمين x_{n+1} غير معدوم فتتم عملية الحذف بزيادة 1 إلى x_n

مثال 17.1:
1- العدد 6.33500 يدور إلى ثلاثة أرقام.
2- العدد 23.4500 يدور إلى ثلاثة أرقام.

الحل:
1- العدد 6.34
2- العدد 23.4(دون تغيير).

1-5-3 الخطأ النسبي المرتكب في تدوير عدد ما

ويعطى بالقانون:

$$\tau \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1.18)$$

حيث a هو أول رقم في العدد المقرب من اليسار، و n هو عدد الأرقام في العدد المقرب.

مثال 18.1:
ما هو عدد الأرقام التي يجب أن نأخذها عند حساب $\sqrt{18}$ حتى لا يتجاوز الخطأ النسبي الأعظمي المقدار 0.003

الحل:
لنأخذ $a = 4$ لذلك لدينا:

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \leq 0.003\left(\frac{3}{10^3}\right) \Rightarrow 10^{n-1} \geq 41.6666 \Rightarrow n \geq 3$$

✓ **ملاحظات:**

1- من العلاقة: $E = |x - x_1| \leq \varepsilon_x$ حيث ε_x هو الحد الأعلى للخطأ المطلق يمكن كتابة:

$$x_1 - \varepsilon_x \leq x \leq x_1 + \varepsilon_x$$

إذن : $x = x_1 \pm \varepsilon_x$

2- يمكن حساب ε_x من القانون:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n} \qquad (1.19)$$

حيث n عدد الأرقام العشرية في العدد المدور.

3- بما أن العدد x غير معلوم في الغالب، فعندما نحسب E_r من العلاقة:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (1.20)$$

فإننا نستبد هذه العلاقة من العلاقة التالية:

$$\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x_1 - \varepsilon_x|} \qquad (1.21)$$

حيث x_1 هي القيمة التقريبية للعدد والتي تعطينا حدا أعلى للخطأ النسبي وفي حال كون ε_x صغيرة جدا بالنسبة لـx نستبدل هذه العلاقة بـ :

$$\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x_1|} \qquad (1.22)$$

4- إذا كانت x قريبة من 1 عندئذ يكون لدينا: $E_r = \delta_x$

4-5-1 تراكم الأخطاء

كما هو معلوم فإن هذه الأخطاء تتراكم وتزداد عند إجراء العمليات الحسابية على الأعداد التقريبية ويمكن تبيان ذلك من خلال بعض النظريات:

نظرية 2.1:

الخطأ المطلق المرتكب لمجموع جبري لعدد من الأعداد التقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة المرتكبة لها.

البرهان:

لنفرض الأعداد التالية: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وإذا كان $E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}, \dots, E_{x_n}$ على الترتيب الأخطاء المطلقة المرتكبة لهذه الأعداد وإذا كان: $x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$

$$E_x \leq E_{x_1} + E_{x_2} + E_{x_3} + \cdots + E_{x_n} \qquad (1.23)$$

نظرية 3.1:

إذا كان x_1, x_2 عددين مقربين وكان $x = x_1 - x_2$ فإن:

$$E_x \leq E_{x_1} + E_{x_2} \qquad (1.24)$$

أي أن الخطأ المطلق المرتكب في ناتج طرح عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين.

نظرية 4.1:

إذا كان x, y عددين مقربين فإن:

$$E_{x,y} \leq E_x|y_1| + E_y|x_1| \qquad (1.25)$$

حيث y_1, x_1 هما العددان التقريبيين.

ويمكن تعميم النظرية لأكثر من عددين بالشكل:

$$E_{x,y,z} \leq E_x|y_1 z_1| + E_y|x_1 z_1| + + E_z|x_1 y_1| \qquad (1.26)$$

نظرية 5.1:

وكذلك لدينا بالنسبة للقسمة النظرية التالية:

$$Ex_{/y} \leq \left|\frac{E_x}{|y_1|}\right| + E_y \left|\frac{x_1}{y_1^2}\right| \qquad (1.27)$$

✓ **ملاحظة:**

يمكن تعميم هذه النظريات على الحدود العليا للخطأ المطلق.

مثال 19.1:

أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في المجموع:

$$x + y = 12.23 + 3.12$$

الحل:

لدينا حسب القانون:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^n}\right)$$

بالنسبة لـ x لدينا $n = 2$ ومنه:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right) = \frac{1}{200} = 0.005$$

بالنسبة لـ y لدينا $n = 2$ ومنه:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right) = \frac{1}{200} = 0.005$$

ومنه فإن الحد الأعلى للخطأ المرتكب في المجموع هو:

$$0.005 + 0.005 = 0.01$$

نظرية 6.1: (الخطأ النسبي)

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل الجمع الجبري لعدد من الأعداد التقريبية الموجبة لا يتجاوز أكبر حد أعلى للأخطاء النسبية المرتكبة في الأعداد المجموعة أي إذا كان:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

فإن:

$$\delta_x \leq \max(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots, \delta x_n) \qquad (1.28)$$

نظرية 7.1:

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل طرح عددين تقريبيين x و y هو:

$$\delta_{x-y} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{|x_1 - y_1|} \qquad (1.29)$$

نلاحظ أنه إذا كانت x_1 قريبة من y_1 فإن هذه العلاقة لاتطبق.

نظرية 8.1:

الخطأ النسبي المرتكب في ناتج قسمة عددين تقريبيين x و y يساوي مجموع الخطأين النسبيين المرتكبين في المقسوم والمقسوم عليه.

مثال 20.1:

أحسب الخطأ النسبي الأعظمي المرتكب في حاصل الطرح

$$x - y = 32.413 - 32.415$$

الحل:

لدينا الحد الأعظمي للخطأ المطلق المرتكب لكل من العددين يساوي 0.0005 ومنه فإن:

$$\delta_{x-y} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{|x - y|} = \frac{0.0005 + 0.0005}{|32.413 - 32.415|} = \frac{0.001}{0.002} \approx 0.5$$

لو حسبنا الخطأ النسبي في كل من العددين التقريبيين نجد أن الخطأ النسبي المرتكب في المطروح منه هو:

$$\delta_x = \frac{0.0005}{32.413} \approx 0.00002$$

أما الخطأ النسبي المرتكب في المطروح هو:

$$\delta_y = \frac{0.0005}{32.415} \approx 0.00002$$

إذن الخطأ المرتكب في حاصل الطرح أكبر بكثير من الخطأ النسبي الأعظمي لكل من العددين x و y ويساوي تقريبا 25000 مرة وهذا يبين أنه لايمكن تطبيق القانون السابق عندما يكون كلا العددين متقاربين من بعضهما البعض.

✓ **ملاحظة:**

1- منشأ الخطأ هنا يكون بسبب الاكتفاء بعدد معين من المنازل العشرية بعد الفاصلة في الحسابات، ولكن مع هذا فان أخطاء التدوير صغيرة عند كل مرة من العمليات الحسابية أما إذا كانت لدينا عمليات حسابية كثيرة تكون النتيجة النهائية لها خطأ معتبر (كبير) وبالتالي فان التكرار هو السبب الأساسي الذي يضخم خطأ التدوير.

2- يزيد خطأ التدوير مع زيادة العمليات الحسابية .

6-1 تمارين

1-6-1 تمارين محلولة

التمرين الأول:

كم هو حد الخطأ النسبي إذا أخذنا بدلا من π العدد $a = 3.14$

الحل:

في هذه الحالة لدينا $n = 3; a = 3$ ومنه:

$$\tau \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{600} \approx 0.001666 = 0.002 \Rightarrow \tau \leq 0.002$$

التمرين الثاني:

كم رقم يجب أخذه في حساب $\sqrt{20}$ حتى لا يتجاوز الخطأ النسبي 0.0005.

الحل:

ليكن العدد الأول $a = 4$ ومنه:

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \leq 0.0005 \Rightarrow 10^{n-1} \geq \frac{1}{0.004} = 250 \Rightarrow n \geq 4$$

التمرين الثالث:

قرب أو دور الأعداد التالية إلى خمسة أرقام معنوية

$$31.35764; 10.19313; 14.32250; 14.32150$$

الحل:

31.35764 تدور إلى 31.358

10.19313 تدور إلى 10.193

14.32250 تدور إلى 14.322

14.32150 تدور إلى 14.322

التمرين الرابع:

ليكن العدد $x = 5.3251$ ولنفرض أن هذه القيمة قربت إلى القيمة التقريبية $x_1 = 5.3$

أحسب كل من الخطأ المرتكب والخطأ المطلق.

الحل:

1- الخطأ المرتكب:

$$\varepsilon_x = x - x_1 = 0.0251$$

أو:

$$\varepsilon_x = x_1 - x_0 = -0.0251$$

2- الخطأ المطلق:

$$E = |\varepsilon_x| = 0.0251$$

كما يمكن أن نعتمد القيمة 0.03 كحد أعلى من القيمة E ونرمز له بالرمز ε_x أي أن: $\varepsilon_x = 0.03$، كما يمكن اعتبار حدود عليل أخرى مثل 0.04 و 0.05.

ومنه: $x = 5.3 \pm 0.03$.

التمرين الخامس:

أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حاصل الضرب للعددين:

$$x.y = (2.23)(12.3)$$

الحل:

نحسب: $\varepsilon_x = 0.005;\ \varepsilon_y = 0.05$

ومنه الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب يكون:

$$0.005(12.3) + 0.05(2.23) = 0.173$$

التمرين السادس:

أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حاصل القسمة للعددين:

$$\frac{x}{y} = \frac{13.2}{23.13}$$

الحل:

نحسب: $\varepsilon_x = 0.05;\ \varepsilon_y = 0.005$

ومنه الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب يكون:

$$\frac{0.05}{23.13} + 0.005\frac{13.2}{(23.13)^2} = 0.0022849 < 0.0023$$

التمرين السابع:

ليكن: $I_n = f(x) - \int_0^1 \frac{x^n}{a+x} dx;\ \ a > 1$

-أحسب $I_0 = f(0)$ ، أحسب$f(x)$ بدلالة $f(n-1)$ ثم أحسب من أجل $a = 10$

الحل:

1) $I_0 = f(0) = \int_0^1 \frac{dx}{a+x} = \ln|a+x|_0^1 = \ln\frac{a+1}{a}$

2) $I_n = f(x) = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a-a)}{a+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} - a\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{a+x} dx$

$$I_n = f(x) = \frac{1}{n} - af(n-1)$$

ومنه:

$$I_n = \begin{cases} I_0 = \ln\frac{a+1}{a} \\ I_n = \frac{1}{n} - a.f(n-1) \end{cases}$$

3) نعوض $a = 10$ نجد:

$$I_n = \begin{cases} I_0 = \ln\frac{11}{10} \\ I_n = \frac{1}{n} - 10.I_{n-1} \end{cases}$$

2-6-1 تمارين غير محلولة

<u>التمرين الأول:</u>

دور الأعداد التالية إلى خمسة أرقام معنوية:

$$38.46235; 2.37425; 0.00237135; 0.700029$$

<u>التمرين الثاني:</u>

1- أحسب مجموع الأعداد التالية:

$$12.3172; 11.283;\ 4.3496; 2.4875$$

2- أحسب الخطأ النسبي المرتكب.

التمرين الثالث:

أوجد قيم التابع: $f(x) = 7x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 2$

من أجل:

$$x = 2, 3, \frac{1}{2}, 1.3298$$

<u>التمرين الرابع:</u>

أوجد الخطأ النسبي المرتكب في كل مما يلي:

$$a)\ 8.12 + 6.7; b)\ 8.12 - 4.2; c)\ (8.12)(6.7)\ ; d)\ {}^{8.124}/_{3.1}$$

التمرين الخامس:

أحسب الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب في حساب القيمة:

$$A = \frac{312.7 - (4.3)(2.61)}{(2.1)(13.41)}$$

التمرين السادس:

أوجد كثير تايلور الرابع للتابع f عند النقطة $x_0 = 0$ حيث $f(x) = e^x . \cos x$ واستخدم كثير الحدود هذا لتقريب $f\left(\frac{\pi}{16}\right)$ وأوجد حد الخطأ لهذا التقريب.

التمرين السابع:

أوجد كثير تايلور الرابع للتابع f عند النقطة $x_0 = 1$ حيث $f(x) = e^{x^2}$ واستخدم كثير الحدود هذا لتقريب $f(1.1)$ وأوجد حد الخطأ لهذا التقريب.

التمرين الثامن:

أحسب الحد الأعلى للخطأ المرتكب في ناتج العمليات التالية:

$$B = \frac{13.23 + 24.2 - 2.321}{(3.14)(1.324)}$$

للحل:

أحسب الخطأ الأعظمي المرتكب في البسط وكذلك الخطأ الأعظمي المرتكب في المقام، ثم أحسب الخطأ المرتكب في ناتج القسمة حسب قانون الخطأ في القسمة.

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

تمهيد

إن معظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية تكون غير خطية وحل هذه المعادلات أو إيجاد الجذور لها ليس بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرق العددية. لإيجاد هذه الجذور نبحث عن القيم القريبة جدا لها أي البحث عن أصغر قيم x القريبة جدا من جذر المعادلة. من أجل ذلك سوف نتطرق إلى بعض الطرق العددية التكرارية لحل المعادلات غير الخطية.

1-2 شرح مبدأ حل المعادلاتغير الخطية بالطرق التكرارية

إن معظم الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية هي طرق تكرارية، وهي تبدأ بتحديد حل ابتدائي x_0 لنحصل على متتالية الحلول التقريبية $x_n, \dots, x_2, x_1, x_0$ للمعادلة $f(x) = 0$.

وتتقارب هذه الطرق إذا كان: $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ ، حيث الجذر الحقيقي (الدقيق) لحل المعادلة السابقة أو باستخدام الخطأ: $\lim_{n\to+\infty} |\alpha - x_n| = \lim_{n\to+\infty} E_n = 0$

وهناك نوعين من الطرق العددية:

1- طرق متقاربة دائما: مثل طريقة التقسيم الثنائي وطريقة الوتر.

2- طرق متقاربة تحت شروط: مثل طريقة نيوتن وطريقة النقطة الثابتة.

- **شروط التوقف:**

نتوقف بعد عمليات التكرار عندما يتحقق احد الشروط التالية:

$$(1) \qquad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

$$(2) \qquad \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$$

$$(3) \qquad |f(x_n)| < \varepsilon$$

✓ **ملاحظة:**

نكتفي بحساب الجذور الحقيقية دون الجذور المركبة.

2-2 طريقة عزل جذور المعادلة

لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ القابلة للاشتقاق عدد من المرات في المجال $[a, b]$والتي نبحث فيها عن جذور المعادلة $f(x) = 0$ نقول أن الجذر x هو جذر معزول للمعادلة أي حصر كل جذر في مجل ضيق قدر الإمكان، ولكن هده الطريقة تساعدنا من أجل تطبيق الطرق التكرارية العددية إدا لم يعطى لنا المجال المطلوب ويمكن عزل الجذر بطريقتين.

1-2-2 الطريقة التحليلية (الطريقة الأولى)

نظرية رول1.2

لتكن $f(x) = 0$، ولتكن$f(x)$ مستمرة على المجال $[a, b]$ فإن يوجد $\exists c \in]a, b[$, ويحقق: $f'(c) =$ 0، وليكن N عدد الجذور في هذا المجال:

1- إذا كان: $f a).f(b) < 0$ فإن N فردي.

2- إذا كان: $f a).f(b) > 0$ فإنN زوجي أو يساوي الصفر .

3- إذا كان: $f a).f(b) < 0$ و$f'(x) \neq 0$ في المجال $[a, b]$ فإن يوجد جذر وحيد في المجال $[a, b]$ أي $N = 1$

مثال 1.2:

أوجد جذور المعادلة $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

الحل:

لدينا:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

x	-3	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$+\sqrt{2}$	3	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

نلاحظ أن:

1- لا يوجد جذر في المجال $]-\infty, -3[$

2- $f(-3).f(-1) < 0$ وأيضا $f(-3).f\left(-\sqrt{2}\right) < 0$ وعليه يوجد جذر في سالب في المجال $\left[-3, -\sqrt{2}\right]$

3- لا يوجد جذر في المجالين $\left[-\sqrt{2}, -1\right]; [-1,0]$

4- $f\ f(0).f(1) < 0$ وعليه يوجد جذر موجب في المجال $[0,1]$

5- لا يوجد جذر في المجال $\left[1, +\sqrt{2}\right]$

6- $f(3).f\left(\sqrt{2}\right) < 0$ وعليه يوجد جذر في موجب في المجال$\left[\sqrt{2}, 3\right]$

7- لا يوجد جذر في المجال $]3, +\infty[$

2-2-2 الطريقة البيانية (الطريقة الثانية)

- طريقة أولى (طريقة الرسم البياني للدالة $f(x)$):

يمكن تحويل المعادلة $f(x) = 0$ إلى معادلة مكافئة لها هي: $g(x) = H(x)$.

في هذه الحالة جذور المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل تقاطع المنحنيين $g(x)$ مع $H(x)$.

- طريقة ثانية:

نكون جدول يحوي x_i و$f(x_i)$ ونبحث عن المجالات التي تتغير فيها إشارة $f(x)$

مثال 2.2:

اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$ حيث: $f(x) = e^x + x$ (إيجاد عدد الجذور وحصر كل جذر في مجل ضيق بين كل عددين حقيقين)

الحل:

الطريقة الأولى:

$$f(x) = e^x + x = 0 \Rightarrow e^x = -x \Rightarrow \begin{cases} H(x) = -x \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

عند رسم البيانين نلاحظ وجود جذر وحيد $-1 < \alpha < 0$، ويحقق:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -0{,}63 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(-1) < 0$$

الطريقة الثانية:

$$f(x) = e^x + x \Rightarrow f'(x) = e^x + 1 > 0;\ \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

ولدينا$f(x)$ رتيبة (متزايدة تماما) ومنه $f(x)$ يقبل جذر وحيد في المجال $]-\infty, +\infty[$ ويحقق:

$f'(c) = 0$، لكن نلاحظ أن: $f(0) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x)\, f(0) < 0 \Rightarrow \exists! \in]-\infty, 0[; f(c) = 0$$

أي أن الجذر الوحيد هو جذر سالب.

ولأن هذه الطريقة تهدف إلى تصغير المجلات وتضيقها والتي تحوي الجذور فإن ما نلاحظه هو:

$$f(-1) < 0 \Rightarrow 1f(0)f(-1) < 0 \Rightarrow\Rightarrow \exists \in]-1{,}0[; f(c) = 0$$

وهي طريقة للحصر التدريجي أي تصغير المجالات وتضييقها وكلها تحوي الجذر α.

مثال 3.2:

إعزل جذور المعادلة $f(x)=0$ حيث: $f(x)=x\ln x-1$

الحل:

نستخدم طريقة تقاطع بياني الدالتين $g(x)$ مع $H(x)$ كمايلي:

$$f(x)=x\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{x}\Rightarrow \begin{cases} H(x)=\ln x \\ g(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

عند رسم البيانين نلاحظ وجود جذر وحيد $2<\alpha<3$، ويحقق:

$$\begin{cases} f(2)=-0{,}39 \\ f(3)=0{,}43 \end{cases}\Rightarrow f(2)f(3)<0\Rightarrow 2<\alpha<3$$

وعليه، فإن الجذر الوحيد α ينتمي إلى المجال $[2,3]$.

نظرية 2.2 (نظرية التزايدات المنتهية)

إذا كانت $f(x)$ مستمرة على المجال$[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$، فإنه يوجد على الأقل $c\in[a,b]$ ويحقق:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نظرية 3.2 (تقييم الخطأ)

إذا كان α هو الجذر الحقيقي و x_n هو الجذر التقريبي للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$، و إذا كان $f\in C^1[a,b]$ فإنه يوجد على الأقل $m>0$ ويحقق:

$$|\alpha-x_n|\leq\frac{|f(x_n)|}{m}$$

البرهان:

نفرض أن:

$$f\in C^1[a,b]\Rightarrow \exists m>0;\ m=\inf_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

وحسب نظرية التزايدات المنتهية فإن:

$$\exists c\in[x_n,\alpha];\ f'(c)=\frac{f(\alpha)-f(x_n)}{\alpha-x_n}$$

$$\Rightarrow |f'(c)||\alpha-x_n|=|f(\alpha)-f(x_n)|;\ f(\alpha)=0$$

$$\Rightarrow |f(x_n)| = |f'(c)||\alpha - x_n| \Rightarrow |\alpha - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(c)|}$$

ولدينا: $m = \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

$$\Rightarrow |\alpha - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(c)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{m};\ \forall x \in [a,b] \qquad (2.1)$$

3-2 الطرق التكرارية لحل المعادلات غير الخطية

لكي نعين جذر المعادلة وبالدقة التي نريدها، هناك عدة طرق لإيجاد الجذور القريبة لمثل هذه المعادلات والتي تدعى بالطرق التكرارية لحل المعادلات ولها مجال واسع من التطبيقات وهي طرق تؤدي عادة لإيجاد جذور قريبة جدا من الجذور الدقيقة وفي بعض الأحيان النادرة تؤدي إلى الجذور الدقيقة، وهذه الطرق التكرارية تحتاج إلى فرض قيمة تقريبية ابتدائية x_0 للجذور الدقيقة (المعادلة) ثم يكرر استخدام صيغة الطريقة التكرارية عدة مرات للحصول على قيم متتابعة أو متقاربة إلى الجذر الدقيق إلى أن نصل إلى الدقة التي نحتاجها. إن إختيار طريقة معينة وتفضيلها على الأخرى يعتمد على عدة عوامل منها السرعة والدقة في التقارب وما إذا كانت الجذور حقيقية أم مركبة ,بسيطة أم متعددة، وما إذا كانت لدينا قيم تقريبية ابتدائية أم لا. ومن بين هذه الطرق سوف نتطرق إلى مايلي:

1-3-2 طريقة التقسيم الثنائي

طريقة التنصيف أو التقسيم الثنائي هي إحدى طرق إيجاد الجذر والتي بها يتم تنصيف مجال ما بصورة تكرارية واختيار مجال يحوي هذا الجذر من أجل تحسين أو تصغير تدريجي للمجال الذي يحوي هذا الجذر. مع أنها بسيطة جدا ومرنة إلا أن طريقة التنصيف بطيئة نسبيا.

نظرية 4.2

لتكن الدالة $f(x)$ مستمرة ومعرفة في المجال$[a,b]$ وتحقق $f(a).f(b)<0$ أي أنهما مختلفان في الإشارة فان معنى ذلك أن أحد جذورالمعادلة $f(x)=0$ على الأقل يقع في نطاق المجال$[a,b]$.

(أنظر الشكل 1-1) في هذه الحالة نتبع الخوارزمية التالية للوصول إلى حل هذه المعادلة:

- إيجاد متوسط القيمتان a,b المعرفة عندهما الدالة وليكن x_0 حيث أن $x_0 = (a+b)/2$.
- إذا كانت قيمة $f(x_0)=0$ فإن x_0 جذر للمعادلة $f(x)=0$ وحلا لها.
- أما إذا كان $f(x_0)\neq 0$ فإننا نحسب إشارة $f(x_0).f(b)$ فنجد حالتين:

1. $f(x_0).f(b)<0 \Rightarrow \alpha \in [x_0,b]$، وبالتالي نعيد التقسيم مرة ثانية أي:

$$x_1 = \frac{x_0+b}{2};\ x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad (2.2)$$

2. $f(x_0).f(a)<0 \Rightarrow \alpha \in [a,x_0]$، وبالتالي نقسم المجال الأول بدل الثاني أي:

$$x_1 = \frac{a+x_0}{2};\ x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad (2.3)$$

ثم نحسب $f(x_1)$ فإن كان جذر للمعادلة فهو يحقق حلا لها أي: $f(x_1) = 0$

- أما إذا كان $f(x_1) \neq 0$ فإننا نحسب إشارة $f(x_1).f(b)$ فنجد حالتين:

1. $f(x_1).f(b) < 0 \Rightarrow \alpha \in [x_1, b]$، وبالتالي نعيد التقسيم مرة ثانية أي:

$$x_2 = \frac{x_1 + b}{2};\ x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad (2.4)$$

2. $f(x_1).f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in [a, x_1]$، وبالتالي نقسم المجال الأول بدل الثاني أي:

$$x_2 = \frac{a + x_1}{2};\ x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad (2.5)$$

ونبقى بهذا التقسيم حتى نصل إلى المتتالية:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (2.6)$$

❖ **البرهان: تقارب الطريقة**

لدينا:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2} \\ b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} \\ \vdots \\ b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$\Rightarrow |\alpha - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \Rightarrow E_n \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

بضرب أطراف المعادلة السابقة(2.7) طرف إلى طرف نجد:

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \frac{(b-a)(b_1 - a_1) \dots (b_{n-1} - a_{n-1})}{2^n}$$

$$\Rightarrow (b_n - a_n) = \frac{(b-a)}{2^n}$$

ولأن:

$$E_n \leq \frac{b_n - a_n}{2} \Rightarrow E_n \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} E_n = 0 \qquad (2.8)$$

- عمليا الخطأ يحسب كمايلي: $E_n \leq |b_n - x_n|$ أو $E_n \leq |x_n - a_n|$

- يمكننا حساب عدد التكرارات n بحيث الخطأ E_n لا يتجاوز ε :

$$E_n \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow 2^{n+1} \geq \frac{(b-a)}{\varepsilon} \Rightarrow 2^n \geq \frac{(b-a)}{2\varepsilon}$$

$$n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon}\right) \qquad (2.9)$$

مثال 4.2:

1- أحسب عدد التكرارات n بحيث الخطأ $\varepsilon = 10^{-3}$ لما $[a,b] = [1,2]$

2- أحسب عدد التكرارات n بحيث الخطأ $\varepsilon = 10^{-5}$ لما $[a,b] = [1,2]$

الحل:

$$n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(2-1)}{2(10^{-3})}\right) \Rightarrow n \geq 8{,}96 \Rightarrow n = 9$$

$$n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(2-1)}{2(10^{-5})}\right) \Rightarrow n \geq 15{,}6 \Rightarrow n = 16$$

✓ **ملاحظة:**

العيب في هده الطريقة أنها بطيئة وتسمى بطريقة المجالات المتداخلة ومزاياها أنها متقاربة لكن ببطئ ودون شروط.

مثال 5.2:

باستخدام طريقة التقسيم الثنائي، أوجد جذر المعادلة غير خطية $f(x) = 0$ وذلك في المجال $[2{,}8;\ 3{,}1]$ حيث:

$$f(x) = \ln x - x + 1{,}901387$$

الحل:

نتأكد من شرط وجود الجذر في المجال $[2{,}8;\ 3{,}1]$

$$f(2{,}8) = 0{,}131, f(3{,}1) = -0{,}0672 \Rightarrow f(2{,}8).f(3{,}1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [2{,}8;\ 3{,}1]$$

هذا يعني أن الجذر موجود في المجال $[2{,}8;\ 3{,}1]$

التقسيم الأول:

$x_1 = (a+b)/2 = (2{,}8 + 3{,}1)/2 = 2{,}95 \Rightarrow f(x_1) = f(2{,}95) = 0{,}03 > 0$

وبما أن $f(2{,}95).f(3{,}1) < 0$، فان الجذر موجود في المجال $[2{,}95;\ 3{,}1]$.

التقسيم الثاني:

$$x_2 = \frac{2,95 + 3,1}{2} = 3,025 \Rightarrow f(x_1) = f(3,025) = -0,02 < 0$$

$$\Rightarrow f(2,95).f(3,025) < 0$$

أي أن الجذر موجود في المجال $[2,95; 3,025]$

التقسيم الثالث:

$$x_3 = \frac{2,95 + 3,025}{2} = 2,987 \Rightarrow f(x_2) = f(2,987) = 0,01 > 0$$

$$\Rightarrow f(2,987).f(3,025) < 0$$

إذا الجذر موجود في المجال $[2,987; 3,025]$

نلاحظ أنه من أجل القيمتين $f(2,987)$ و$f(3,025)$ يمكن اعتبار القيمة التقريبية للجذر الحقيقي هي:

$$x_r = \frac{3,025 + 2,987}{2} = 3,006$$

مثال 6.2:

حسن جذر المعادلة التالية: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ بطريقة التقسيم الثنائي في المجال $[0,1]$

الحل:

نتأكد من شرط وجود الجذر في المجال $[0,1]$

$$f(0) = -1, f(1) = 1 \Rightarrow f(0).f(,1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$$

هذا يعني أن الجذر موجود في المجال $[0,1]$

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow f(x_1) = f(0,5) = -0,19 > 0$$

ويمكن تلخيص الخطوات المتبقية للطريق في هذا الجدول:

i	x_i	$f(x_i)$	$[x_i, x_{i+1}]$
0	0	-1	[0,1]
1	1	1	[0,5; 1]
2	0,5	-1,19	[0,75; 1]
3	0,75	-0,59	[0,75; 0,875]
4	0,875	0,05	[0,8125; 0,875]
5	0,8125	-0,304	[0,8437; 0,875]
6	0,8437	-0,135	[0,8593; 0,875]

إذن الجذر موجود في المجال $[0,8593; 0,875]$

نلاحظ أنه من أجل القيمتين $f(0,875)$ و $f(0,8593)$ يمكن اعتبار القيمة التقريبية للجذر الحقيقي هي:

$$x_r = \frac{0,8593 + 0,875}{2} = 0,867$$

2-3-2 طريقة الوتر (الاستيفاء بطريقة القاطع للاغرانج)

طريقة الوتر هي أحد طرق التحليل العددي لإيجاد الجذر الحقيقي للمعادلة $f(x) = 0$.

❖ **شرح الطريقة**

نختار نقطتين x_1, x_2 قيمتين لـ x بحيث $f(x_1)f(x_2) < 0$ ، حيث $f(x)$ تابع حقيقي مستمر على المجال $[x_1, x_2]$ ، إن طريقة الوتر هي طريقة بسيطة لحساب الجذر الحقيقي α للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[x_1, x_2]$، هذه الطريقة تشتق من رسم التابع $f(x)$ في المجال $[x_1, x_2]$ ، $i = 2,3,4, \dots$ ، ونرسم الخطوط المستقيمة (القواطع) بين النقاط: $(x_1, f(x_1))$ و $(x_i, f(x_i))$ ثم نحدد القيم x_{i+1} الموافقة لـ $y = 0$ على الخط. إذن قيمة x تم استيفاؤها بحدود تابعة لـ y وتسمى أيضا بطريقة الاستيفاء العكسي الخطي.

❖ **شروط تقارب الطريقة**

لابد من تحقق الشروط التالية (شروط فورييه)لضمان تقارب الطريقة وبالتالي وجود جدر وحيد α للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[x_1, x_2]$ وهي:

1- $f(x_1)f(x_2) < 0$

2- - $f(x_1)f''(x_1) > 0; f''(x) \neq 0, \forall x \in [x_1, x_2]$

❖ **آلية الحل**

باستخدام علاقة نقطتين للخط المستقيم|، يمكن كتابة معادلة الوتر المار من النقطتين $(x_i, f(x_i)), (x_1, f(x_1))$ بالشكل:

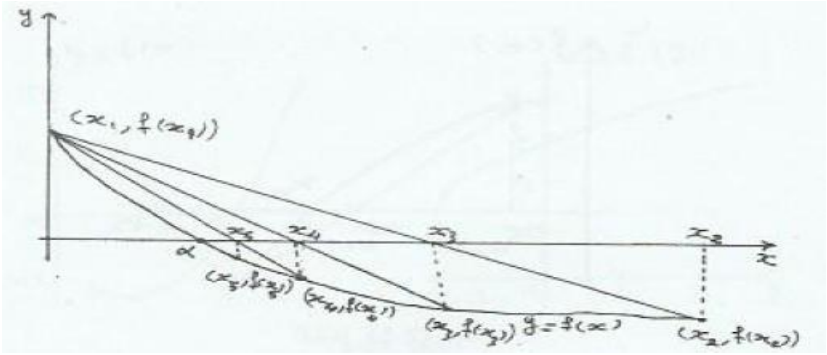
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_1)f(x_i)}{f(x_i) - f(x_1)} \qquad (2.10)$$

هذا الوتر يقطع المحور X في نقطة فاصلتها x_{i+1} داخل المجال $[x_1, x_i]$وهكذا:

$$x_1 < x_3 < x_2;\ x_1 < x_4 < x_3; \dots; x_1 < x_{i+1} < x_i$$

هذا يعني أن القيم $x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots x_2,$ تشكل متتالية متناقصة محدودة من الأسفل بـ كما في الشكل (2.1).

إن متتالية التقريبات المتتالية $x_3, \dots, x_2,$ تتقارب إلى القيمة (نهاية) ما α_0 حيث: $\alpha_0 \geq \alpha$.



الشكل (2.1)

وبما أن هذه المتتالية متناقصة ومحدودة بالجذر بـ α (وبأخذ نهاية العلاقة (2.10)) نجد أن:

$$\alpha_0 = \alpha_0 - \frac{(\alpha_0 - x_1)f(\alpha_0)}{f(\alpha_0) - f(x_1)} \qquad (2.11)$$

وبما أن: $\alpha_0 \neq x_1$ ، ينتج أن $f(\alpha_0) = 0$ ، وبالتالي $\alpha_0 = \alpha$ وبالتالي α هو لجذر الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ وهذا يعني متتالية التقريبات التكرارية السابقة:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_1)f(x_i)}{f(x_i) - f(x_1)} \qquad (2.12)$$

تتقارب من الجذر الدقيق α

كما يمكن استنتاج هذه العلاقة بشكل آخر:

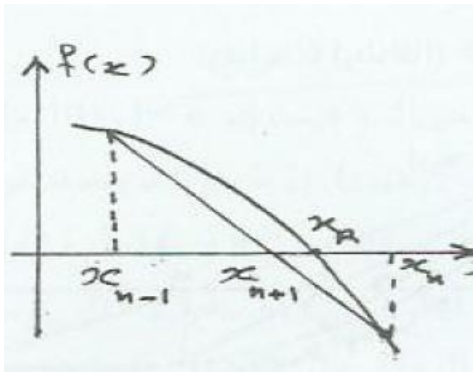
من الشكل (2.2) نستنتج x_{n+1} من x_n, x_{n-1} حيث أنه من نظرية طالس لدينا:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{0 - f(x_n)} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (2.13)$$

ومنه نجد أن:

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1})\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (2.14)$$

وهي نفس علاقة التقريب التكرارية السابقة.



الشكل(2.2)

مثال 7.2:

أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ باستخدام طريقة القواطع للاغرانج في المجال [2,3].

الحل:

لدينا: $f(x) = x^3 - 2x - 5$

$$x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = -1 \; ; x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = 16 \Rightarrow f(2)f(3) < 0$$

وبالتالي فإن لهده المعادلة على الأقل جذر واحد في المجال [2,3].

في طريقة طريقة القواطع للاغرانج نحصل على:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} . f(x_1) = 2 + \frac{1}{17} = 2.0588$$

$$f(x_2) = f(2.0588) = -0.3908 < 0$$

وبالتالي فإن لهده المعادلة على الأقل جذر واحد في المجال [2,0588,3].

$$x_1 = 2.0588 \; x_2 = 3$$

$$f(x_1) = -1.3908 \; , f(x_2) = 16$$

نحصل على:

$$x_3 = 2.0588 - \frac{0.9412}{16.03908(-0.3908)} = 2.0813$$

وبتكرار هذه العملية نحصل على:

$$x_4 = 2.0862 \; , x_5 = 2.0915$$

$$x_6 = 2.0934 \; , x_7 = 2.0941 \; , x_8 = 2.0943$$

3-3-2 طريقة نيوتن (طريقة المماسات) (طريقة نيوتن رافسون)

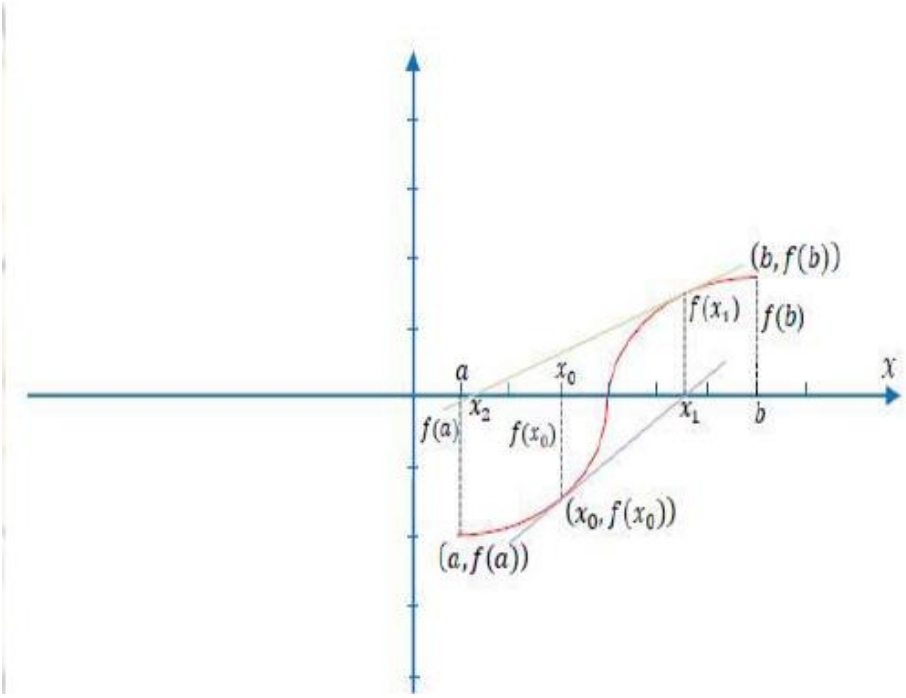
هي خوارزمية فعالة لإيجاد جذور تابع حقيقي. لذلك تعتبر مثالا لخوارزميات إيجاد الجذور. يمكن استخدامها لإيجاد الحدود العليا والحدود الدنيا لمثل هذه التوابع، عن طريق إيجاد جذور المشتق الأول للتابع.

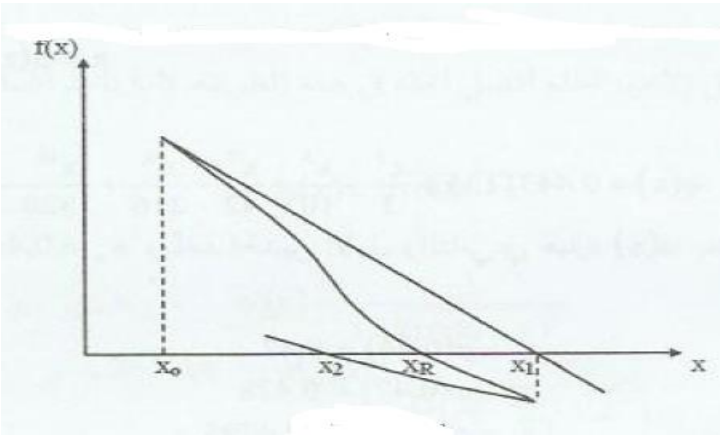
❖ **آلية الحل**

نختار قيمة قصوى قريبة من "جذر المعادلة". ونغير التمثيل البياني بالمماس ونحسب الصفر التقريبي. صفر المماس هو قيمة تقريبية لجذر المعادلة، ومن ثم يمكن إعادة الحساب للحصول على حل أكثر قربا للجذر.

انطلاقا من النقطةx_0 نرسم المماس عند هذه النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ ، تقاطع هذا المماس مع محور الفواصل يعطينا النقطة x_1، من النقطة x_1 نرسم مماسا ثانيا عند هذه النقطة يتقاطع مع محور الفواصل في النقطة x_2 ، وهكذا وبالتالي نحصل على متتالية من الحلول التقريبية $x_3, x_2, x_1, x_0 \ldots$

❖ **ميل المماس**





$$\acute{f}(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow x_0\acute{f}(x_0) - f(x_0) = x_1\acute{f}(x_0) \qquad (2.15)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)} \qquad (2.16)$$

وبنفس الطريقة بالنسبة لباقي التقريبات $x_n \ldots x_5, x_4, x_3, x_2$ أي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)} \qquad (2.17)$$

❖ **شروط التقارب**

نظرية 5.2:

لتكن المعادلة غير الخطية $f(x)=0$، إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث $f(a).f(b)<0$ ، وتحقق الشرط: $f'(x)\neq 0, f''(x)\neq 0;\ \forall x\in[a,b]$

فإن طريقة نيوتن رافسون تولد متتالية متقاربة نحو الجذر الدقيق α للمعدلة السابقة في المجال $[a,b]$ انطلاقا من النقطة x_0 والتي تحقق شرط التقارب التالي: $f'(x_0).f''(x_0)>0$

البرهان:

توجد أربعة حالات:

1- $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$

2- $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$

3- $f(a)>0, f(b)<0, f'(x)<0, f''(x)<0$

4- $f(a)>0, f(b)<0, f'(x)>0, f''(x)<0$

وسوف نبرهن على الحالة الأولى فقط وبنفس الطريقة يمكن أن نبرهن بقية الحالات.

$$f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$$

❖ نبرهن أن المتتالية x_n متناقصة ومحدودة $(n=0,1,2,\dots)$

ونحقق شرط التقارب أي $f(x_0)>0$، إذا $f(x_0).f''(x_0)>0$

- باختيار: $x_0=b$، نبرهن أن $x_n>\alpha$ بالتدريج ابتداء من $x_0=b>\alpha$

- نفرض أن: $x_n>\alpha$ ونبرهن أن: $x_{n+1}>\alpha$. حسب نشر تايلور لدينا:

$$f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}f''(c)=0$$

$$\Rightarrow f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)=-\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}f''(c)<0$$

لأن : $f''(x)>0$ فإن:

$$(\alpha-x_n)<-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Rightarrow \alpha<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}\Rightarrow x_n>\alpha\Rightarrow f(x_n)>0$$

ولدينا:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}>0\Rightarrow x_{n+1}<x_n \qquad (2.18)$$

ومنه المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالجذر الحقيقي α، إذا فهي متقاربة نحو α.

❖ نبرهن أن: $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha; f(\alpha) = 0$

لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n - \frac{f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)}{f'\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0 \qquad (2.19)$$

مثال 8.2:

باستخدام طريقة نيوتن قرب جذر المعادلة $f(x) = 0$ في المجال: $[1,2]$

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

الحل:

1- نحسب مشتقة الدالة $f'(x) = 2x - 1$ نفرض الحل الابتدائي في المجال $[1,2]$هو $x_0 = 1$ ونتأكد أن مشتقة الدالة عند x_0 لا يساوي صفر

$$f'(1.5) = (2.1,5) - 1 = 2 \neq 0$$

2- نطبق شرط تقارب الطريقة أي: $f'(1.5)\, f''(1.5) = 2.2 = 4 > 0$

3- باستخدام قانون نيوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = 1.5 - \frac{((1.5)^2 - 1.5 - 1)}{(2(1.5) - 1)} = 1.625$$

$$x_2 = 1.625 - \frac{0.015625}{2.25} = 1.618055556$$

$$x_3 = 1.618055556 - \frac{0.0000482}{2.236111} = 1.618034001$$

مثال 9.2:

علل سبب فشل طريقة نيوتن عندما $x_0 = 2$ لحل المعادلة التالية:

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 = 0$$

الحل:

أولا نشتق الدالة ونختار النقطة $x_0 = 2$ نجد:

$$f'(x) = 2(x-2) \Rightarrow f'(2) = 2(2-2) = 0$$

نلاحظ أن المماس يوازي محور الفواصل $x'ox$ لذلك لا يوجد نقاط تقاطع للماس مع محور الفواصل لذلك فشلت طريقة نيوتن.

مثال 10.2:

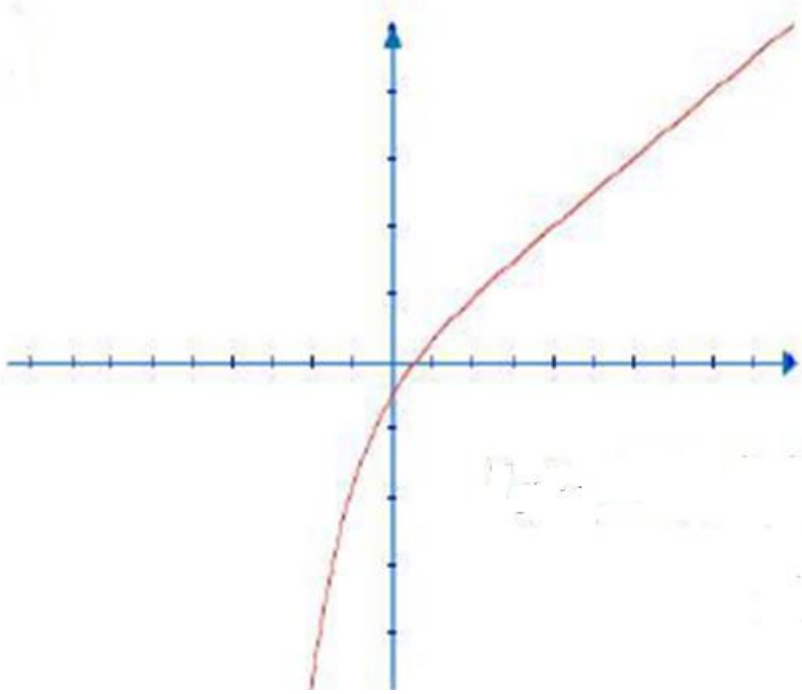
باستخدام طريقة نيوتن رافسون أوجد حل المعادلة $x = e^{-x}$.

الحل:

نجد المجال الذي ينتمي إليه الجذر الحقيقي بإحدى الطرق التالية:

1- الطريقة الأولى:البيان

نلاحظ أن: $f(x) = x - e^{-x} = 0$

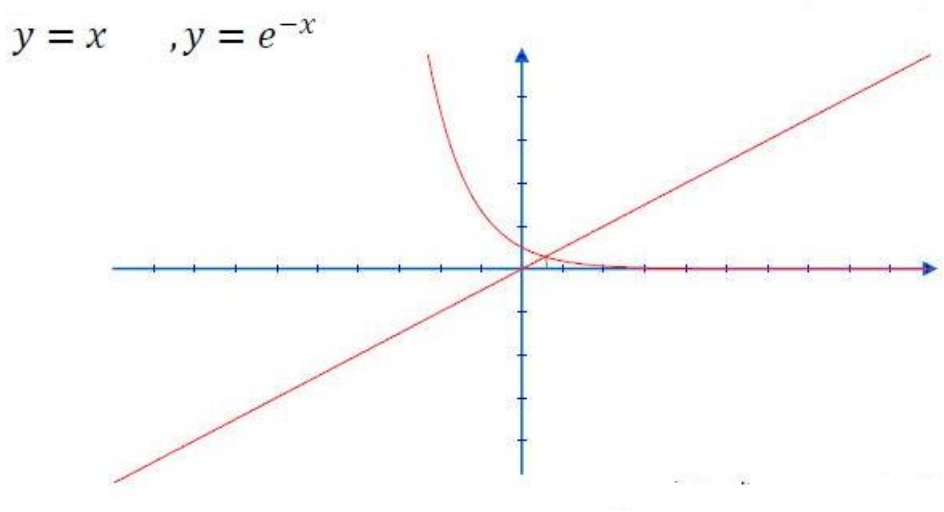


نلاحظ أن نقطة تقاطع المنحنى الدالة مع محور X هي $\alpha \in [0,1]$

2- الطريقة الثانية: طريقة عزل الجذر باستخدام تقاطع البيانات

يمكن تقسيم الدالة إلى: $g(x) = x,\ h(x) = e^{-x}$

نلاحظ أن نقطة تقاطع الدالتين $h(x) = e^{-x}$ مع المنصف الأول $g(x) = x$ والبيان يوضح ذلك.



الجذر نقطة تقاطُع الدالتين بالنسبة للمحور X أي: $\alpha \in [0,1]$

$$f(0) = -1 \ , f(1) = 0.632 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

$$f'(x) = 1 + e^{-x} \quad , \quad f''(x) = e^{-x}$$

- نختار النقطة x_0 إمّا تكون 0 أو 1 نطبّق الشرط $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ العدد الذي يحقق الشرط يكون: x_0

$$x_0 = 0$$

$$f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'(0) \cdot f''(0) = 2.1 = 2 > 0$$

نطبق طريقة نيوتن لإيجاد متتالية الحلول التقريبية :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = 0.5 \in [0,1]$$

$$f(x_1) = f(0.5) = 0.5 - e^{-0.5} = -0.106; \ f'(0.5) = 1 - e^{-0.5} = 0.39346$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{-0.106}{0.39346} = \ 0.769404 \in [0.5,1]$$

4-3-2 طريقة النقطة الثابتة

تعد هذه الطريقة من الطرق الجيدة لإيجاد جذور المعادلات غير الخطية وذات متغير واحد.

لتكن $f(x) = 0$ دالة مستمرة في المجال المغلق $[a, b]$ تحتوي على جذر حقيقي.

تعتمد طريقة النقطة الثابتة على الخطوات التالية:

- إعادة ترتيب المعادلة $f(x) = 0$ وذلك بإبقاء متغير واحد x عند يسار المساواة وتحويل كافة المتغيرات عند يمين المساواة أي بمعنى $x = g(x)$ حيث أنّ $g(x)$ تعتبر كدالة جديدة لـ x وتختلف عن $f(x)$
- نأخذ مشتقة $g(x)$ أي $g'(x)$
- نقوم بالتعويض بقيمة الجذر الأولي والتي يمكن الحصول عليها من خلال تقسيم المجال $[a, b]$ أي إيجاد $g(x_0)$
- اختبار مدى دقة الصيغة المقترحة في الوصول للحل وذلك بتطبيق الصيغة:

$$|g'(x)| < 1$$

- فإذا كانت الصيغة أعلاها صحيحة فان الصيغة $g(x)$ توصلنا الى الحل الصحيح(الجذر المطلوب) ونكمل الحل باستخدام الصيغة التكرارية لـ $g(x)$ والتي هي: $x_{i+1} = g(x_i), i = 0,1,2, \dots$
- أما إذا كانت قيمة $|g'(x)| \geq 1$ فان الصيغة $|g(x)|$ لا توصلنا الى الحل الصحيح عندئذ نقوم بايجاد صيغة اخرى.
- شرط التوقف :نتوقف عن تكرار عملية إيجاد الحل باستخدام الشرط:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

مثال 11.2:

$$f(x) = x\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = arc\tan\dfrac{1}{x} \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{1}{\tan x} \end{cases}$$

ثم نبدأ بالقيمة الابتدائية x_0 ، فنكون بدلك متتالية القيم التقريبية:

$$x_{n+1} = g(x_n); x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$$

السؤال المطروح هنا، هل هي متقاربة؟

من أجل هذا لابد من شروط تقارب هذه الطريقة معتمدين على النظرية التالية:

نظرية 6.2:

إدا كانت الدالة $g(x)$ مستمرة على المجال $[a, b]$; $g(x) \in C[a, b]$ وقابلة للتفاضل على نفس المجال وكل قيم $g(x)$ تنتمي إلى المجال $[a, b]$، $\left[g(x) \in [a, b];\ \forall x \in [a, b]\right]$. إذا$g(x)$ تملك نقطة ثابتة في هذا المجال.

أما إذا كان يوجد K ويحقق: $|g'(x)| \leq K < 1$في المجال $[a, b]$، فإن $g(x)$ تملك نقطة ثابتة وحيدة في هذا المجال.

كما أن $g(x)$ تحقق:

1. المتتالية $x_{n+1} = g(x_n)$ متقاربة مهما كانت القيمة الابتدائية $x_0 \in [a,b]$.
2. نهاية المتتالية $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ هي الجذر الوحيد للمعادلة $x = g(x)$ أو $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$.

البرهان:

1- وجود الجذر α في المجال $[a,b]$

نعلم أن: $g: [a,b] \to [a,b]$

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow a \leq g(x) \leq b$$

نسمي: $h(x) = g(x) - x \Rightarrow \begin{cases} h(a) = g(a) - a \geq 0 \\ h(b) = g(b) - b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow h(a)h(b) \leq 0$

$$\Rightarrow \exists \alpha; h(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow g(\alpha) = \alpha \qquad (2.20)$$

إذا α جذر في المجال $[a,b]$.

2- وحدانية الجذر في المجال $[a,b]$

نفرض وجود جذرين هما α و β كمايلي:

$$\begin{cases} g(\alpha) = \alpha \\ g(\beta) = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta) = g'(c) = (\alpha - \beta)$$

حسب نظرية التزايدات المنتهية:

$$\Rightarrow (\alpha - \beta)\big(1 - g'(c)\big) = 0; 1 - g'(c) \neq 0$$

$$g'(c) \neq 1;\ |g'(x)| < 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \qquad (2.21)$$

ومنه جذر وحيد.

3- $\lim_{n\to+\infty} |\alpha - x_n| = 0$

$$\alpha = g(\alpha);\ x_n = g(x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \alpha - x_n = g(\alpha) - g(x_{n-1}) = g'(c)(\alpha - x_{n-1}) \qquad (2.22)$$

نعلم أن:

$$|g'(x)| \leq K \qquad (2.23)$$

نعوض (2.23) في (2.22) نجد:

$$|\alpha - x_n| \leq K|\alpha - x_{n-1}|$$

$$|\alpha - x_{n-1}| \leq K|\alpha - x_{n-2}|$$

$$|\alpha - x_{n-2}| \leq K|\alpha - x_{n-3}|$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$|\alpha - x_1| \leq K|\alpha - x_0| \Rightarrow |\alpha - x_n| \leq K^n|\alpha - x_0| \qquad (2.24)$$

لأن: $K < 1$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} K^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} |\alpha - x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \qquad (2.25)$$

حساب الخطأ:

- الطريقة الأولى:

$$E_n = |\alpha - x_n| \leq K^n|\alpha - x_0|$$
$$\Rightarrow |\alpha - x_0| \leq b - a \Rightarrow E_n = |\alpha - x_n| \leq K^n(b-a); K = \max_{[a,b]}|g'(x)| \quad (2.26)$$

- الطريقة الثانية:

$$E_n \leq \frac{|f(x_n)|}{m}; m = \inf_{[a,b]}|f'(x)| \qquad (2.27)$$

- الطريقة الثالثة:

$$\underbrace{|\alpha - x_n|}_{E_n} = |g'(c)|\underbrace{|\alpha - x_{n-1}|}_{E_{n-1}};\ |g'(c)| \leq K < 1$$

نلاحظ أن الخطأ يتناقص أي:

$$E_n < E_{n-1} \Rightarrow |\alpha - x_n| < |\alpha - x_{n-1}| \Rightarrow E_n \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2} \qquad (2.28)$$

✓ **ملاحظة:**

1- نلاحظ أن: $E_n \leq KE_{n-1}$

2- كلما كانت K صغيرة كلما زادت سرعة التقارب.

مثال 12.2:

باستخدام طريقة النقطة الثابتة جد جذر للمعادلة $f(x) = x^2 - x - 3 = 0$ على المجال $[2,3]$

الحل:

1- نتحقق من شرط وجود الجذر في المجال $[2,3]$:

$$f(2)f(3) = (-1)(3) = -3$$

2- نختار أكثر من دالة (أربعة اختيارات مختلفة للدالة $x_i = g_i(x)$)

$$x = 1 + \frac{3}{x} = g_1(x)$$
$$x = x^2 - 3 = g_2(x)$$
$$x = \frac{1}{8}(9x - x^2 + 3) = g_3(x)$$
$$x = \frac{x^2 + 3}{2x - 1} = g_4(x)$$

❖ **دراسة تقارب طريقة الدالة $g_1(x)$**

1. الدالة $g_1(x)$ مستمرة على المجال $[2,3]$

$$x = 1 + \frac{3}{x} = g_1(x) \Rightarrow \begin{cases} g_1(2) = 2,5 \in [2,3] \\ g_1(3) = 2 \in [2,3] \end{cases}$$

ومنه الدالة تقبل نقطة ثابتة في المجال $[2,3]$.

2. الدالة: $\Rightarrow g'_1(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow |g'_1(x)| \leq \max_{[2,3]} \left|\frac{-3}{x^2}\right| = 0,75 < 1 \Rightarrow K = 0,75$

ومنه الدالة $g_1(x)$ تقبل نقطة ثابتة وحيدة في المجال $[2,3]$.

وبنفس الطريقة ندرس تقارب طريقة النقطة الثابتة للدوال $g_3(x), g_4(x)$.

❖ **دراسة تقارب طريقة الدالة $g_2(x)$**

الدالة $g_2(x)$ مستمرة على المجال $[2,3]$

$$x = x^2 - 3 = g_2(x) \Rightarrow \begin{cases} g_2(2) = 1 \in [2,3] \\ g_2(3) = 6 \notin [2,3] \end{cases}$$

ومنه، وباختلال الشرط السابق، فإن $g_2(x)$ لا تملك نقطة ثابتة في المجال $[2,3]$.

ومنه الطريقة تتباعد في هذا الاختيار، والجدول التالي يبين تقارب وتباعد الاختيارات الأربعة.

أي الدالة لا تقبل نقطة ثابتة في المجال $[2,3]$.

❖ **حساب متتالية الحلول التقريبية للدالة $x_{n+1} = g_i(x_n)$; $\overline{i = 1,4}$**

نختار النقطة $x_0 = 2,5 \in [2,3]$.

n	$x_{n+1} = g_1(x_n)$	$x_{n+1} = g_2(x_n)$	$x_{n+1} = g_3(x_n)$	$x_{n+1} = g_4(x_n)$
0	2,5	2,5	2,5	2,5
1	2,2	3,25	2,40625	2,3125
2	2,36363	7,5625	2,358276	2,3028017
3	2,269230	54,191406	2,305477	2,3027756
4	2,322034	2933,7085	2,3042586	2,3028070
5	2,30892	8606642,63	2,303589	2,3027676

إن الصيغة g_1, g_3, g_4 تعطي قيم متقاربة بينما اعطت الصيغة g_2 قيم متباعدة عن الجذر.

مثال 13.2:

باستخدام طريقة النقطة الثابتة جد جذر المعادلة $f(x) = 4x^2 - 2x - 1 = 0$ في المجال $[0,1]$

الحل:

1- نتحقق من شرط وجود الجذر في المجال $[0,1]$:

$$f(0)f(1) = (-1)(1) = -1 < 0$$

2- نختار أكثر من دالة (ثلاثة اختيارات مختلفة للدالة $x_i = g_i(x)$)

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+2x} = g_1(x)$$

$$x = 2x^2 - \frac{1}{2} = g_2(x)$$

$$x = \frac{1}{4x-2} = g_3(x)$$

❖ **دراسة تقارب طريقة الدالة $g_1(x)$**

1. الدالة $g_1(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2x} = g_1(x) \Rightarrow \begin{cases} g_1(0) = 0{,}5 \in [0,1] \\ g_1(1) = 0.86602 \in [0,1] \end{cases}$$

ومنه الدالة تقبل نقطة ثابتة في المجال $[0,1]$

2. الدالة: $g'_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} \Rightarrow |g'_1(x)| \leq \max_{[0,1]} \left|\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}\right| = 0{,}5 < 1; K = 0{,}75$

ومنه الدالة $g_1(x)$ تقبل نقطة ثابتة وحيدة في المجال $[0,1]$، إذا الطريقة تتقارب.

أما عن الاختيار الثاني للدالة $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+2x} = g_1(x)$ ، فإن قيم الدالة سالبة وهي لا تنتمي للمجال الموجب $[0,1]$ ، إذا هذا الاختيار غير صائب، إذا الطريقة تتباعد.

❖ **دراسة تقارب طريقة الدالة $g_2(x)$**

الدالة $g_2(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$

$$x = 2x^2 - \frac{1}{2} = g_2(x) \Rightarrow \begin{cases} g_2(0) = -0{,}5 \notin [0,1] \\ g_2(1) = \frac{3}{2} \notin [0,1] \end{cases}$$

ومنه الدالة لا تقبل نقطة ثابتة في المجال $[0,1]$، إذا الطريقة تتباعد.

❖ **دراسة تقارب طريقة الدالة $g_3(x)$**

الدالة $g_3(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$

$$x = \frac{1}{4x-2} = g_2(x) \Rightarrow \begin{cases} g_3(0) = -0{,}5 \notin [0,1] \\ g_3(1) = 0{,}5 \in [0,1] \end{cases}$$

ومنه الدالة لا تقبل نقطة ثابتة في المجال $[0,1]$، إذا الطريقة تتباعد.

❖ **حساب متتالية الحلول التقريبية للدالة $g_1(x)$**

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2x} = g_1(x);\ x_0 = 0{,}5$$

$$x_1 = g_1(x_0) = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2(0{,}5)} = 0.707106 \in [0,1]$$

$$x_2 = g_1(x_1) = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2(0.707106)} = 0.776886 \in [0,1]$$

$$x_3 = g_1(x_2) = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2(0.776886)} = 0.7990265 \in [0,1]$$

$$x_4 = g_1(x_3) = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2(0.7990265)} = 0.8059238 \in [0,1]$$

$$x_5 = g_1(x_4) = +\frac{1}{2}\sqrt{1+2(0.8059238)} = 0.8080606 \in [0,1]$$

نحسب الخطأ كمايلي:

$$E_5 \leq \frac{|x_5 - x_4|}{2} = \frac{|0.8080606 - 0.8059238|}{2} = 1{,}06.10^{-3}$$

2-3-5 طريقة القسمة التركيبية

نفرض أنّ x^* تخمين لجذر المعادلة الآتية $f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ هي متعددة حدود من الدرجة n عندئذ يمكن كتابتها كما يلي:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \qquad (2.29)$$

ومعاملاتها حقيقية وبقسمة المعادلة على $(x - x^*)$ نحصل على

$$f(x) = (x - x^*)(b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}) + b_m \qquad (2.30)$$

بالمقارنة بين المعادلتين (2.29) و(2.30) نحصل على:

$$b_0 = a_0$$

$$b_k = a_k - x^*b_{k-1}, k = 1,2,\ldots,m$$

وأن قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة x^* تساوي b_m أي أنّ: $f(x^*) = b_m$

نفرض أنّ:

$$g(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x^*)g(x) + b_m$$

$$f'(x) = (x - x^*)g'(x) + g(x) \Rightarrow f'(x^*) = g(x^*)$$

$$f'(x^*) = g(x^*)$$

بنفس الاسلوب نحصل على:

$$b_0 = c_0$$

$$c_k = b_k + x^*c_{k-1}, k = 1,2, \dots, m-1$$

وان قيمة الدالة $g(x)$ عند النقطة x^* تساوي c_{m-1} أي أنّ: $(g(x^*) = c_{m-1})$

أي أنّ:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}} \qquad (2.31)$$

وهي صيغة نيوتن-رافسون لمتعدد الحدود.

يمكن تلخيص الطريقة بالخوارزمية الآتية:

1- نفرض أنّ x_0 هي نقطة البداية

2- نحسب $c_0 = b_0 = a_0$ ومن ثمّ نحسب $b_k = a_k + x^*b_{k-1}, k = 1,2, \dots, m$

وأيضا $c_k = b_k + x^*c_{k-1}, k = 1,2, \dots, m-1$

3- نحسب $x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}}$

4- نكرر الخطوات 2 و3 حتى نحصل على القيمة التقريبية لجذر المعادلة

a_i	a_0	a_1	a_2	...	a_{m-1}	a_m
x_0b_{i-1}		x_0b_0	x_0b_1	...	x_0b_{i-m-2}	x_0b_{m-1}
b_i	b_0	b_1	b_2		b_{m-1}	b_m
x_0c_{i-1}		x_0c_0	x_0c_1	...	x_0c_{m-1}	
	c_0	c_1	c_2	...	c_{m-1}	

مثال 14.2:

باستخدام طريقة القسمة التركيبية جد جذر المعادلة: $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5 = 0$ علماً أنّ:

$$x_0 = -1$$

الحل:

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1$		-1	2	4
b_i	1	-2	4	1
$x_0 = -1$		-1	3	
	1	-3	7	

$$x_1 = x_0 - \frac{b_m}{c_{m-1}} = -1 - \frac{1}{7} = -1.14286$$

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1.14286$		-1.14286	2.44899	-5.08457
b_i	1	-2.14286	4.44899	-0.08457
$x_0 = -1.14286$		-1.14285	3.75511	-0.0103
	1	-3.28571	8.2041	

4-2 تمارين

1-4-2 تمارين محلولة

<u>التمرين الأول:</u>

جد جذر المعادلة التالية ودلك بطريقة القواطع للاغرانج $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2$ الواقع في المجال $[1,1{,}5]$.

<u>الحل:</u>

لدينا:

$$f(1) = -0{,}6 < 0; f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$$

ومنه الجذر يوجد في المجال $[1,1{,}5]$.

دراسة شروط التقارب:

$$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$$
$$f''(x) = 6x - 0{,}4 \Rightarrow f''(1) = 5{,}6 > 0;\ f''(1{,}5) = 8{,}5 > 0$$

إذن المشتق الثاني دوما موجب ولذلك إذا طبقنا الآن علاقة لاغرانج عند طرفي المجال فنجد:

في الطرف الأول $x = 1$:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.f(x_1) = 1 - \frac{1{,}5 - 1}{1{,}425 — 0{,}6}.(-0{,}6) = 1{,}148148 \approx 1{,}5$$

عند الطرف الثاني $x = 1{,}5$:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.f(x_1) = 1{,}5 - \frac{1{,}5 - 1}{1{,}425 — 0{,}6}.(1{,}425) = 1{,}14814 \approx 1{,}5$$

وهي نفس القيمة، أما للمتابعة وإيجاد التقريبات التالية للجذر فيجب التحقق من شروط "فوريه" السابقة لمعرفة النقطة التي يجب تطبيق علاقة لاغرانج عندها.

$$f(1) = -0{,}6 < 0; f(1{,}5) = 1{,}425 \Rightarrow f(1)f(1{,}5) = (-0{,}6)(1{,}425) < 0$$

$$f(1{,}5)f''(1{,}5) = (1{,}425)(8{,}5) > 0$$

التمرين الثاني:

جد جذر المعادلة التالية ودلك بطريقة القواطع للاغرانج $f(x) = x^3 + 3x - 1$

الواقع في المجال $[0{,}1]$.

الحل:

لدينا:

$$f(0) = -1 < 0; f(1) = 3 > 0 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

ومنه الجذر يوجد في المجال $[0{,}1]$.

دراسة شروط التقارب لفوريه:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 > 0;\ f''(0) = 0$$
$$f(1)f''(1) = (3)(6) > 0$$

إذن المشتق الثاني دوما موجب أو معدوم ولذلك إذا طبقنا الآن علاقة لاغرانج عند طرفي المجال فنجد:
في الطرف الثاني $x = 1$:

$$x_1 = 1 - \frac{1 - 0}{3 — (-1)}.(3) = 0{,}25$$

نتأكد من أن الجذر موجود في المجال $[0{,}25; 1]$:

$$x_2 = 1 - \frac{1 - 0{,}25}{3 + 0{,}23}.(3) = 0{,}31$$

وهكذا نجد أيضا أن:

$$x_2 = 1 - \frac{1 - 0{,}31}{3 + 0{,}040}.(3) = 0{,}319$$
$$x_2 = 1 - \frac{1 - 0{,}319}{3 + 0{,}010}.(3) = 0{,}322$$
$$x_2 = 1 - \frac{1 - 0{,}322}{3 + 0{,}0006}.(3) = 0{,}322$$

التمرين الثالث:

لتكن:

$$f(x) = 5\ln x - x = 0$$

أحسب القيمة التقريبية للجذر الأصغر بطريقة نيوتن مع شرط التوقف:

$$f(x_n) < 10^{-5}$$

الحل:

$f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق:

$$[a,b] = [1,2];\ f(1)f(2) < 0; 1 < \alpha < 2$$

$$f'(x) = \frac{5}{x} - 1 \neq 0;\ f''(x) = \frac{-5}{x^2} < 0$$

$$f(1)f''(1) = (-1)(-5) > 0$$

ومنه التقارب أكيد ومنه $x_0 = 1$

$$f(x_0) = f(1) = -1;\ f'(1) = 4$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25 \Rightarrow \begin{cases} f(1{,}25) = -0{,}13428 \\ f'(1{,}25) = 3 \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}25 + \frac{0{,}13428}{3} = 1{,}2947 \Rightarrow \begin{cases} f(1{,}25) = -3{,}1311.10^{-3} \\ f'(1{,}25) = 2{,}8617165 \end{cases}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}294 + \frac{0{,}13428}{2{,}86171} = 1{,}29585 \Rightarrow \begin{cases} f(1{,}2958) = -1{,}87.10^{-6} \\ f'(1{,}29585) = 2{,}858456 \end{cases}$$

ومنه نلاحظ أن تحقق شرط الخطأ وهو:

$$E_3 \leq |f(x_3)| = |f(1{,}2958)| = -1{,}87.10^{-6} < 10^{-5}$$

التمرين الرابع:

لتكن:

$$f(x) = x^3 + 12x - 5 = 0$$

1- اعزل جذور المعادلة.

2- أحسب القيمة التقريبية للجذر بطريقة النقطة الثابتة مع تحقق شرط التوقف: $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$

الحل:

1- اعزل جذور المعادلة.

$$f'(x) = 3x^2 + 12 > 0$$

ومنه يوجد جذر وحيد لأن: $\exists! c \in]-\infty, +\infty[; f(c) = 0$

كما نلاحظ أن:

$$f(0) = -5, f(1) = 8 > 0 \Rightarrow f(0)f(1) < 0; \exists! \alpha \in [0,1]$$

2- تطبيق طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة $f(x) = 0$

$$f(x) = x^3 + 12x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 - x^3}{12} = g_1(x)$$

3- دراسة التقارب:

*- $g_1(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$

$$* - \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} g_1(0) = \frac{5}{12} \in [0,1] \\ g_1(1) = \frac{1}{3} \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow g_1(x) \in [0,1], \forall x \in [0,1]$$

ومنه $g_1(x)$ يقبل نقطة ثابتة في المجال $[0,1]$.

$$* - \ g_1'(x) = \frac{-3x^2}{12} = \frac{-x^2}{4} < 0 \Rightarrow \max_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{-x^2}{4}\right| = \frac{1}{4} = K < 1$$

إذن الطريقة متقاربة $g_1(x)$ يقبل نقطة ثابتة وحيدة في المجال $[0,1]$ وهو تقارب متناوب.

4- حساب متتالية الحلول التقريبية:

$$x_{n+1} = g_1(x_n)\ ;\ x_0 = 0$$

$$x_1 = g_1(x_0) = \frac{5 - x_0^3}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{5 - x^3}{12} = \frac{5}{12} = 0{,}41666$$

$$x_2 = g_1(x_1) = \frac{5-x_1^3}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{5-(0{,}41666)^3}{12} = \frac{5}{12} = 0{,}410638$$

$$x_3 = g_1(x_2) = \frac{5 - x_2^3}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{5 - (0{,}41063)^3}{12} = \frac{5}{12} = 0{,}410896$$

5- حساب الخطأ:

$$E_3 = |x_3 - x_2| = 2{,}58.10^{-4} < 10^{-3}$$

2-4-2 تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x^3 + 2x - 7$$

1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$
2) حل المعادلة $f(x) = 0$بطريقة نيوتن والتقسيم الثنائي مع تحقيق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}$

التمرين الثاني:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x^4 - 2x - 4$$

1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$
2) حل المعادلة $f(x) = 0$بطريقتي نيوتن والتقسيم الثنائي مع تحقيق الشرط$|f(x_n)| < 10^{-2}$

التمرين الثالث:

اعزل جذور المعادلة $f(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2 = 0$ ثم ارسم المنحنى البياني لها.

التمرين الرابع:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x^x - 10^2$$

1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$
2) حل المعادلة بطريقة نيوتن حتى يتحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}$

التمرين الخامس:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$
2) حل المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة النقطة الثابتة من أجل
3) $k = 4$

التمرين السادس:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1) حل بطريقة النقطة الثابتة المعادلة $f(x) = 0$ لما مع إعطاء جميع الحالات الممكنة للدالة $g(x) = x$
2) ادرس تقارب الطريقة من اجل الحالات المعطاة

التمرين السابع:

1) اعزل جذور المعادلة $xe^x = 1$
2) حل المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة النقطة الثابتة مع إعطاء أكثر من حالة ودراسة تقارب وتباعد الحالات الممكنة
3) حل المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة نيوتن
4) أي الطريقتين أفضل للتقارب (الحصول على اقل خطا ممكن)؟

التمرين الثامن:

لتكن الدالة:

$$f(x) = x - \sin x - 0.25$$

1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = 0$
2) طبق طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة $f(x) = 0$ حتى يتحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}$

الفصل الثالث

الاستقطاب و التقريبات

تمهيد

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ وقد أعطيت قيم هذا التابع في النقاط $x_i; i = 0,1,2, \dots, n$ (ستسمى هذه النقاط بالعقد أو عقد الاستيفاء أو بنقاط الاستقطاب) والمسألة المطروحة هنا هي معرفة قيم هذا التابع في نقاط داخلية واقعة بين نقاط الاستقطاب السابقة.ً

في هذا الفصل سيتم استيفاء تابع يمر من النقاط السابقة بخطأ معدوم وبالتالي يمكن من خلال هذا التابع المار بهذه النقاط حساب قيم هذا التابع في نقاط تقع بين هذه العقد. هناك عدد كبير من الطرق التي عالجت هذه المسألة من أجل نقاط استيفاء متساوية المسافة فيما بينها، وكذلك نقاط استيفاء غير متساوية المسافة وسوف نتطرق في هذا الفصل إلى عدة طرق نذكر منه طريقة لاغرانج وطريقة نيوتن للفروق المقسمة و بأنواعها. وأيضا سوف نعالج مسألة كيف يمكننا تمثيل نقاط التجربة على شكل تابع يكون أقرب ما يمكن من التابع الحقيقي. أي كيف نستطيع تمرير منحنى يمر أقرب ما يمكن من تلك النقاط التجريبية بأقل خطأ ممكن وهو الخطأ الذي نريده. إن حل هذه المسألة يمكن فيما إذا جعلنا النظيم – النظيم الإقليدي L_2 عندئذ نحصل طريقة تقريبية تسمى " طريقة الوربعات الصغرى".

1-3 شرح تقريب التوابع باستخدام الاستقطاب(الاستيفاء الداخلي)

إذا كان $f(x)$ تابع يعطى على النقاط التالية $x_0, \dots\dots, x_n$ (تسمى نقاط الاستقطاب) حيث:

$$f(x_i) = y_i \ \ (i = 0, n)$$

من أجل البحث على التابع $g(x)$ حيث$g(x) = p_n(x)$ حيث $p_n(x)$ يسمى تابع الاستقطاب والذي يحقق $g(x_i) = p_n(x_i) = y_i$, $(i = 0, n)$ تسمى بمسالة الاستقطاب.

مثال1.3:

$$f(x) = ax + b \ \ ; \ \ (1,2) \ \ ,(3,10)$$
$$Si: x = 1 = \alpha \Rightarrow \alpha + \delta = 2$$
$$Si: x = 3 = \alpha \Rightarrow 3\alpha + \delta = 10$$

2-3 نظرية التقارب لـ Weiestrass

إذا كان $f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال$[a, b]$ و إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة من اجل ذلك يوجد كثير حدود $P(x)$ معرف هو أيضا على المجال $[a, b]$ حيث$[a, b]$ $\forall x \in [a, b]$ و تحقق $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$

توطئة:
من اجل $(n + 1)$ نقطة استقطاب يوجد بكثير حدود وحيد الاستقطاب

البرهان:
نفرض وجود كثيري حدود اثنين هما $\varphi(x), p(x)$ للاستقطاب.
نفرض أن:

$$L_n(x) = \ \varphi(x) - p(x) \to d_n^0 L(x) = n$$

من أجل ذلك لدينا:

$$\begin{array}{l} L_n(x_0) = \varphi(x_0) - p(x_0) \to y_0 - y_0 = 0 \\ L_n(x_1) = \varphi(x_1) - p(x_1) \to y_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

$$L_n(x_n) = \varphi(x_n) - p(x_n) \Rightarrow y_n - y_n = 0 \Rightarrow L_n(x) = 0$$

$$\varphi(x) - p(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = p(x)$$

3-3 استقطاب لاغرانج

إذا كانت لدينا نقاط عشوائية نستعمل إستقطاب لاغرانج من أجل دلك:

1. تعطى$f(x)$ من أجل: $(i = 0, n), f(x_i) = y_i \; ; x_0, \dots \dots, x_n$

2. نعرف كثيرات الحدود $l_k(x)$ ذو الدرجة n والذي يعطى بـ:

$$\delta_{ki} = l_k(x_i) = \begin{cases} 0; si\ k \neq i \\ 1; si\ k \neq i \end{cases}$$

حيث δ_{ki} يسمى symbole de kronecker

حيث أن $l_{k(x)}$ ينعدم في n نقطة أي له n جذر: $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$

ويمكن كتابته من الشكل:

$$l_k(x) = \lambda_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) \qquad (3.1)$$

حيث λ_k ثابت:

$$Si: x = x_k \Rightarrow l_k(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \qquad (3.2)$$

نعوض λ_k في (3.1) نجد:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \qquad (3.3)$$

$$\Rightarrow l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \qquad (3.4)$$

3. نستخرج كثير الحدود $l_n(x_i) = y_i$ والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i \Rightarrow d^0 L_n(x) \leq n$$

أي أن:

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \qquad (3.5)$$

حيث:

$$l_i(x) = \prod_{k=0;k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

نظرية 1.3:

إذا وجدت $x_0, \dots \dots, x_n$ أي $(n+1)$ نقطة عشوائية وإذا كانت $f(x)$ تابع يعطى بالعلاقة $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, n)$ فانه يوجد كثير حدود وحيد $p_n(x)$ و درجته أقل من أو يساوي n و الذي يحقق

$$f(x_i) = p_n(x_i) = y_i = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

مثال2.3:

من أجل $x_0 = 2;\ x_1 = 2.5; x_2 = 4$ اوجد كثير الحدود الاستقطابي من الدرجة 2 للاغرانج من أجل $f(x) = \frac{1}{x}$

ثم قرب القيمة $f(3)$ وأحسب قيمة الخطأ R_2

الحل:

1- حساب كثير الحدود الاستقطابي من الدرجة الثانية

$$l_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$l_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5 + 5)$$

$$f(x_0) = f(2) = 0.5\ ; f(x_1) = f(2.5) = 0.4\ ; f(x_2) = f(4) = 0.25$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = 0.5(x^2 - 6.5x + 10) + 0.4(\frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32))$$

$$+ 0.25(\frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5)) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

$$P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

2- تقريب القيمة $p_2(3)$ وحساب قيمة الخطأ

$$\begin{cases} p_2(3) = 0.05(3)^2 - 0.425(3) + 1.150.325 = 0.325 \\ f(3) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه قيمة الخطأ هي:

$$R_2 = \left|\frac{1}{3} - 0.325\right| = 8.10^{-3}$$

1-3-3 حساب معاملات لاغرانج

نفرض أن:

$$\prod(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) \qquad (3.6)$$

نشتق هذا الجداء لنجد:

$$\prod{}'(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=0, i\neq j}^{n}(x - x_j)\right)$$

نعوض x بـx_i نجد:

$$\prod{}'(x_i) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n}(x_i - x_j)$$

$$\Rightarrow \prod{}'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) \quad (3.7)$$

ولدينا من قبل:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

وبالتعويض كل من $\prod(x)$ و$\prod'(x_i)$ في $p_n(x)$ نجد:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod(x)}{\prod'(x_i)(x - x_i)}$$

$$\Rightarrow p_n(x) = L_n(x) = \prod(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\prod'(x_i)(x - x_i)} \qquad (3.8)$$

وهي علاقة ثانية لحسب كثير حدود استقطاب لاغرانج.

مثال3.3:

1- أحسب $p_3(x)$ للتوزيع التالي باستخدام معاملات لاغرانج.

2- قرب القيمة $p_3(1)$

x_i	-1	0	2	3
y_i	1	5	6	4

الحل:

1-1 حساب معاملات لاغرانج

$$\prod(x) = (x+1)(x-0)(x-2)(x-3) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

$$\prod'(x_0) = \prod'(-1) = (-1-0)(-1-2)(-1-3) = -12$$

$$\prod'(x_1) = \prod'(0) = (0+1)(0-2)(0-3) = 6$$

$$\prod'(x_2) = \prod'(2) = (2+1)(2-0)(2-3) = -6$$

$$\prod'(x_3) = \prod'(3) = (3+1)(3-0)(3-2) = 12$$

2-1 حساب كثير حدود لاغرانج

$$p_3(x) = L_3(x) = \prod(x) \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{\prod'(x_i)(x - x_i)}$$

$$= (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\left[\frac{1}{-12(x+1)} + \frac{5}{6(x-0)} + \frac{6}{-6(x-2)} + \frac{4}{12(x-3)}\right]$$

$$p_3(x) = L_3(x) = \frac{1}{13}x^3 - \frac{15}{12}x^2 + \frac{51}{6}x$$

2- تقريب القيمة $p_3(1)$

$$p_3(x) = L_3(x) = \frac{1}{13}(1)^3 - \frac{15}{12}(1)^2 + \frac{51}{10}(1) = 5.1915$$

2-3-3 الخطأ في علاقة لاغرانج

نظرية 2.3:

إذا كانت $x_0, \ldots\ldots, x_n \in [a,b]$ نقاط عشوائية وليكن $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، إذا من اجل كل $x \in [a,b]$ يوجد $\delta_x \in [a,b]$ ويحقق:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{n+1}(\delta_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

حيث $p_n(x)$ كثير حدود استقطاب لاغرانج.

❖ **البرهان**

نبحث عن $R_n(x)$ (الخطأ في علاقة لاغرانج).

نفرض أن:

$$R_n(x) = f(x) = p_n(x) = E_n(x) \qquad (3.9)$$

نضع:

$$g(x) = f(x) - L_n(x) - k\prod(x) \qquad (3.10)$$

حيث: $\prod(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

نفرض أنه :

$$\forall t \in [a,b]; t \neq x_i (i = 0,n); g(t) = 0$$

$$\Rightarrow g(t) = f(t) - L_n(t) - k\prod(t) \qquad (3.11)$$

$$\Rightarrow k = \frac{f(t) - L_n(t)}{\prod(t)} \qquad (3.12)$$

بمعنى أننا يمكننا اختيار k من اجل $g(x)$ ينعدم في $(n+1)$ نقطة تنتمي الى المجل $[a,b]$ و$g'(x)$ ينعدم في n جذر و $g''(x)$ في $(n-1)$ جذر و هكذا وبالتالي نجد $g^{(n+1)}(\delta)$ ينعدم وبالتالي:

$$\exists \delta \in [a,b];\ g^{(n+1)}(\delta) = 0$$

ومن جهة أخرى:

$$d^0 L_n(x) = n \Rightarrow L_n^{(n+1)}(x) = 0\ ;\ \prod^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

$$\Rightarrow g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - L_n^{(n+1)}(x) - k(n+1)! \qquad (3.13)$$

نفرض أن: $x = \delta$

$$\Rightarrow g^{(n+1)}(\delta) = f^{(n+1)}(\delta) - L_n^{(n+1)}(\delta) - k(n+1)! = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!} \qquad (3.14)$$

نقارن بين (3.12) و (3.14) نجد:

$$\frac{f(t) - L_n(t)}{\prod(t)} = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow f(t) - L_n(t) = \frac{\prod(t)}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\delta)\right]$$

ومنه نجد:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{\prod(x)}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\delta)\right] \qquad (3.15)$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| = \left|\frac{\prod(x)}{(n+1)!}\right| \left|f^{(n+1)}(\delta)\right|$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|\prod(x)|}{(n+1)!} \max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(n+1)}(\delta)\right| \qquad (3.16)$$

وهو الخطأ في علاقة لاغرانج لحساب كثير الحدود الاستقطابي .

مثال 4.3:

أوجد الخطأ في حساب الدالة $sin\ 12^0$ بالنسبة لنقاط الاستقطاب التالية:

$$x_0 = 0^0,\ x_1 = 5^0,\ x_2 = 10^0,\ x_3 = 15^0 :\ \ x_4 = 20^0,\ x_5 = 25^0$$

الحل:

نحول الدرجات للراديان:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{36},\ x_2 = \frac{\pi}{18},\ x_3 = \frac{\pi}{12} :\ \ x_4 = \frac{\pi}{9},\ x_5 = \frac{5\pi}{15}\ , x = 12^0 = \frac{\pi}{15}$$

لدينا: $f(x) = sin\,x; f'(x) = \ cos\,x;\ f''(x) = sin\,x; f^{(3)}(x) = \ -cos\,x$

$$f^{(4)}(x) = \ sin\,x;\ f^{(5)}(x) = \cos x; f^{(6)}(x) = \ -sin\,x$$

$$R_5\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{1}{6!}\left|\left(\frac{\pi}{15} - 0\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{36}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{18}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{5\pi}{36}\right)\right|$$

$$.\ |-sin\,\delta|;\ \delta \in \left[\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{12}\right]$$

ومنه:

$$R_5\left(\frac{\pi}{15}\right) \leq \frac{1}{6!}\left|\left(\frac{\pi}{15} - 0\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{36}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{18}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{\pi}{15} - \frac{5\pi}{36}\right)\right|$$

$$.\ \max_{\frac{\pi}{18}\leq\delta\leq\frac{\pi}{12}} |-sin\,\delta| \approx 2.252.10^{-9}$$

✓ **ملاحظات:**

1- معاملات لاغرانج لا تتغير إدا أجرينا تحويلا خطيا للمتغير x. نضع $x = at + b$ ومنه

$$x_i = at_i + b; i = \overline{0,n} \Rightarrow (x - x_i) = a(t - t_i)$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{a^n(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_n)}{a^n(t_i-t_0)(t_i-t_1)\dots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_n)}$$

$$\Rightarrow l_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)} = \frac{\prod(t)}{\prod'(t_i)(t-t_i)}$$

$$\Rightarrow L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)\, f(t_i) = \prod(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(t_i)}{\prod'(t_i)(t-t_i)} \qquad (3.17)$$

2- في حالة عندما تكون المسافات بين نقاط الاستقطاب متساوية فيما بينها أي أن:

$$x_{i+1} - x_i = h \Rightarrow x_i = x_0 + ih$$

ولدينا: $x = x_0 + th \Rightarrow t = \frac{x-x_0}{h}$

$$\prod(t) = (t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+1})\dots(t-t_n)$$

$$\prod'(t_i) = (t_i-t_0)(t_i-t_1)\dots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_n)$$

وحسب التحويل $t = \frac{x-x_0}{h}$ فإن $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_n = n$

فإن $\prod(t)$ و $\prod'(t_i)$ يصبحان كما يلي:

$$\prod(t) = (t-0)(t-1)\dots\big(t-(i-1)\big)(t-i)\big(t-(i+1)\big)\dots(t-n)$$

$$\prod'(t_i) = \big[(i-0)(i-1)\dots\big(i-(i-1)\big)\big]\big[\big(i-(i+1)\big)\dots(i-n)\big]$$

$$\Rightarrow \prod'(t_i) = [i.(i-1).(i-2)\dots 1].[(-1).(-2)\dots.(i-n)]$$

$$\Rightarrow \prod'(t_i) = i!\,(-1)^{i-n}(i-n)!$$

نعوض هده التحويلات في $l_i(t)$ يصبح كمايلي:

$$l_i(t) = \frac{\prod(t)}{\prod'(t_i)(t-t_i)} = \frac{\prod(t)}{(t-i)i!\,(-1)^{i-n}(i-n)!} = \frac{(-1)^{n-i}\prod(t)}{(t-i)i!\,(i-n)!}$$

ولأن: $C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ وبالتعويض في قيمة $l_i(t)$ تصبح كآلاتي:

$$l_i(t) = \frac{(-1)^{n-i}\prod(t)C_n^i}{(t-i)n!}$$

$$\Rightarrow L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)\, f(t_i) = \frac{\prod(t)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{(t-i)}f(t_i) \qquad (3.18)$$

3- في بعض الحالات لا يمكن العمل على جميع نقاط الاستقطاب او يفرض علينا عمل بنقاط معينة دون غيرها في هذه الحالة نستخدم طريقة Neville

تعريف 1.3:

لتكن f معرفة عند النقاط $x_0, \dots\dots, x_n$ ولنضع $m_1, \dots\dots, m_k$ نقاط مختلفة بحيث $0 \le m_i \le n$ من اجل $i = \overline{0,k}$ إذا كثير الحدود الاستقطابي للاغرانج بطريقة Neville من الدرجةk يعطى بـ$p_{m_1,\dots\dots,m_k}$

نظرية 3.3:

لتكن $f(x)$ معرفة عند النقاط $x_0, \dots\dots, x_n$ ولتكنx_i, x_j نقطتين مختلفتين من النقاط المعطاة سابقا إذا يعطى كثير الحدود الاستقطابي للاغرانج بطريقة Neville من الدرجة أقل من أو يساوي k للدالة $f(x)$ عند $(k+1)$ $x_0, \dots\dots, x_k$ كمايلي:

$$p_{i,j}(x) = \frac{\left[(x-x_i)p_{0,j-1,j+1,k}(x)\right] - \left[(x-x_j)p_{0,i-1,i+1,k}(x)\right]}{(x_j - x_i)}$$

مثال5.3:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة من أجل النقاط الموجودة في الجدول التالي:

x_i	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
y_i	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

- أحسب كثيرات الحدود الاستقطابية للأغرانج بطريقة Neville التالية:

$p_{2,3,4}(1.5);\ p_{1,2,3,}(1.5);\ p_{0,1,2}(1.5);\ p_{3,4}(1.5)\ ;\ p_{2,3}(1.5);\ p_{1,2}(1.5);\ p_{0,1}(1.5\ )$

$p_{0,1,2,3}(1.5);\ p_{1,2,3,4}(1.5);\ p_{0,1,2,3,4}(1.5)$

حيث: $f(x) = f(1.5) = 0.5118277$

الحل:

$$p_{0,1}(1.5\ ) = \frac{(1.5-1.0)P_1 - (1.5-1.3)p_0}{(1.3-1.0)} = 0.5233449$$

$$p_{1,2}(1.5) = \frac{(1.5-1.3)p_2 - (1.5-1.6)p_1}{(1.6-1.3)} = 0.512968$$

$$p_{2,3}(1.5) = \frac{(1.5-1.6)p_2 - (1.5-1.9)p_1}{(1.9-1.6)} = 0.5132634$$

$$p_{3,4}(1.5) = \frac{(1.5-1.9)p_2 - (1.5-2.2)p_1}{(2.2-1.9)} = 0.5104270$$

$$p_{0,1,2}(1.5) = \frac{(1.5-1.0)p_{1,2} - (1.5-1.6)p_{0,1}}{(1.6-1.0)} = 0.512415$$

$$p_{1,2,3,}(1.5) = \frac{(1.5-1.3)p_{2,3} - (1.5-1.9)p_{1,2}}{(1.9-1.3)} = 0.5112857$$

$$p_{2,3,4}(1.5) = \frac{(1.5-1.6)p_{3,4} - (1.5-2.2)p_{2,3}}{(2.2-1.6)} = 0.5137361$$

$$p_{0,1,2,3}(1.5) = \frac{(1.5-1.0)p_{1,2,3} - (1.5-1.9)p_{0,1,2}}{(1.9-1.0)} = 0.5118127$$

$$p_{1,2,3,4}(1.5) = \frac{(1.5-1.3)p_{2,3,4} - (1.5-2.2)p_{1,2,3}}{(2.2-1.3)} = 0.5118302$$

$$p_{0,1,2,3,4}(1.5) = \frac{(1.5-1.0)p_{1,2,3,4} - (1.5-2.2)p_{0,1,2,3}}{(2.2-1.0)} = 0.5118200$$

3-4 كثير حدود استقطاب نيوتن

3-4-1 صيغة نيوتن للفروق المقسمة

نفرض أن: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ ; \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

1. تعطى صيغة الفروق المقسمة الأولى كما يلي:

$$[x_0, x_1] = f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

$$[x_1, x_2] = f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$[x_i, x_{i+1}] = f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

2. تعطى صيغة الفروق المقسمة الثانية كما يلي:

$$[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$[x_1, x_2, x_3] = f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

ويمكن تلخيصها كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	الدرجة 1	الدرجة 2	الدرجة 3	الدرجة 4	الدرجة 5
x_0	y_0					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	y_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_3	y_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	
		$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$		
x_4	y_4		$f[x_3, x_4, x_5]$			
		$f[x_4, x_5]$				
x_5	y_5					

2-4-3 شكل علاقة استقطاب نيوتن

نبحث عن كثير الحدود الاستقطابي لنيوتن للتابع $f(x)$على الشكل التالي:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (3.19)$$

حيث:

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i$$

نبحث عن الثوابت a_i

1- $a_0 = ?$

$$p(x_0) = f(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f[x_0] \qquad (3.20)$$

2- $a_1 = ?$

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{p(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \qquad (3.21)$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (3.22)$$

$$a_3 = f[x_0, x_{,1}, x_2, x_3], = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \quad (3.23)$$

⋮

$$a_i = f[x_0, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0} \quad (3.24)$$

وبتعويض كل العلاقات السابقة (3.24), (3.23), (3.22), (3.21), (3.20) في العلاقة (3.19) نجد:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) \quad (3.25)$$

ويسمى بكثير حدود استقطاب نيوتن من الدرجة n أو علاقة نيوتن للفروق المقسمة المنتهية للاستقطاب

مثال6.3:

قرب القيمة $p_n(1.5)$ باستخدام كثير حدود استقطاب نيوتن من أجل كل الدرجات.

x_i	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
y_i	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

الحل:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
1.0	0.7651977				
		-0.4837057			
1.3	0.6200860		-0.1087339		
		-05489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		-0.094433		0.0018251
		-0.5786120		0.0680865	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		-0.5715210			
2.2	0.1103623				

$$p_1(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1)$$

$$p_1(1.5) = 0.5233448$$

$$p_2(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3)$$

$$p_2(1.5) = 0.5124714$$

$$p_3(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3) + 0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6)$$

$$p_3(1.5) = 0.5118126$$

$$p_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3) + 0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6) + 0.0018251(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$

$$p_4(1.5) = 0.5118200$$

✓ **ملاحظات:**

1. في حالة المسافة بين كل نقطتين ثابتة أي $x_i = x_0 + ih, h = x_{i+1} - x_i$

$$x = x_0 + sh \Rightarrow x - x_i = (s-i)h$$

وبالتعويض في (3.25) نجد:

$$p_n(x) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)h^n f[x_0, \dots, x_n]$$

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0, \dots, x_k] \quad (3.26)$$

وللتسهيل نضع:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

$$\Rightarrow p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k!\, h^k f[x_0, \dots, x_k] \quad (3.27)$$

وتسمى بصيغة ***Newton forward*** للفروق المقسمة المنتهية.

2. من جهة أخرى نعلم أن:

$$f[x_0, x_1] = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{1}{h}\Delta y_0$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}}{2h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 y_0;\ \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{k!\, h^k}\Delta^k y_0$$

بالتعويض في (3.27) نجد:

$$\Rightarrow p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0; \quad s = \frac{x - x_0}{h} \qquad (3.28)$$

$$\Rightarrow p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{2!}\Delta^n y_0 \qquad (3.29)$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة نيوتن للفروق المقسمة المنتهية الأولى ونستخدمها في تقريب قيمة x_i قريبة من القيمة x_0 وذلك لما $s = \frac{x-x_0}{h}$

3. أما إذا كانت القيمة x_i قريبة من القيمة الأخيرة x_n تعطى العلاقة (3.5) كما يلي:

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k y_n \qquad (3.30)$$

حيث $\frac{x-x_n}{h}$ وتسمى بصيغة نيوتن للفروق المقسمة المنتهية الثانية.

ويمكن كتابة العلاقة (3.30) على النحو الآتي:

$$p_n(x) = f[x_n] + shf[x_{n-1}, x_n] + s(s+1)h^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \cdots$$
$$+ s(s+1)(s+2)\dots(s+n+1)h^n f[x_0, \dots, x_n]$$

$$\Leftrightarrow p_n(x) = f[x_n] + s\Delta y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{3!}\Delta^3 y_n$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)\dots(s+n)}{n!}\Delta^n y_n \qquad (3.31)$$

مثال7.3:

قرب القيمتين$p_4(1.1), p_4(2.0)$ للمثال **6.3** باستخدام صيغتي نيوتن للفروق المقسمة الأولى والثانية.

الحل:

1- تقريب القيمة $p_4(1.1)$ باستخدام صيغة نيوتن للفروق المقسمة الأولى.

نلاحظ أن القيمة المراد تقريبها $x = 1.1$ تقع بجوار النقطة $x_0 = 1$ وعليه نستخدم الصيغة الأولى

لدينا:

$$s = \frac{1.1 - 1.0}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$p_4(1.1) = p_4\left[(1.0) + \frac{1}{3}(0.3)\right] = 0.7651977 + \frac{1}{3}(0.3)(-0.4837057)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)(0.3)^2(-0.1087339) + \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)(0.3)^3(0.0658784)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{-8}{5}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196480$$

$$\Rightarrow p_4(1.1) = 0.7196480$$

2- تقريب القيمة$p_4(2.0)$ باستخدام صيغة نيوتن للفروق المقسمة الثانية.

نلاحظ أن القيمة المراد تقريبها $x = 2$ تقع بجوار النقطة $x_4 = 2.2$ وعليه نستخدم الصيغة الثانية

$$s = \frac{2 - 2.2}{0.3} = \frac{-2}{3}$$

$$p_4(2.0) = p_4\left(2..2 - \frac{2}{3}(0.3)\right) = 0.1103623 + \left(\frac{-2}{3}\right)(0.3)(-0.571524)$$
$$+\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0118183) + \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0680085)$$
$$+\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{5}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754$$

$$\Rightarrow p_4(2.0) = 0.2238754$$

3-4-3 صيغة نيوتن للفروق الوسطى

وتستخدم هده الصيغة في حالة تواجد القيمة المراد تقريبها في وسط القيم أي في وسط الجدول صيغة نيوتن وتعطى بالعلاقة التالية:

وعليه لدينا عدد فردي من النقاط n والدي يعطى بـ $2m = n$ أي$(x_{-m}, \dots, x_1, x_0, x_1, \dots, x_m)$

$$p_n(x) = p_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}[f(x_{-1}, x_0) + (x_0, x_1)] + s^2h^2f[x_{-1}, x_0, x_1]$$

$$+\frac{s(s^2-1)}{2}h^3[f(x_{-1}, x_0, x_1, x_2) + f(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1)] + \cdots$$

$$+s^2(s^2-1)(s^2-4)\dots(s^2-(m-1)^2)h^{2m}f[x_{-m}, \dots, x_m] \qquad (3.32)$$

$$+\frac{s(s^2-1)(s^2-4)\dots(s^2-m^2)}{2}h^{2m+1}[f(x_{-m}, \dots, x_{m+1}) + f(x_{-m-1}, \dots, x_m)]$$

مثال8.3:
قرب القيمة $p_4(1.5)$ باستخدام صيغة نيوتن للفروق الوسطى للمثال **6.3**.

الحل:

$$p_4(1.5) = p_4\left(1.6 + \left(\frac{-1}{3}\right)(0.3)\right)$$

$$= 0.4554022 + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{0.3}{2}\right)(+0.5489460 - 0.5786120)$$

$$+ \left(\frac{-1}{3}\right)^2 (0.3)^2(0.0494433)$$

$$+ 1\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^2(0.658784 + 0.0680680)$$

$$+ 1\left(\frac{-1}{3}\right)^2\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^4(0.0018251)$$

$$\Rightarrow p_4(1.5) = 0.5118200$$

3-4-4 تقييم الخطأ في صيغ نيوتن الاستقطابية

نظرية 4.3:

نفرض أن $f(x)$قابلة للاشتقاق من الرتبة $(n+1)$ فانه من أجل كل $x \in [a,b]$ يوجد ε_xحيث:

$$\delta_x \in [min\{x_i, x\}\,; max\{x_i, x\}]\,; i = \overline{0,n}$$

$$E_n(x) = \frac{\prod(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta_x) = R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

وهو نفس الخطأ في علاقة لاغرانج الاستقطابية.

1- الخطأ في صيغة نيوتن الأولى:

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}s(s-1)(s-2)\dots(s-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta_x) \qquad (3.33)$$

حيث: $s = \frac{x-x_0}{h}$

2- الخطأ في صيغة نيوتن الثانية:

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta_x) \qquad (3.34)$$

حيث: $s = \frac{x-x_n}{h}$

✓ **ملاحظة:**

علاقات نيوتن السابقة الأولى ،الثانية والوسطى تستخدم كلها في الحالات المناسبة والملائمة كل حالة على حدا، و ذلك للحصول على أفضل تقريب للقيمة الدقيقة و بالتالي أفضل خطأ ممكن، و هي علاقات خاصة وتعطينا أكثر دقة.

5-3 تقريب التوابع باستخدام طريقة المربعات الصغرى

1-5-3 مقدمة

ثمة سؤال يطرح في مسائل التحليل العددي وله الكثير من التطبيقات العملية في معظم الفروع العلمية وخاصة في المسائل الإحصائية (مسائل التنبؤ)، وهو كيف يمكننا تمثيل نقاط التجربة على شكل تابع يكون أقرب ما يمكن من التابع الحقيقي. أي كيف نستطيع تمرير منحنى يمر أقرب ما يمكن من تلك النقاط التجريبية بأقل خطأ ممكن.

إن هذه المسألة ستطرح في العلوم التطبيقية بشكل آخر أيضا كما هو في الإحصاء مثلا، حيث أنه يعطى تابع ما ذو شكل رياضي معقد ويطلب موائمته على شكل مستقيم مثلا أو على شكل فرع من قطع مكافئ ففي هذه الحالة يمكن تحويل هذه المسألة المطروحة بداية وذلك بأن نأخذ عددا من نقاط هذا التابع وأن نعد تلك النقاط وكأنه حصل عليها تجريبيا ومتابعة المسألة.

لنفرض أن y_i هي القيم التجريبية و Y_i هي القيم التي نحصل عليها من التقريب. ولنضع $R = Y_i - y_i$ وهو الخطأ الذي نريده أصغر ما يمكن . إن حل هذه المسألة يمكن فيما إذا جعلنا النظيم – النظيم الإقليدي L_2 عندئذ نحصل طريقة تقريبية تسمى " طريقة الوربعات الصغرى".

2-5-3 طريقة المربعات الصغرى

لنأخذ مجموعة من m نقطة $(j = 1,2, \dots, m)$ ، ولدينا (x_j , y_j) والتي عليها تجريبا وحيث أن هذه النقاط ترتبط مع بعضها البعض بالتابع $y = f(x)$.

باعتبار أول لنشر لهذا التابع بكثير حدود من الدرجة n أصغر من m $(n < m)$، إذن:

$$y = y_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (3.35)$$

$a_i;\ (i = 0,1,2, \dots n)$ إذا نحسب العوامل a_i ، حيث أن كثير الحدود يكون تقريبا (تقديرا) جيدا للمعطيات $(x_j, y_j);\ (j = 1,2, \dots, m)$.

إذا عوضنا هذه النقاط في كثير الحدود نحصل على m معادلة:

$$\begin{cases} R_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n - y_1 \\ R_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n - y_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ R_m = a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \cdots + a_{n-1}x_m^{n-1} + a_nx_m^n - y_m \end{cases} \qquad (3.36)$$

إن هذه المساويات ليست معدومة لأنه ليس من الضروري أن يمر كثير الحدود بشكل دقيق من هذه النقاط. إن الفرق بين قيمة كثير الحدود وقيمة التابع التجريبية $(j = 1,2, \dots, m)$; $R_j = \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i - y_j$ تسمى بالباقي ويرمز لها بالرمز R_j . وهكذا فإنه لدينا m باقي تظهر في العلاقات (3.36).

إن مبدأ المربعات الصغيرة يبنى على أساس أن أفضل تمثيل للمعطيات يكون بحيث يجعل مجموع مربعات البواقي أصغريا.

إذن لنعرف التابع التالي:

$$f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \cdots . + R_m^2 = 0 \quad \text{(في حالة الاستيفاء)} \qquad (3.37)$$

ولنجعل هذا التابع أصغريا، هذا يعني أن نعدم المشتقات الجزئية أي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_0} = 2\left(R_1 \dfrac{\partial R_1}{\partial a_0} + R_2 \dfrac{\partial R_2}{\partial a_0} + R_3 \dfrac{\partial R_3}{\partial a_0} + \cdots + R_m \dfrac{\partial R_m}{\partial a_0}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1} = 2\left(R_1 \dfrac{\partial R_1}{\partial a_1} + R_2 \dfrac{\partial R_2}{\partial a_1} + R_3 \dfrac{\partial R_3}{\partial a_1} + \cdots + R_m \dfrac{\partial R_m}{\partial a_1}\right) = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_n} = 2\left(R_1 \dfrac{\partial R_1}{\partial a_n} + R_2 \dfrac{\partial R_2}{\partial a_n} + R_3 \dfrac{\partial R_3}{\partial a_n} + \cdots + R_m \dfrac{\partial R_m}{\partial a_n}\right) = 0 \end{cases} \qquad (3.38)$$

من الممكن الاختصار بكتابة العلاقات السابقة بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x_j^i - y_j\right)^2 ; \quad (j = 1,2, \dots, m) \qquad (3.39)$$

ولكن بالاشتقاق لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_j}{\partial a_0} = \dfrac{\partial}{\partial a_0}\left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \cdots + a_{n-1} x_j^{n-1} + a_n x_j^n - y_j\right) = 1 \\ \dfrac{\partial R_j}{\partial a_1} = \dfrac{\partial}{\partial a_1}\left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \cdots + a_{n-1} x_j^{n-1} + a_n x_j^n - y_j\right) = x_j \\ \dfrac{\partial R_j}{\partial a_2} = \dfrac{\partial}{\partial a_2}\left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \cdots + a_{n-1} x_j^{n-1} + a_n x_j^n - y_j\right) = x_j^2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{\partial R_j}{\partial a_n} = \dfrac{\partial}{\partial a_n}\left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \cdots + a_{n-1} x_j^{n-1} + a_n x_j^n - y_j\right) = x_j^n \end{cases} \qquad (3.40)$$

من أجل $(j = 1,2, \dots, m)$.

وبالتالي فإن الجملة (3.38) تصبح كمايلي:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_m = 0 \\ x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 + \cdots + x_m R_m = 0 \\ x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + x_3^2 R_3 + \cdots + x_n^2 R_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_1^n R_1 + x_2^n R_2 + x_3^n R_3 + \cdots + x_n^n R_m = 0 \end{cases} \qquad (3.41)$$

نعوض قيمة R_j من (3.36) ونجمع الـ $(n+1)$ عامل $(i = 0,1,2, \dots, n)$; a_i المجهولة .

نحصل على العلاقات التالية:

$$\begin{cases} ma_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} x_j^n a_n - \sum_{j=1}^{m} y_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} x_j a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^3 a_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+1} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j y_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^3 a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^4 a_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+2} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} x_j^n a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+1} a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+2} a_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} x_j^{2n} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j^n y_j = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

حيث أن الجمع كله يتم من 1 إلى m ، أي أن:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_m^3$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j = x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2 + x_3^3 y_3 + \cdots + x_m^3 y_m$$

تعريف 2.3

تسمى العلاقات (3.42) باسم المعادلات الناظمية أو العادية.

إن كل هذه المجاميع تعرف مجموعة من $(n+1)$ معادلة خطية بـ $(n+1)$ مجهول وحلها يعطي قيمة العوامل $(i = 0,1,2, \dots, n)$; a_i وهي تحدد كثير الحدود التالي:

$$y = y_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (3.43)$$

إن مبدأ المربعات الصغرى ليس مقتصرا في الواقع على كثيرات الحدود فقط، بل التابع المرغوب التقريب به (الموائمة به) ويمكن أن يأخذ أي شكل معروف طالما يمكن حل المعدلات الناظمية التي نحصل عليها، وهذا يكون أسهل بالطبع عندما تكون المعدلات الناظمية خطية.

3-5-3 تطبيقات أولية في الإحصاء الرياضي

ليكن لدينا m ثنائية $(x_j, y_j); (j = 1,2, \dots, m)$، كنتائج تجريبية لتجربة ما:

x	x_1	x_2	x_3	... ...	x_m
y	y_1	y_2	y_3	... ...	y_m

ولنفرض أننا نريد مطابقة أو موائمة هذه المعطيات بعلاقة بين x و y، يمكنا مناقشة عدد من الحالات.

1- شكل خطي (مستقيم)

إن العلاقة الأسهل بين x و y هي من الشكل الخطي: $y = a + bx$، إن المشكلة الآن تكمن في تعيين الثوابت a و b بحيث يكون المستقيم تمثيل جيدا لجدول المعطيات. إن تطبيق مبدأ المربعات الصغرى ينتج من المعدلات (3.42) ، المعدلات الناظمية من أجل هذه الحالة، نحصل على المعادلتين:

$$\begin{cases} ma_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j b = \sum_{j=1}^{m} y_j \\ \sum_{j=1}^{m} x_j a + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 b = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j \end{cases} \qquad (3.44)$$

إن حل جملة هذه المعدلات يعطينا:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} x_j y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)\right] \\ b = \frac{1}{\Delta}\left[m\left(\sum_{j=1}^{m} x_j y_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)\right] \\ \Delta = m\sum_{j=1}^{m} x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2 \end{cases} \qquad (3.45)$$

مثال9.3:

ليكن الجدول التجريبي التالي:

x	-3	-1	1	4	5	7	10
y	-2	-1	0	$1{,}5$	2	3	$4{,}5$

الحل:

لنحسب القيم التالية أولا: $\sum y_j = 8\,; m = 7; \sum x_j = 23; \sum x_j^2 = 201\,; \sum x_j y_j = 89$
وبالتالي فإن المعادلات الناظمية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} 7a + 23b = 8 \\ 23a + 20b = 89 \end{cases}$$

وحلها يعطي القيم: $a = -0{,}5;\ b = 0{,}5$ ومعادلة المستقيم تأخذ الشكل التالي:

$$y = 0{,}5x - 0{,}5 \ \Rightarrow 2y + 1 = x$$

2- شكل قطعي

لتكن العلاقة بين x و y هي من الشكل القطعي: $y = a + bx$، وقبل معالجة هذه الحالة نقوم بالتبسيط في الرموز.

لنرمز (في المعادلات الناظمية) بمايلي:

$$\begin{cases} S_0 = m;\ S_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j\ ;\ S_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2;\ \ldots\ldots; S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \\ k_0 = \sum_{j=1}^{m} y_j\ ;\ k_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j\ ;\ k_2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j; \ldots\ldots; k_k = \sum_{j=1}^{m} x_j^k y_j \end{cases} \quad (3.46)$$

إن أحد الأشكال القطعية المكافئة هو التابع التربيعي: $y = a + bx + cx^2$

حيث له ثلاثة عوامل هي: a, b, c، إن المعاملات الناظمية تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} ma + S_1 b + S_2 c = k_0 \\ S_1 a + S_2 b + S_3 c = k_1 \\ S_2 a + S_3 b + S_4 c = k_2 \end{cases} \quad (3.47)$$

مثال10.3:

لائم المعطيات الموجودة في الجدول على شكل قطع مكافئ:

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
-2	0	4	-8	16	0	0
-1	4	1	-1	1	-4	4
0	6	0	0	0	0	0
1	6	1	1	1	6	6
2	4	4	8	16	8	16
3	0	9	27	81	0	0
4	-6	16	64	256	-24	-96
7	14	35	91	371	-14	-70

المعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$\begin{cases} 7a + 7b + 35c = 14 \\ 7a + 35b + 91c = -14 \\ 35a + 91b + 371c = -70 \end{cases}$$

إن حل هذه المعادلات هو: $a = 6; b = 1; c = -1$ وتكون المعادلة الطلوبة هي:

$$y = 6 + x - x^2$$

✓ **ملاحظة:**

يمكن تبديل بين x و y لكتابة المعطيات بمعادلة من الشكل القطعي التالي:

$$x = a + by + cy^2$$

6-3 تمارين

1-6-3 تمارين محلولة

التمرين الأول:

1. باستخدام صيغة لاغرانج الاستقطابية اكتب كثير الحدود الاستقطابي الذي يمر بالنقاط التالية:

x_i	-1	2	4	5
y_i	-2	43	213	376

2. احسب القيمة التقريبية $p(1)$

الحل:

1. كثير الحدود الاستقطابي للاغرانج

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(-1-2)(-1-4)(-1-5)} = \frac{-1}{90}(x^3 - 11x^2 + 38x - 40)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)(x-5)}{(2+1)(2-4)(2-5)} = \frac{1}{18}(x^3 - 8x^2 + 11x - 20)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(4+1)(4-2)(4-5)} = \frac{-1}{10}(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$$

$$l_3(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(5+1)(5-2)(5-4)} = \frac{1}{18}(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$$

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_i(x) = -2l_0(x) + 43l_1(x) + 213l_2(x) + 376l_3(x)$$

$$= \big((2\,(x-4) + 14)(x-2) + 15\big)(x+1) - 2$$

$$\Rightarrow L_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5\,x + 1$$

2. القيمة التقريبية $L(1)$

$$L_3(1) = 2(1)^3 + 4(1)^2 + 5\,(1) + 1 = 12$$

التمرين الثاني:

لتكن الدالة: $f(x) = \ln(1+x)$ معرفة من اجل النقاط $x_0 = 1;\ x_1 = 1.1;\ x_2 = 1.2$

1. باستخدام كثير الحدود الاستقطابي لاغرانج من الدرجة الأولى أحسب القيمة التقريبية ل $f(1.04)$

2. باستخدام كثير الحدود الاستقطابي لاغرانج من الدرجة الثانية أحسب القيمة التقريبية ل $f(1.04)$

3. ما مدى دقة النتائج؟

الحل:

1. كثير الحدود الاستقطابي للاغرانج من الدرجة الأولى:

$$l_0(x) = \frac{(x-1.1)}{(1-1.1)} = \frac{x-1.1}{-0.1} \; ; \quad l_1(x) = \frac{(x-1)}{(1.1-1)} = \frac{x-1}{0.1}$$

$$L_1(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i l_i(x) = 0.488\,x + 0.2051$$

- حساب القيمة التقريبية لـ $L_1(1.04)$

$$\Rightarrow L_1(1.04) = 0.71262$$

2. كثير الحدود الاستقطابي للاغرانج من الدرجة الأولى:

$$l_0(x) = \frac{(x-1.1)(x-1.2)}{(1-1.1)(1-1.2)} \; ; l_1(x) = \frac{(x-1)(x-1.2)}{(1.1-1)(1.1-1.2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-1.1)}{(1.2-1)(1.2-1.1)}$$

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = (x-1.2)\big(0.47675 - 0.1125\,(x-1)\big) + 0.78845$$

$$L_2(x) = -0.1125\,x^2 + 0.72425\,x + 0.08135$$

- حساب القيمة التقريبية لـ $L_2(1.04)$.

$$\Rightarrow \; L_2(1.04) = 0.71289$$

- حساب القيمة الحقيقية $f(1.04)$

$$f(1.04) = ln(1.04+1) = 0.712949$$

- حساب قيمة الخطأ

$$R_1(1.04) = |f(1.04) - \; L_1(1.04)| = 3 \times 10^{-4}$$
$$R_2(1.04) = |f(1.04) - \; L_2(1.04)| = 5 \times 10^{-5}$$

- نلاحظ أن الخطأ يتناقص تدريجيا كلما زادت درجة كثير الحدود الاستقطابية للاغرانج.

التمرين الثالث:

لتكن الدالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. أوجد الصيغة الاستقطابية لكثير الحدود لاغرانج من الدرجة أقل من أو يساوي 2 عند النقاط التالية:

$$x_0 = 0; x_1 = 2; \; x_2 = 4$$

2. قرب القيمة $L_2(3)$ باستخدام الصيغة السابقة ثم أحسب قيمة الخطأ.

الحل:

1. ايجاد الصيغة الاستقطابية لكثير الحدود لاغرانج من الدرجة 2:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 8)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{1}{-2}(x^2 - 5x + 4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-2)(4-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = l_0(x) + \frac{1}{5}l_1(x) + \frac{1}{17}l_2(x) = \frac{7}{85}x^2 - \frac{48}{85}x + 1$$

2. تقريب القيمة $L_2(3)$ وحساب الخطأ:

$$L_2(3) = \frac{7}{85}(3)^2 - \frac{48}{85}(3) + 1 = \frac{4}{85} = 0.047; \quad f(3) = \frac{1}{1+(3)^2} = 0.1$$

$$R_2(3) = |f(3) - L_2(3)| = 5{,}2 \times 10^{-2}$$

التمرين الرابع:

لتكن الدالة $f(x) = 1 + e^{-x}$ معرفة من أجل النقاط التالية :

$$x_0 = 1;\ x_1 = 2\ ;\ x_2 = 3$$

1. أوجد عبارة كثير حدود لاغرانج

2. قرب القيمة $L_3(2.5)$ ثم أحسب قيمة الخطأ.

الحل:

1. لدينا أربعة نقاط أي أن كثير الحدود من الدرجة الثالثة.

$$f(1) = 1.3678\ ; f(2) = 1.1353\ ;\ f(3) = 1.0497;\ f(4) = 1.0183$$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{-1}{6}(x^3 - 9x^2 + 22x - 24)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 16x - 12)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{-1}{2}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_i(x)$$

$$L_3(x) = 1.3678\, l_0(x) + 1.1353 l_1(x) + 1.0497 l_2(x) + 1.0183 l_3(x)$$

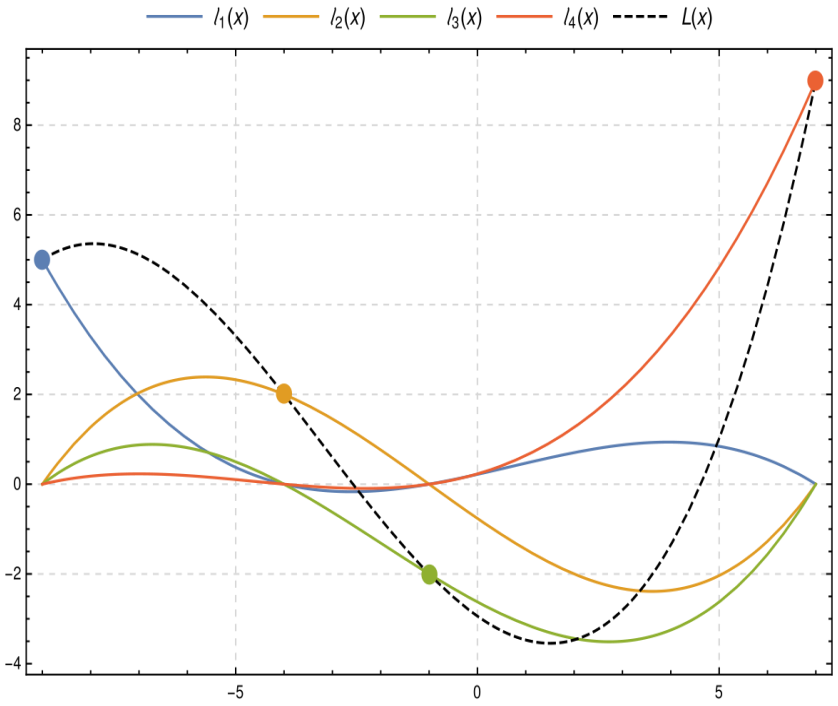
$$\Rightarrow L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_i(x) = x^3 - 4x^2 + 2\,x - 7$$

2. تقريب القيمة $L_3(2.5)$ وحساب قيمة الخطأ.

$$\Rightarrow L_3(2.5) = 1.125; \quad f(2.5) = 1.08208$$

$$\Rightarrow R_3(2.5) = 4.2.\,10^{-2}$$

التمثيل البياني لكثير حدود لاغراج



التمرين الخامس:

أنشئ صيغة تقريبية للدالة $f(x)$ المعطى بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	5.2	8.0	10.4	12.4	14	15.2

الحل:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	5.2	2.8	-0.4	0
1	8.0	2.4	-0.4	0
2	10.4	2.0	-0.4	0
3	12.4	1.6	-0.4	
4	14	1.2		
5	15.2			

صيغة نيوتن التقريبية لإيجاد كثير الحدود الاستقطابي.

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)\,;h = 1$$

$$p_2(x) = 5.2 + \frac{2.8}{1}(x - 0) + \frac{(-0.4)}{2!\,1^2}(x - 0)(x - 1) = -0.2x^2 + x + 5.2$$

التمرين السادس:

أوجد القيمة التقريبية لـ $sin\,14^0$ و $sin\,56^0$ باستخدام صيغتي نيوتن للفروق المقسمة الأولى والثانية من أجل القيم التالية:

$$x_0 = 15^0,\ x_1 = 20^0,\ x_2 = 25^0,\ x_3 = 30^0 :\ \ x_4 = 35^0,\ x_5 = 40^0$$

$$x_6 = 45^0,\ x_7 = 50^0,\ x_8 = 55^0$$

الحل:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
15^0	0.2588	832.10^{-4}	-26.10^{-4}	-6	0
20^0	0.3420	806.10^{-4}	-32.10^{-4}	-6	0
25^0	0.4226	774.10^{-4}	-38.10^{-4}	-6	0
30^0	0.5000	736.10^{-4}	-44.10^{-4}	-5	0
35^0	0.5736	692.10^{-4}	-49.10^{-4}	-5	0
40^0	0.6028	643.10^{-4}	-54.10^{-4}	-3	
45^0	0.7071	589.10^{-4}	-57.10^{-4}		
50^0	0.7660	532.10^{-4}			
55^0	0.8192				

1- تقريب القيمة لـ $sin\,14^0$ باستخدام صيغتي نيوتن للفروق المقسمة الأولى:

لدينا: $x_0 = 15^0;\ x = 14^0 \Rightarrow \mathrm{s} = \frac{14^0 - 15^0}{5} = -0.2$

$$sin\,14^0 = 0.2588 + (-0.2)(832.10^{-4}) + \frac{(-0.2)(-0.2-1)}{2!}(-26.10^{-4})$$

$$\frac{(-0.2)(-0.2-1)(-0.2-2)}{3!}(-6.10^{-4}) = 2419.10^{-4}$$

2- تقريب القيمة لـ $sin\,56^0$ باستخدام صيغتي نيوتن للفروق المقسمة الثانية:

لدينا:

$$x_n = 55^0;\ \ x = 56^0 \Rightarrow s = \frac{56^0 - 55^0}{5} = 0.2$$

$$sin\,56^0 = 0.8192 + (0.2)(532.10^{-4}) + \frac{(0.2)(0.2+1)}{2!}(-57.10^{-4})$$

$$+\frac{(0.2)(0.2+1)(0.2+2)}{3!}(-3.10^{-4}) = 8297.10^{-4}$$

$$sin\,14^0 = 2419.10^{-4};\ sin\,56^0 = \ 8297.10^{-4}$$

التمرين السابع:

باستخدام صيغة نيوتن المناسبة في حساب القيمة التقريبية لـ: $ln(1.3)$ ، ماهي قيمة الخطأ التقريبي المرتكب إدا كانت نقاط الاستقطاب هي: $x_0 = 1; x_1 = 1{,}25;\ \ x_2 = 1{,}75$

الحل:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\prod(x)|}{(n+1)!} \underset{x_{i\leq\delta_x\leq x}}{max}\ f^{(n+1)}(\delta_x)$$

لدينا : $f(x) = lnx\ ; f'(x) = \frac{1}{x};\ f''(x) = \frac{-1}{x^2}\ ;\ f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{3!}\big|\big((x-1)(x-1.25)(x-1.75)\big|\ \max_{1\leq x\leq 1.75}\frac{2}{x^3}$$

$$|R_2(1.3)| \leq \frac{1}{3!}\big|\big((1.3-1)(1.3-1.25)(1.3-1.75)\big|2 = 0.225.10^{-2}$$

$$|R_2(1.3)| \leq 0.225.10^{-2}$$

التمرين الثامن:

لائم المعطيات الموجودة في الجدول على شكل قطع مكافئ من أجل $m = 7$.

x	y	y^2	y^3	y^4	yx	y^2x
1	0	0	0	0	0	0
2	2	4	8	16	4	8
2	-2	4	-8	16	-4	8
5	4	16	64	256	20	80
5	-4	16	-64	256	-20	80
10	6	36	216	1296	60	360
10	-6	36	-216	1296	-60	360
7	0	112	0	3136	0	896

الحل:

المعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$\begin{cases} 7a + 0b + 112c = 35 \\ 0a + 112b + 0c = 0 \\ 112a + 0b + 313c = 896 \end{cases}$$

إن حل هذه المعادلات هو: $a = 1; b = 0; c = 0{,}25$ وتكون المعادلة الطلوبة هي:

$$y^2 = 4(x-1) \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{4}y^2$$

2-6-3 تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

1.باستخدام صيغة لاغرانج الإستقطابية اكتب كثير الحدود الإستقطابي الذي يمر بالنقاط التالية:

x_i	-1	2	4	5
y_i	-2	43	213	376

2.أحسب القيمة التقريبية $p(1)$.

التمرين الثاني:

لتكن الدالة $f(x) = \ln(1+x)$ معرفة من أجل النقاط $x_0 = 1;\ x_1 = 1.1;\ x_2 = 1.2$

1.باستخدام كثير الحدود الاستقطابي لاغرانج من الدرجة الأولى احسب القيمة التقريبية ل $f(1.04)$

2. باستخدام كثير الحدود الاستقطابي لاغرانج من الدرجة الثانية احسب القيمة التقريبية ل $f(1.04)$

3. ما مدى دقة النتائج؟

التمرين الثالث:

لتكن الدالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1.أوجد الصيغة الاستقطابية لكثير الحدود لاغرانج من الدرجة اقل من أو يساوي 2 عند النقاط التالية:

$$x_0 = 0; x_1 = 2;\ x_2 = 4$$

2. قرب القيمة $p_2(3)$ باستخدام الصيغة السابقة ثم احسب قيمة الخطأ بطريقتين مختلفتين.

التمرين الرابع:

باستخدام الصيغ الاستقطابية لنيوتن المناسبة أجب على التمرينات 1، 2 و 3

التمرين الخامس:

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(\sqrt{3})$باستخدام طريقةNeville للدالة $(x) = 3^x$ والذي يمر بالنقاط التالية:

$$x_0 = -2;\ x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = 2$$

التمرين السادس:

باستخدام كثير حدود الاستقطابية أوجد صيغة بسيطة لـ:

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^{n+1}$$

التمرين السابع:

أحسب المجموع التالي ودلك باستخدام الصيغ المناسبة لنيوتن

$$\sum = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

التمرين الثامن:

احسب الفرق المقسوم من الرتبة n للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ أي:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = ?$$

التمرين التاسع:

لتكن الدالة $f(x)$معطاة قيمها كما يلي:

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

1. قرب القيمة $f(0.1)$ باستخدام طريقة Newton للفروق المنتهية الأولى

2. قرب القيمة $f(0.9)$ باستخدام طريقة Newton للفروق المنتهية الثانية

3. قرب القيمة $f(0.5)$ باستخدام طريقة Newton للفروق الوسطى.

الفصل الرابع

التفاضل العددي

تمهيد:

يتم اللجوء إلى التفاضل العددي عندما يراد إيجاد المشتقة لدوال معقدة والتي يصعب إيجاد قيمة مشتقاتها بشكل يسير وكذلك الحال بالنسبة للدوال المعرفة فقط في بيانات مجدولــة أو نتائج مختبرية. إذن التفاضل العددي هو عملية حساب المشتقة للدالة عن طريق القيم المعطاة لتلك الدالة، و يمكن انجاز ذلك بتمثيل الدالة بإحدى صيغ الاستكمال و من ثم تفاضل هذه الصيغة بقدر عدد المرات المطلوبة.

إذا كانت قيم الدالة معطاة في نقاط ذات مسافات متساوية أو غير متساوية عن بعضها فتعوض الدالة على المجال $[a, \mathrm{b}]$ بدالة استقطابية في معظم الحالات تكون دالة كثيرة حدود أي:

$$f(x) = p_n(x) \Rightarrow f'(x) = p_n'(x);\ \forall x \in [a, b]$$

1-4 حساب التفاضل باستخدام صيغة لاغرانج الاستقطابية

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ والتي نفترض أنها مستمرة وقابلة للاشتقاق في المجال$[a, \mathrm{b}]$ $f \in$ $C^{(n+1)}[a, \mathrm{b}]$ معرفة عند$(n+1)$ نقطة مختلفة $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

ولذلك يمكن إيجاد تقريب جيد لمشتقة الدالة $f(x)$ من الدرجة الأولى باستخدام كثير حدود لاغرانج الذي يمر بهذه النقاط.

حسب لاغرانج لدينا :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i + \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x+1)!} f^{(x+1)}(\xi_x);\ \forall \xi_x \epsilon\ [a, b]$$

نشتق الطرفين نجد :

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{x} l'_i(x) y_i + \frac{dy}{dx}\left[\prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x+1)!}\right] f^{(n+1)}(\xi_x) +$$

$$\sum_{i=0}^{x} l_i(x) y'_i + \frac{dy}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi_x)\right] \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x+1)!} \qquad (4.1)$$

نعلم أن: $\sum_{i=0}^{x} l_i(x) y'_i = 0$ و$\frac{dy}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi_x)\right]$ يكون معدوما

بصفة عامة نحاول تقريب قيمة $f'(x)$ عند نقطة معينة x_k ، نعوضها في (4.1) نجد :

$$f'(x_k) = \sum_{i=0}^{n} l'_i(x_k) y_i + \frac{f^{(x+1)}(\xi_x)}{(x+1)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) \qquad (4.2)$$

تسمى هذه الأخيرة بصيغة $(n+1)$ نقطة لتقريب $f'(x_k)$ ، و الصيغ الأكثر تداولا تكون باستخدام ثلاثة نقاط أو خمسة نقاط.

1-1-4 حساب التفاضل باستخدام ثلاثة نقاط

مثال 1.4:

لدينا النقاط الثلاثة: x_0, x_1, x_2

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow l'_0(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow l'_1(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow l'_2(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

بتعويض كل من $l'_0(x_k)$ و $l'_1(x_k)$ و $l'_2(x_k)$ في(4.2) نجد :

$$f'(x_k) = y_0\left[\frac{2x_k-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + y_1\left[\frac{2x_k-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]$$
$$+y_2\left[\frac{2x_k-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2}(x_k-x_i)\ ;\xi_k\epsilon[x_0,x_2] \qquad (4.3)$$

في معظم الحالات تكون المسافة أو الخطوة h ثابتة و المطلوب حساب قيمة المشتق عند إحدى النقاط المعرفة عندها الدالة، إذا تكون لدينا :; $x_2 = x_0 + 2h\ ;\ h \neq 0 x_1 = x_0 + h$

1- إذا أخذنا: $x_0 = x_k\ , x_1 = x_0 + h\ , x_2 = x_0 + 2h$ و نعوضها في (4.3) نجد :

$$f'(x_0) = y_0\left[\frac{2x_0-(x_0+h)-(x_0+2h)}{\big(x_0-(x_0+h)\big)\big(x_0-(x_0+2h)\big)}\right]$$

$$+y_1\left[\frac{2x_0-x_0-(x_0+2h)}{\big((x_0+h)-x_0\big)\big((x_0+h)-(x_0+2h)\big)}\right]$$

$$+y_2\left[\frac{2x_0-x_0-(x_0+h)}{\big((x_0+2h)-x_0\big)\big((x_0+2h)-(x_0+h)\big)}\right]$$

$$+\frac{1}{6}f^{(3)}(\delta_0)\big(x_0-(x_0+h)\big)\big(x_0-(x_0+2h)\big)$$

وبعد الاختزال نحصل على الصيغة (4.4) التالية:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{h}\left[{}^{-3}/_{2}\,y_0 + 2y_1 - {}^{1}/_{2}\,y_2\right] + {}^{h^2}/_{3}\,f^{(3)}(\xi_0) \qquad (4.4)$$

2- إذا أخذنا : $x_1 = x_k\,; x_0 = x_1 - h;\; x_2 = x_1 + h$ ونعوضها في (4.3) نجد :

$$f'(x_1) = y_0\left[\frac{2x_1 - x_1 - (x_1 + h)}{(x_1 - x_1)\big(x_1 - h - (x_1 + h)\big)}\right]$$

$$+y_1\left[\frac{2x_1 - x_1 - h - (x_1 + h)}{\big(x_1 - (x_1 - h)\big)\big(x_1 - (x_1 + h)\big)}\right]$$

$$+y_2\left[\frac{2x_1 - x_1 - (x_1 - h)}{\big((x_1 + h) - (x_1 - h)\big)\big((x_1 + h) - x_1\big)}\right]$$

$$+\frac{1}{6}\,f^{(3)}(\xi_0)\big(x_1 - (x_1 - h)\big)\big(x_1 - (x_1 + h)\big)$$

وبعد الاختزال نحصل غلى الصيغة (4.4) التالية:

$$f'(x_1) = {}^{1}/_{h}\left[{}^{-1}/_{2}\,y_0 + {}^{1}/_{2}\,y_2\right] - {}^{h^2}/_{6}\,f^{(3)}(\xi_1) \qquad (4.5)$$

3- إذا أخذنا :x_1=$x_2 - h x_2 = x_k$; ونعوضها في (4.4) نجد:

$$f'(x_2) = y_0\left[\frac{2x_2 - (x_2 - h) - x_2}{\big((x_2 - 2h) - (x_2 - h)\big)\big((x_2 - 2h) - (x_0 + 2h)\big)}\right]$$

$$+y_1\left[\frac{2x_2 - (x_2 - 2h) - x_2}{\big((x_2 - h) - (x_2 - 2h)\big)\big((x_2 - h) - x_2\big)}\right]$$

$$+y_2\left[\frac{2x_2 - (x_2 - h) - (x_2 - 2h)}{\big(x_2 - (x_2 - 2h)\big)(x_2 - (x_2 - h))}\right]$$

$$+\frac{1}{6}\,f^{(3)}(\xi_0)\big(x_2 - (x_2 - 2h)\big)\big(x_2 - (x_2 - h)\big)$$

وبعد الاختزال نحصل على الصيغة (4.6) التالية:

$$f'(x_2) = {}^{1}/_{h}\left[{}^{1}/_{2}\,y_0 - 2y_1 + {}^{3}/_{2}\,y_2\right] + {}^{h^2}/_{3}\,f^{(3)}(\xi_2) \qquad (4.6)$$

✓ **ملاحظة:**

وبما أن $x_2 = x_0 + 2h, x_1 = x_0 + h$ تصبح العلاقات السابقة كما يلي :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + {}^{h^2}/_{3}\,f^{(3)}(\xi_0) \qquad (4.7)$$

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)] - {}^{h^2}/_{6}\,f^{(3)}(\xi_1) \qquad (4.8)$$

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2)$$

$$= {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)] + {}^{h^2}/_{3}\,f^{(3)}(\xi_2) \qquad (4.9)$$

نلاحظ انه بإمكاننا الحصول على (4.7) باستخدام (4.9) و ذلك بتعويض h ب $-h$ ومنه يكون لدينا العلاقتين التاليين :

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + {}^{h^2}/_{3}\,f^{(3)}(\xi_0) \quad (4.10)$$

أما العلاقة (4.9) فهي تكافئ العلاقة (4.11) التالية:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - {}^{h^2}/_{6}\,f^{(3)}(\xi_1); \xi_0, \xi_1 \epsilon [x_0, x_2] \quad (4.11)$$

4-1-2 حساب التفاضل باستخدام خمسة نقاط

لدينا النقاط الثلاثة: لدينا النقاط الثلاثة: $x_0, x_1, x_2 x_3, x_4$

باستخدام نفس الطريقة السابقة نجد:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + {}^{h^4}/_{5}\,f^{(5)}(\xi_1); \xi_1 \in [x_0, x_4] \quad (4.12)$$

مثال 2.4:

ليكن الجدول التالي يمثل قيم الدالة $f(x) = xe^x$

x_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
$f(x_i)$	10,889365	12,703199	14,778112	17,148957	19,855030

قرب القيمة $f'(2{,}0)$ باستخدام الصيغ الثلاثة لثلاثة نقاط.

الحل :

لما $\boldsymbol{h = 0{,}1}$:

*) الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$$

$$f'(2{,}0) = {}^{1}/_{0{,}2}\,[-3f(2{,}0) + 4f(2{,}1) - f(2{,}2)] = 22{,}032310$$

*) الصيغة الثانية:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$

$$f'(2{,}0) = {}^{1}/_{0{,}2}\,[f(2{,}1) - f(1{,}9)] = 22{,}228700$$

*) الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0+2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0+h) + 3f(x_0+2h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.2}\,[f(1.8) - 4f(1.9) + 3f(2.0)] = 22.0545525$$

لما $\boldsymbol{h = -0,1}$:

*) الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2,0) = {}^{1}/_{-0,2}\,[-3f(2,0) + 4f(1,9) - f(1,8)] = 22,054525$$

✓ **ملاحظة:**

نلاحظ أن نتيجة الصيغة الأولى لما $\boldsymbol{h = -0,1}$ هي نفسها نتيجة الصيغة الثالثة $\boldsymbol{h = 0,1}$ وهدا ما يؤكده تكافؤ الصيغتين الأولى والثالثة

لما $\boldsymbol{h = 0,2}$: نستطيع فقط حساب القيمة التقريبية للمشتق لهده الصيغة ودلك حسب القيم الموجودة في الجدول.

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

$$f'(2,0) = {}^{1}/_{0,4}\,[f(2,2) - f(1,8)] = 22,414165$$

4-2 حساب التفاضل باستخدام كثير حدود *Newton* الاستقطابي الأول (الصيغة الأولى للفروق المقسمة)

نستخدم الصيغة الأولى للفروق المقسمة لـ ***Newton*** والمعطاة كمايلي**:**

$$f(x) = p_n(x) + R_n = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+\frac{s(s-1)(s-2)}{2!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{2!}\Delta^n y_0 + R_n \quad (4.13)$$

حيث لدينا:

$$s = \frac{x - x_0}{h}; \quad \binom{s}{n} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}$$

ومنه نستطيع كتابة الخطأ على الشكل التالي:

$$R_n = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi); \qquad x_0 \le \xi \le x_n$$

نشتق المعادلة (4.13) نجد:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(p_n(x)\big) + \frac{d}{dx}R_n = \frac{d}{ds}\big(p_n(x)\big)\frac{ds}{dx} + \frac{dR_n}{dx} = \frac{d}{ds}\big(p_n(x)\big).\frac{1}{h} + \frac{dR_n}{dx}$$

$$\frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 - \frac{1}{2}(s - 1 + s)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)]\Delta^3 y_0$$

$$+ \cdots] + \frac{dR_n}{dx} \qquad (4.14)$$

نشتق قيمة الخطأ نجد مايلي:

$$\frac{dR_n}{dx} = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \left[\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1}\right]\frac{1}{h} + \binom{s}{n+1} h^{n+1}.\frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi)\right] \quad (4.15)$$

نلاحظ أن الاشتقاق يصبح جبريا معقدا جدا لذلك نأخذ $s = 0$ أي نحسب المشتق عند $x = x_0$ لتصبح المعادلة (4.14) كمايلي:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots \pm \frac{1}{n}\Delta^n y_0\right] + E_n \quad (4.16)$$

حيث: $E_n = (R_n)'$ عند $s = 0$ إذن الطرف الثاني في الجهة اليمنى من المعادلة (4.15) يصبح معدوما لأن:

$$\binom{s}{n+1} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{(n+1)!} = 0$$

إذن نحسب الجزء الأول من الجهة اليمنى من المعادلة (4.15):

$$\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1} =$$

$$\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n) + s(s-2)\ldots(s-n) + \cdots + s(s-1)\ldots(s-n+1)}{(n+1)!} \quad (4.17)$$

عند $s = 0$ نجد أن الجزء الأول فقط من البسط في المعادلة (4.16) يصبح له معنى فتصبح (4.16) المعادلة كالآتي:

$$E_n = (R_n)' = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\left[(-1)^n \frac{n!}{(n+1)!}\right]\frac{1}{h} = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \quad (4.18)$$

إذن صيغة الاشتقاق عند $x = x_0$ ودلك بتعويض المعادلة (4.18) في المعادلة (4.16) تعطى كمايلي:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots \pm \frac{1}{n}\Delta^n y_0\right] + \frac{(-1)^n}{n+1} h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \quad (4.19)$$

وتسمى هده الصيغة بصيغة الفروق الأمامية.

مثال 3.4:

استخدم القيم الموجودة في الجدول للدالة $f(x) = e^x$ لحساب $f'(1,7)$ لما $h = 0,2$ واستخدم النتائج باستخدام حد واحد وحدين وثلاثة حدود من الصيغة (4.18).

x_i	$f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1.3	3.669					
		0.813				
1.5	4.482		0.179			
		0.992		0.041		
1.7	5.474		0.220		0.011	
		1.212		0.048		**0.0**
1.9	6.686		0.268		0.012	
		1.480		0.060		
2.1	8.166		0.328			
		1.808				
2.3	9.974					

1- حساب$f'(1,7)$ من الرتبة الأولى (حد واحد):

$$f'(1,7) = \frac{1}{0.2}(1.212) = 6.060$$

2- حساب$f'(1,7)$ من الرتبة الثانية (حدين):

$$f'(1,7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{1}{2}(0.268)\right) = 5.39$$

3- حساب$f'(1,7)$ من الرتبة الثالثة (ثلاثة حدود):

$$f'(1,7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060)\right) = 5.49$$

4- حساب$f'(1,7)$ من الرتبة الرابعة (أربعة حدود):

$$f'(1,7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060) - \frac{1}{4}(0.012)\right) = 5.475$$

✓ **ملاحظة:**

نستطيع تغيير الخطأ باستخدام المعادلة (4.19)

1- حساب الخطأ من الرتبة الأولى (E_1):

$$E_n = \frac{(-1)^n}{n+1}h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow E_1 = \frac{(-1)^1}{2}(0.2)^1 \ f''(\xi)$$

$$E_1 \leq \left|\frac{(-1)^1}{2}(0.2)^1\right| \max_{1.7\leq\xi\leq1.9}\left|e^{\xi}\right| = 0.669$$

أما القيمة الحقيقية للمشتق هي: $e^{1.7} = 5.474$ ومنه القيمة الحقيقية للخطأ هي: 0.556

2- حساب الخطأ من الرتبة الثانية (E_2):

$$E_n = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow E_2 = \frac{(-1)^2}{3}(0.2)^2 \ f^{(3)}(\xi)$$

$$E_1 \leq \left| \frac{(-1)^2}{3}(0.2)^2 \right| \max_{1.7 \leq \xi \leq 2.1} \left| e^{\xi} \right| = 0.073$$

ومنه القيمة الحقيقية للخطأ هي: 0.084

3- حساب الخطأ من الرتبة الثالثة (E_3):

$$E_n = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow E_3 = \frac{(-1)^3}{4}(0.2)^3 \ f^{(4)}(\xi)$$

$$E_3 \leq \left| \frac{(-1)^3}{4}(0.2)^3 \right| \max_{1.7 \leq \xi \leq 2.3} \left| e^{\xi} \right| = 0.020$$

ومنه القيمة الحقيقية للخطأ هي: 0.016

4- حساب الخطأ من الرتبة الرابعة (E_4):

$$E_n = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n \ f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow E_4 = \frac{(-1)^4}{5}(0.2)^4 \ f^{(5)}(\xi)$$

$$E_4 \leq \left| \frac{(-1)^4}{5}(0.2)^4 \right| \max_{1.7 \leq \xi \leq 2.5} \left| e^{\xi} \right| = 0.004$$

ومنه القيمة الحقيقية للخطأ هي: 0.001

1-2-4 صيغ أخرى لاستقطاب نيوتن

نأخذ حدين فقط في الصيغة (4.18)

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}(s-1+s)\Delta^2 y_0\right] + E_2 \qquad (4.20)$$

نعلم أن استقطاب كثير الحدود لنيوتن من الرتبة الثانية متعلق بالفواصل x_0, x_1, x_2 ونأخذ $s = 1$ بمعنى أن نكتب (4.19) عند $x = x_1$.

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right] + E_2 = \frac{1}{h}\left[y_1 - y_0 - \frac{1}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + E_2$$

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{2h} + E_2 = \frac{f_2 - f_1}{2h} + E_2 \qquad (4.21)$$

وتسمى بصيغة الفرق المركزي، وكما في العلاقة (4.19) يعطى الخطأ في (4.21) كمايلي:

$$E_2 = -\frac{1}{6} h^2 \ f^{(3)}(\xi); \qquad x_0 \leq \xi \leq x_2 \qquad (4.22)$$

4-2-2 حساب التفاضل باستخدام نشر تايلور

1. من الدرجة الأولى:
لدينا:

$$\mathbf{f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^2)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^2)$$

بالجمع العلاقتين السابقتين:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} + O(h^2) \qquad (4.23)$$

2. من الدرجة الثانية:

نستطيع إيجاد قيمة تقريبية لمشتقة دالة $f(x)$ من رتب عليا، فمثل لحساب القيمة التقريبية للمشتقة الثابتة نقوم بنشر الدالة في جوار x_0 وذلك عند النقاط $x_0 + h\,, x_0 - h$ كما يلي :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + {}^1\!/_2\, f''(x_0)h^2 + {}^1\!/_6\, f^{(3)}(x_0)h^3 + {}^1\!/_{24}\, h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + {}^1\!/_2\, f''(x_0)h^2 - {}^1\!/_6\, f^{(3)}(x_0)h^3 + {}^1\!/_{24}\, h^4 f^{(4)}(\xi_{-1})$$

بجمع العلاقتين السابقتين طرف مع طرف نجد :

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + {}^{h^4}\!/_{24}\left[f^{(4)}(\xi_{-1}) + f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

ومنه:

$\forall \delta \in [x_0 - h, x_0 + h]$ فإن:

$$f''(x_0) = {}^1\!/_{h^2}\left[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right] - {}^{h^2}\!/_{12}\, f^{(4)}(\xi_1) \qquad (4.24)$$

مثال 4.4:

نفس المثال السابق لحساب $f'(1{,}7)$ باستخدام الصيغة (4.21) نجد مايلي:

$$f'(x_1) = \frac{6{,}686 - 4{,}482}{2(0{,}2)} = 5{,}510$$

نحسب قيمة الخطأ باستخدام (4.22) نجد:

$$E_2 = -\frac{1}{6}(0{,}2)^2 \ f^{(3)}(\xi) \leq \left|-\frac{1}{6}(0{,}2)^2\right| \max_{1{,}7\leq\xi\leq 1{,}9}\left|e^{\xi}\right| = 0{,}0441$$

أما الخطأ الفعلي هو: $0{,}036$

4-2-3 صيغ الاشتقاق من رتب عليا

باشتقاق الصيغتين(4.14) و (4.17) نجد:

$$f''(x) = p_n''(x) = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\cdot p_n(x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}(2)\Delta^2 y_0\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}[(s-2)+(s-1)+(s-2)+s+(s-1)+s]\Delta^3 y_0\right]+\cdots \qquad (4.25)$$

عند $s=2$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \cdots] \qquad (4.26)$$

✓ **ملاحظة:**

الاشتقاق لرتب أعلى يصبح أكثر تعقيدا لدلك سوف نستخدم الطريقة الرمزية وهي باختصار:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta\big(\Delta f(x_0)\big) = \Delta f(x_0+h) - \Delta f(x_0)$$

$$\nabla f(x_0) = f(x_0) - f(x_0-h)$$

$$\nabla^2 f(x_0) = \nabla\big(\nabla f(x_0)\big) = \nabla f(x_0) - \nabla f(x_0-h)$$

$$Ef(x_0) = f(x_0+h)$$

$$E^2 f(x_0) = E\big(Ef(x_0)\big) = E\big(f(x_0+h)\big) = f(x_0+2h)$$

ومنه:

$$E^n f(x_0) = E\big(E^{n-1} f(x_0)\big) = E\big(f(x_0+(n-1)h)\big) = f(x_0+nh)$$

$$\Delta f(x_0) = Ef(x_0) - f(x_0) = (E-1)\, f(x_0)$$

$$\nabla f(x_0) = f(x_0) - E^{-1} f(x_0)$$

اختصارا نكتب:

$$\nabla= 1 - E^{-1};\quad \Delta= E - 1$$

بمعنى:

$$E = \Delta + 1; f(x) = E^s f(x_0)$$

حيث: E هو المؤثر وليس الخطأ، ومنه:

$$f(x) = E^s f(x_0) = f(x_0 + sh) = f(x_0 + x - x_0) = f(x)$$

إذن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(E^s f(x_0)\right) = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left(E^s f(x_0)\right) = \frac{1}{h}(\ln E)E^s f(x_0) \qquad (4.27)$$

عند $s = 0$

$$f'(x_0) == \frac{1}{h}(ln\, E)f(x_0) = \frac{1}{h}ln(1+\Delta)f(x_0)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right) \qquad (4.28)$$

لإيجاد (4.28) قمنا بنشر ماك لوران للدالة $ln(\Delta + 1)$ وهي تطابق (4.19) حيث $f(x_0) = y_0$

لنضع الآن: مؤثر الاشتقاق D ونعرفه كمايلي:

$$Dy_0 = \frac{1}{h}ln(1+\Delta)y_0 \qquad (4.29)$$

وتختصر ونكتب:

$$D = \frac{1}{h}ln(1+\Delta) \qquad (4.30)$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(ln(1+\Delta)\right)^2;\ D^3 = \frac{1}{h^3}\left(ln(1+\Delta)\right)^3$$

ومنه:

$$D^n = \frac{1}{h^n}\left(ln(1+\Delta)\right)^n \qquad (4.31)$$

باستخدام (4.31) نستطيع إيجاد مشتقات من رتب أعلى على سبيل المثال:

$$D^2 y_0 = \frac{1}{y^2}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \cdots.\right)^2 y_0$$

$$\Rightarrow D^2 y_0 = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \cdots.\right)^2 y_0$$

$$\Rightarrow D^2 y_0 = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots.\right)^2 \qquad (4.32)$$

وهي تطابق(4.26) ، وبشكل مماثل نستطيع إيجاد رتب أعلى.

3-4 تمارين

1-3-4 تمارين محلولة

التمرين الأول:

قرب القيمة $f''(1,7)$ باستخدام العلاقة (4.32) بحدين مع قيمة الخطأ.

الحل:

1- تقريب القيمة $f''(1,7)$

$$y''(1,7) = \frac{1}{(0,2)^2}(0,268 - 0,060) = 5,200$$

2- حساب قيمة الخطأ

$$R_3 = \frac{1}{h^2}\left(\frac{11}{12}h^4 y^{(4)}(\xi)\right) \leq \left(\frac{11}{12}(0,2)^2 \max_{1.7\leq\xi\leq2.1} e^{\xi}\right) = 0.2994$$

أما القيمة الحقيقية للخطأ هي: 0.2739

التمرين الثاني:

لتكن الدالة: $f(x) = xe^x$

قرب القيمة: $f'(2,0)$ باستخدام مختلف الصيغ الممكنة لذلك (3 نقاط و 5 نقاط)

$(h = 0,4\ ; h = 0,2\ ; h = -0,1\ ; h = 0,1)$

الحل:

تقريب القيمة: $f'(2,0)$ باستخدام مختلف الصيغ الممكنة لثلاثة نقاط.

x_i	1,2	1,6	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,4	2,8
$f(x_i)$	3 ,9841	7,9248	10,8893	12,7031	14,7781	17,1489	19,8550	26,4556	46,0450

الحالة الأولى: $\boldsymbol{h = 0,1}$

الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2,0) = {}^{1}/_{0,2}\,[-3f(2,0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22,032310$$

الصيغة الثانية:

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.2}\,[-f(1.9) + f(2,1)] = 22,228700$$

الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.2}\,[f(1.8) - 4f(1.9) + 3f(2.0)] = 22.0545525$$

الحالة الثانية: $\boldsymbol{h = -0,1}$

الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2,0) = {}^{1}/_{-0,2}\,[-3f(2,0) + 4f(1.9) - f(1.8)] = 22,054525$$

الصيغة الثانية:

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2.0) = {}^{1}/_{-0.2}\,[-f(2.1) + f(1.9)] = 22,228700$$

الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2.0) = {}^{1}/_{-0.2}\,[f(2.2) - 4f(2.1) + 3f(2.0)] = 22,032310$$

الحالة الثالثة: $\boldsymbol{h = 0,2}$

الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2,0) = {}^{1}/_{0,4}\,[-3f(2,0) + 4f(2,2) - f(2,4)] = 22,57525$$

الصيغة الثانية:

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.4}\,[-f(1.8) + f(2.2)] = 22,42175$$

الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.4}\,[f(1.6) - 4f(1.8) + 3f(2.0)] = 22,75475$$

الحالة الرابعة: $\boldsymbol{h = 0,4}$

الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2,0) = {}^{1}/_{0,8}\,[-3f(2,0) + 4f(2.4) - f(2.8)] = 21,021358$$

الصيغة الثانية:

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$
$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0,8}\,[-f(1.6) + f(2.4)] = 22,163522$$

الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0,8}\,[f(1.2) - 4f(1.6) + 3f(2.0)] = 21.774328$$

تقريب القيمة $f'(2.0)$ باستخدام خمسة نقاط لما $h = 0.01$

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)]$$

$$f'(2.0) = {}^{1}/_{0.02}\,[-25f(2.0) + 48f(2.1) - 36f(2.2) + 16f(2.3) - 3f(2.4)]$$

$$f'(2.0) = 22.324752$$

التمرين الثالث:

الحل:

لتكن الدالة: $f(x)$ المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 \;;\; x_0 = 1.5$$

باستخدام مختلف الصيغ الثلاثة $h = 0{,}01$ أحسب $f'(1.5)$

الحل:

تقريب القيمة $f'(1.5)$ لما $h = 0{,}01$

x_i	1.48	1,49	1,5	1,51	1,52
y_i	3,2856	3,33015	3.375	3,42015	3,4656

الصيغة الأولى:

$$f'(x_0) = {}^{1}/_{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(1.5) = {}^{1}/_{0.02}\,[-3f(1.5) + 4f(1.51) - f(1.52)] = 4.5$$

الصيغة الثانية:

$$f'(x_0 + h) = f'(x_1) = {}^{1}/_{2h}\,[-f(x_0) + f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(1{,}5) = {}^{1}/_{0.02}\,[-f(1.49) + f(1.51)] = 4.5$$

الصيغة الثالثة:

$$f'(x_0 + 2h) = f'(x_2) = {}^{1}/_{2h}\,[f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)]$$

$$f'(1{,}5) = {}^{1}/_{0.02}\,[f(1.48) - 4f(1.49) + 3f(1.5)] = 4.5$$

2-3-4 تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

أوجد $y'(1)$ و $y''(1)$ للتابع $y = f(x)$ المعطى قيمه بالجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

وذلك باستخدام صيغة لاغرانج في حساب التفاضل العددي لمختلف الصيغ الممكنة المتاحة.

التمرين الثاني:

أوجد $y'(0.525)$ و $y''(0.525)$ للتابع $y = f(x)$ المعطى قيمه بالجدول التالي:

x_i	0.525	0.526	0.527	0.528
y_i	0.50121	0.50208	0.50294	0.50381

وذلك باستخدام صيغة نيوتن للفروق المنتهية للاستقطاب في حساب التفاضل العددي.

التمرين الثالث:

أوجد $y'(50)$ و للتابع $y = f(x)$ المعطى قيمه بالجدول التالي:

x_i	50	55	60	65
y_i	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

وذلك باستخدام صيغة نيوتن للفروق المنتهية للاستقطاب في حساب التفاضل العددي.

التمرين الرابع:

لنأخذ التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المعطى قيمه بالجدول التالي:

x_i	1	1.05	1.1	1.15	1.2
y_i	1	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

أوجد $p'(1), p''(1), p'''(1)$ وذلك باستخدام صيغة نيوتن للفروق المنتهية للاستقطاب في حساب التفاضل العددي.

الفصل الخامس

التكامل العددي

تمهيد

نعلم انه إذا كان $f(x)$ تطبيق مستمر على المجال $[a,b]$ فان f قابل للتكامل على المجال $[a,b]$ وتكامله يساوي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

في حالات كثيرة يكون حساب الدالة الأصلية لـ $f(x)$ معقد ولا يمكن إنجازه بالطرق العادية وبالتالي يمكن حساب هذا التكامل بالطرق العددية وفكرتها الأساسية تعتمد على تقريب f بواسطة تطبيق اخر $g(x)$ بسيط كما يلي :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx$$

1-5 التكامل باستخدام كثيرات الحدود الاستقطابية

1-1-5 الية التكامل

ليكن $y = f(x)$ تطبيق معرف عند $(n+1)$ نقطة x_i $(i = \overline{0,n})$ فإذا قربنا $f(x)$ بواسطة كثير حدود لاغرانج $(g(x) = P_n(x))$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,f^{(n+1)}(x)\,dx}_{R_n(f)}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod(x)}{(x-x_i)\prod'(x_i)}\,y_i\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\int_a^b \frac{\prod(x)}{(x-x_i)\prod'(x_i)}\,y_i\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \qquad (5.1)$$

حيث المعاملات A_i تعرف كما يلي:

$$A_i = \int_a^b \frac{\prod(x)}{(x-x_i)\prod'(x_i)}\,dx = \int_a^b l_i(x)dx\,,\ \ i = 0,\dots,n$$

✓ **ملاحظة:**

نلاحظ ان المعاملات A_i لا تتعلق بالدالة $f(x)$ إنما بطريقة توزيع نقاط الاستقطاب.

2-1-5 صيغة (Newton-Cotes) التكاملية

لدينا حسب العلاقة السابقة :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b \frac{\prod(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)}\,dx y_i = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

بما أن نقاط الاستقطاب متساوية فيما بينها فان صيغة لاغرانج لا تتغير إذا أجرينا تغييرا خطيا للمتغير:

$$x = at + b$$

ولدينا حسب معاملات لاغرانج:

$$x = x_0 + th \;\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{h};\; x_i = x_0 + ih \Rightarrow x - x_i = a(t - t_i)$$

$$l_i(x) = l_i(t) \Rightarrow \frac{\prod(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)} = \frac{\prod(t)}{(t-t_i)\Pi'(t_i)} \qquad (5.2)$$

و العلاقة (5.2) برهنت من قبل في فصل الاستقطاب والتقريب.

وعليه فإن $\prod'(t_i)$ و $\prod(t)$ يصبحان كمايلي:

$$\prod(t) = (t-0)(t-1)\dots\big(t-(i-1)\big)(t-i)\big(t-(i+1)\big)\dots(t-n)$$

$$\prod'(t_i) = \big[(i-0)(i-1)\dots\big(i-(i-1)\big)\big]\big[\big(i-(i+1)\big)\dots(i-n)\big]$$

$$\Rightarrow \prod'(t_i) = [i.(i-1).(i-2)\dots 1].[(-1).(-2)\dots.(i-n)]$$

$$\Rightarrow \prod'(t_i) = i!\,(-1)^{i-n}(i-n)!$$

$$l_i(t) = \frac{\prod(t)}{\prod'(t_i)(t-t_i)} = \frac{\prod(t)}{(t-i)i!\,(-1)^{i-n}(i-n)!} = \frac{(-1)^{n-i}\prod(t)}{(t-i)i!\,(i-n)!}$$

Si : $x_0 = a\;;\; t_0 = \frac{a-a}{h} = 0$

Si: $x_0 = \delta\;;\; t_n = \frac{b-a}{h} = n \qquad et \quad dt = \frac{1}{h}dx \;\Rightarrow dx = hdt$

$$\Longrightarrow A_i = \int_0^n \frac{(-1)^{n-i}\prod(t)}{i!\,(n-i)!\,(t-i)}\,hdt\,; \quad \forall i = \overline{0,n} \qquad (5.3)$$

و بما أن : $h = \frac{b-a}{n}$

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}.\frac{b-a}{n}\int_0^n \frac{\prod(t)}{(t-i)}hdt = (b-a)H_i \ : i = \overline{0,n}$$

حيث :

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!\,n}\int_0^n \frac{\prod(t)}{(t-i)}hdt \qquad (5.4)$$

و تسمى H_i بمعاملات Newton-côtes ومنه:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i = nh\sum_{i=0}^{n} H_i y_i \ : i = \overline{0,n} \qquad (5.5)$$

و نطلق على (5.3) اسم صيغة (Newton-côtes) التكاملية ذات الرتبة n

✓ **ملاحظة:**

و تحقق معاملات Newton-côtes الخواص التالية:

1. $\sum_{i=0}^{n} H_i = 1$
2. $H_i = H_{n-i}$

مثال 1.5:

$\boldsymbol{n = 1}$

$$H_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{0!\,(1-0)!\,1}\int_0^1 \frac{t(t-1)}{(t-0)}dt = -\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = H_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{0!\,(1-0)!\,1}\int_0^1 \frac{t(t-1)}{(t-0)}dt = -\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx [\sum_{i=0}^{1} H_i y_i]nh = \frac{h}{2}[y_0 + y_1] \qquad (5.6)$$

2-5 علاقات أشباه المنحرف التكاملية

1-2-5 صيغة شبه المنحرف التكاملية

لما $\boldsymbol{n = 1}$

إذا كان لدينا $f(x)$ معرفة عند نقطتين x_0 و x_1 أي: $x_0 = a$ و $x_1 = b$ و $h = b - a$ فإن:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{(x_0 - x_1)}y_0 + \frac{x - x_0}{(x_1 - x_0)}y_1 + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} [\frac{x-x_1}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1]dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)dx \qquad (5.7)$$

نلاحظ أن: $(x-x_0)(x-x_1)$ لا يغير اشارته في المجال $[x_0, x_1]$ ، لذلك نطبق نص النظرية التالية:

نظرية 1.5

إذا كان $f \in C([a,b])$ و g قابل للتكامل على المجال $[a,b]$ و $g(x)$ لا يغير اشارته في نفس المجال إذن يوجد ثابت $a < c < b$ / c بحيث :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

لدينا :

$$\int_{x_0}^{x_1} [\frac{x-x_1}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1]dx$$

$$= \frac{y_0}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)dx + \frac{y_1}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx$$

$$= \frac{y_0}{2(x_0-x_1)}[(x-x_1)^2]_{x_0}^{x_1} + \frac{y_1}{2(x_0-x_1)}[(x-x_0)^2]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)+f(x_1)] \qquad (5.8)$$

و بتطبيق نص النظرية السابقة على :

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)dx = f''(\xi_x)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$= f''(\xi_x)[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)x^2}{2} + x_0x_1x]_{x_0}^{x_1} = -\frac{(x_1-x_0)^3}{6} f''(\xi_x)$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi_x) \qquad (5.9)$$

بتعويض كل من (5.8) و (5.9) في (5.7) نجد:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0+y_1] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_x) \qquad (5.10)$$

تسمى بصيغة شبه المنحرف لـ Trapèze و هي حالة خاصة من صيغ (Newton-Cotes) العامة لما $n = 1$ و الخطأ المرتكب يساوي $-\frac{h^3}{12} f''(\xi_x)$.

2-2-5 صيغة شبه المنحرف لـ Simpson

وتستخدم هده الصيغة لما $\boldsymbol{n = 2}$

لدينا 3 نقاط $x_0 = a$، $x_1 = a + h$ ، $x_2 = b$ حيث $h = \frac{b-a}{2}$ نحصل على صيغة *Simpson* (أو صيغة Newton-côteمن اجل $n = 2$)

لدينا حسب لاغرانج:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \right]$$
$$+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi_x)dx \qquad (5.11)$$

لحساب هذه التكاملات، يفرض *Simpson* ان $f(x)$ قابلة للنشر في جوار x_1 من الدرجة 3، اذا من أجل كل $x \in [x_0, x_2]$ ، يوجد $\xi(x) \in [x_0, x_2]$.

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_2) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f^{(3)}(x_1)}{6}(x-x_1)^3$$
$$+ \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{24}(x-x_1)^4$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$$
$$= f(x_1)(x-x_1) + \left[\frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1) \right]_{x_0}^{x_2} + \left[\frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^2 \right]_{x_0}^{x_2}$$
$$+ \left[\frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^3 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx \qquad (5.12)$$

لدينا:

$$(x_2-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2 = (x_2-x_1)^4 - (x_0-x_1)^4 = 0$$

$$(x_2-x_1)^3 - (x_0-x_1)^3 = 2h^3 \; ; (x_2-x_1)^5 - (x_0-x_1)^5 = 2h^5$$

حسب النظرية السابقة $g(x) = (x-x_1)^4$ لا تغير اشارتها في $[x_0, x_2]$.

$$\Rightarrow \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}\left[\frac{1}{5}(x-x_1)^5\right]_{x_0}^{x_2}$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}\left[\frac{2}{5}(h)^5\right] = \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi_x) \qquad (5.13)$$

نعوض التحويلات السابقة و (5.13) في (5.12) نجد:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi_x) \qquad (5.14)$$

و بما أن :

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{1}f^{(4)}(\xi_x)$$

فإن:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{1}f^{(4)}(\xi_x)\right]$$

$$+ \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi_x)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{25}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_x) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_x)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] - \left[\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi_x)\right] \qquad (5.15)$$

وهي صيغة شبه المنحرف لـ *Simpson* أو Newton-côte من أجل $n = 2$

مثال 2.5:

يمكننا الحصول على صيغة *Simpson* انطلاقا من صيغة *Newton Côtes* التكاملية من اجل $n = 2$ أي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx nh\sum_{i=0}^{n} H_i\, y_i; i = \overline{0,2} = 2h[H_0y_0 + H_1y_1 + H_2y_2]$$

$$H_i = \frac{(-1)^{2-i}}{i!\,(2-i)!}\int_0^2 \frac{\Pi(t)}{(t-i)}dt\,; i = \overline{0,2}$$

$$H_0 = \frac{(-1)^{2-0}}{0!\,(2-0)!}\int_0^2 \frac{\mathrm{t}(\mathrm{t}-1)(\mathrm{t}-2)}{(t-0)}dt = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = \frac{(-1)^{2-1}}{1!\,(2-1)!}\int_0^2 \frac{\mathrm{t}(\mathrm{t}-1)(\mathrm{t}-2)}{(t-1)}dt = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = H_0 = \frac{(-1)^{2-2}}{2!\,(2-2)!}\int_0^2 \frac{\mathrm{t}(\mathrm{t}-1)(\mathrm{t}-2)}{(t-2)}dt = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx 2h\left[\frac{1}{6}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2\right] \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

وهي نفس الصيغة السابقة لـ *Simpson* والموجودة في الصيغة (5.15).

مثال 3.5:

قرب التكامل I على المجال $[0,2]$ للدالة: $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$I = \int_0^2 f(x)dx$$

و ذلك بتطبيق صيغتي *Trapèze* و *Simpson* .

الحل:

1- تقريب التكامل I على المجال $[0,2]$ *باستخدام صيغة* *Trapèze* $(n = 1)$

لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_1] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_x)$$

$$x_0 = a = 0;\ x_1 = b = 2;\ h = 2 \Rightarrow f(0) = y_0 = \sqrt{1} = 1; f(2) = y_1 = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{2}{2}[1+\sqrt{5}] \approx 3.236067$$

2- تقريب التكامل I على المجال $[0,2]$ *باستخدام صيغة* *Simpson* $(n = 2)$

لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi_x)$$

$$x_0 = a = 0;\ x_2 = b = 2;\ h = \frac{2}{2} = 1; \Rightarrow x_1 = x_0 + h = 1$$

$$f(0) = y_0 = \sqrt{1} = 1; f(2) = y_2 = \sqrt{5};\ f(1) = y_1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{3}[1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5}] \approx 2.964307$$

نظرية 2.5:

لتكن $n+1$ نقطة استقطاب ل x_i حيث: $x_i = x_0 + ih$ و f معرفة عند هذه النقاط على المجال $[a,b]$ اي ان : $x_0 = a$ ، $x_n = b$ و $h = \frac{b-a}{n}$ ، اذا يوجد $\xi \in [a,b]$ و يحقق مايلي:

1. فإذا كان n زوجي و $f \in C^{n+2}([a,b])$ فإن تكامل الدالة $f(x)$ تعطى كمايلي:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt$$

2. أما إذا كان n فردي و $f \in C^{n+1}([a,b])$ فإن تكامل الدالة $f(x)$ تعطى كمايلي:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt$$

مثال 4.5:

أوجد صيغة *Newton-Cote* التكاملية من أجل $n=3$ ؟

الحل:

$$\int_a^b f(x)dx \approx nh \sum_{i=0}^{n} H_i\, y_i; i = \overline{0,3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx = 3h[H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2 + H_3 y_3]$$

$$H_i = \frac{(-1)^{3-i}}{i!\,(3-i)!} \int_0^3 \frac{\Pi(t)}{(t-i)} dt\,; i = \overline{0,3}$$

$$H_0 = \frac{(-1)^{3-0}}{0!\,(3-0)!} \int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{(t-0)} dt = \frac{1}{8}$$

$$H_1 = \frac{(-1)^{3-1}}{1!\,(3-1)!} \int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2(t-3)}{(t-1)} dt = \frac{3}{8}$$

$$H_2 = \frac{(-1)^{3-2}}{2!\,(3-2)!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{(t-2)}dt = \frac{3}{8}$$

$$H_3 = \frac{(-1)^{3-3}}{3!\,(3-3)!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{(t-3)}dt = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

$$R_3 = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi);\ \xi \in [x_0, x_3]\ et$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

3-2-5 صيغة شبه المنحرف المعممة

في حالة n كيفي نطبق صيغة ***Trapèze*** في كل مجال من أجل إثبات صحة النظرية **3.5** نتبع المثال التطبيقي التالي:

مثال 5.5:

نستخدم صيغة ***Trapèze*** لتقريب التكامل $\int_0^4 e^x dx$

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{4}{2}(e^0 + e^4) = 111.1963 \qquad ; h = 4$$

القيمة الحقيقية للتكامل هي : $\int_0^4 e^x dx = e^4 - e^0 = 53{,}59815$

إذا الخطأ المرتكب هو:

$$R_1 = |53{,}59815 - 111{,}1963| = 57.59815$$

إذا قيمة الخطأ كبيرة جدا ولهذا نستخدم التقنية السابقة لكن بقسمة المجال إلى مجالين ونطبق صيغة ***Trapèze*** على كل مجال، أي:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx = \frac{2}{2}[e^0 + e^2] + \frac{2}{2}[e^2 + e^4]; h = 2$$

$$= [e^0 + +2(e^2) + e^4] = 62{,}98720$$

أي أن:

$$R'_1 = |53{,}59815 - 62{,}98720| = 9{,}389056$$

نلاحظ أن الخطأ نقص بالمقارنة مع الخطأ الأول.

لهذا نعيد تقسيم المجالين السابقين إلى أربعة مجالات متساوية حيث : $h = \frac{1}{2}$ في كل مجال كمايلي:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$$= \frac{1}{2}[e^0 + e^1] + \frac{1}{2}[e^1 + e^2] + \frac{1}{2}[e^2 + e^3] + \frac{1}{2}[e^3 + e^4]$$

$$= \frac{1}{2}[e^0 + +2(e^1 + e^2 + e^3) + e^4] \approx 57{,}991994$$

$$R''_1 = |53{,}59815 - 57{,}9919940| = 3.999954$$

وبالتالي نعطي نص النظرية التالية والتي تمكننا من إعطاء صيغة ***Trapèze*** المعممة من أجل أي قيمة لـ n والتي تنقص من قيمة الخطأ تدريجيا.

نظرية 3.5:

لتكن $f \in C^2[a,b]$ و $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + ih$ من اجل $i = \overline{0,n}$
يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu); \mu \in [a,b]$$

وقد استنتجت هذه العلاقة انطلاقا من تقسيم المجال في كل مرة نستخدم العلاقة السابقة لـ *Trapèze*من أجل $(n = 1)$

4-2-5 صيغة شبه المنحرف المعممة ل*Simpson*

مثال 6.5:

نستخدم صيغة ***Simpson*** من أجل $n = 2$ لتقريب التكامل $\int_0^4 e^x dx$

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56{,}7695 \qquad ; h = 2$$

القيمة الحقيقية للتكامل هي : $\int_0^4 e^x dx = e^4 - e^0 = 53{,}59815$

إذن الخطأ المرتكب هو:

$$R_2 = |53{,}59815 - 56{,}7695| = 3{,}17143$$

إذن قيمة الخطأ كبيرة ولهذا نستخدم التقنية السابقة لكن بقسمة المجال إلى مجالين ونطبق صيغة *Simpson* على كل مجال، أي:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx = \frac{1}{3}[e^0 + 4e^1 + e^2] + \frac{1}{3}[e^2 + 4e^3 + e^4]; h = 1$$

$$= \frac{1}{3}[e^0 + 4(e^1 + e^3) + 2e^2 + e^4] = 53{,}86385$$

أي أن :

$$R'_2 = |53{,}59815 - 53{,}86385| = 0{,}26570$$

نلاحظ أن الخطأ نقص بالمقارنة مع الخطأ الأول، لهذا نعيد تقسيم المجالين السابقين إلى أربعة مجالات متساوية حيث : $h = \frac{1}{2}$ في كل مجال كما يلي:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^0 + 4e^{1/2} + e^1\right] + \frac{1}{6}\left[e^1 + 4e^{3/2} + e^2\right] + \frac{1}{6}\left[e^2 + 4e^{5/2} + e^3\right] + \frac{1}{6}\left[e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^0 + 4(e^{1/2} + e^{3/2} + e^{5/2} + e^{7/2}) + 2(e^1 e^2 e^3) + e^4\right] \approx 53{,}61622$$

$$R''_2 = |53{,}59815 - 53{,}61622| = 0.01807$$

نلاحظ أن الخطأ نقص تدريجيا وهذا راجع إلى تقنية تقسيم المجالات أو تقسيم المجال $[a, b]$ إلى n مجالا جزئيا متساويا، في كل مرة نطبق صيغة *Simpson* من أجل $(n = 2)$ في كل مجال. إذا يكون $n = 2m$ حيث :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i)\right);\ \xi_{2i-2i} < \xi_i < \xi_{2i}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) + f(x_{2m})\right] - \frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{m} f^{(4)}(\xi_j) \qquad (5.16)$$

نظرية 4.5:

إذا كان : $f \in C^4([a, b])$ اذا يوجد $\mu \in [a, b]$ حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

وهي صيغة *Simpson* المعممة من أجل $n = 2m$

البرهان:

نبرهن أن:

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \qquad (5.17)$$

بما أن: $f \in C^4([a,b])$ فان $f^{(4)}$ تبلغ حديها فهي محدودة ، اذا :

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(\xi_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

$$\Rightarrow m.\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \le m.\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

$$\Rightarrow \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

إذن بفرض انه يوجد $\mu \in [a,b]$ فان:

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \qquad (5.18)$$

إذا:

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \qquad (5.19)$$

وبما أن: $h = \frac{b-a}{2m}$ فإن:

$$E(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\mu) \qquad (5.20)$$

3-5 تمارين

1-3-5 تمارين محلولة

<u>التمرين الأول:</u>

1- باستخدام صيغتي *Simpson* و *Trapèze* المعممتين قرب التكامل التالي:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

حيث: $n = 10$

2- أوجد قيمة m حتى يكون الخطأ المطلق $|R(f)| \le 2.10^{-5}$

الحل:

1-1 تقريب التكامل باستخدام صيغة *Trapèze* المعممة:

لدينا: $n = 10$ أي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\pi} sin\, x\, dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{10-1} f(x_i) + f(b)\right]; h = \frac{\pi}{10}$$

نشكل الجد ول التالي:

x_i	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	π
$sinx_i$	0	0.30901	0.58778	0.80901	0.95105	1	0.95105	0.80901	0.58778	0

$$\int_0^{\pi} sin\, x\, dx = \frac{\pi}{20}[0 + 2(0.30901 + 0.58778 + 0.80901 + 0.95105 + 1$$

$$0.58778 + 0.80901 + 0.95105) + 0] = 1.886428$$

حساب قيمة التكامل الحقيقية:

$$\int_0^{\pi} sin\, x\, dx = -\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$R_T = |2 - 1.886428| = 0.113571$$

2-1 تقريب التكامل باستخدام صيغة *Simpson* المعممة:

لدينا: $n = 10 \Rightarrow m = 5; h = \frac{\pi}{10}$ أي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\pi} sin\, x\, dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{5-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{5} f(x_{2i-1}) + f(b)\right]$$

$$\int_0^{\pi} sin\, x\, dx = \frac{\pi}{30}[0 + 2(0.58778 + 0.95105 + 0.951051 + 0.58778)$$

$$+4(0.30901 + 0.80901 + 0.80901 + 1 + 1) + 0] = 2.028953$$

$$R_S = |2 - 2.028953| = 0.028953$$

2- إيجاد قيمة m حتى يكون الخطأ المطلق $|R(f)| \leq 2.10^{-5}$

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i)\,; h = \frac{\pi}{2m}$$

$$E(f) = -\frac{(\pi)}{180}\left(\frac{\pi}{2m}\right)^4 f^{(4)}(\mu); f'(x) = cos\, x\ ;\ f''(x) = -sin\, x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x\ ;\ f^{(4)}(x) = sin\, x$$

$$E(f) \leq \left|-\frac{(\pi)}{180}\left(\frac{\pi}{2m}\right)^4\right| \max_{0\leq\mu\leq\pi} f^{(4)}(\mu) = \frac{(\pi)^5}{2880m^4} \max_{0\leq\mu\leq\pi} |sin\, x|$$

$$E(f) = \frac{0{,}106256}{m^4} \leq 2.10^{-5} \Rightarrow m^4 \geq \frac{0{,}106256}{2.10^{-5}} = 5312.8417$$

$$\Rightarrow m \geq 8{,}5375 \Rightarrow m \geq 9$$

التمرين الثاني:

ليكن التكامل التالي معطى بـ :

$$\int_0^{1,5} \frac{1}{1+x}dx$$

1- قرب التكامل باستخدام صيغتي *Trapèze* و *Simpson*.
2- قرب التكامل باستخدام صيغتي *Trapèze* و *Simpson* المعممتين وذلك من اجل : $n = 6$
3- احسب قيمة الخطأ المرتكب في كل مرة.
4- أيّ الصيغ أفضل للحصول على اقرب قيمة للتكامل؟

الحل:

1-1 قرب التكامل باستخدام صيغة *Trapèze* $(n = 1)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(1.5)]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{1.5} \frac{1}{1+x}dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(1.5)] = \frac{1.5}{2}\left(1 + \frac{1}{2.5}\right) = 1.05$$

2-1 قرب التكامل باستخدام صيغة *Simpson* $(n = 2)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(0.75) + f(1.5)];\ h = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{1.5} \frac{1}{1+x}dx = = \frac{0.75}{3}\left(1 + 4\left(\frac{1}{1.75}\right) + \frac{1}{2.5}\right) = 0.921428$$

1-2 قرب التكامل باستخدام الصيغة المعممة لـ *Trapèze* $(n = 6)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{5} f(x_{2i}) + f(1.5)\right]; h = \frac{1.5}{6} = 0.25$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{1.5} \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{0.25}{2}\left[1 + 2\left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.25}\right) + \frac{1}{2.5}\right] = 0.9195$$

2-2 قرب التكامل باستخدام الصيغة المعممة لـ *Simpson* $(n = 6 \Rightarrow m = 3)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{3-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i-1}) + f(b)\right], h = 0.25$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{1.5} \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[1 + 2\left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2.25}\right) + \frac{1}{2.5}\right] = 0.9163$$

1-3 حساب قيمة التكامل الحقيقية:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{1.5} \frac{1}{1+x}dx = ln|1+x|_0^{1.5} = ln(2.5) - ln1 = 0.91629$$

2-3 حساب قيمة الخطأ المرتكب في كل مرة.

$$R_T = |0.91629 - 1.05| = 0.1337$$

$$R_S = |0.91629 - 0.921428| = 5{,}1.10^{-3}$$

$$R_{TG} = |0.91629 - 0.9195| = 3.2.10^{-3}$$

$$R_{SG} = |0.91629 - 0.0.9163| = 10^{-5}$$

4- من خلال حساب الخطأ في كل صيغة للتكامل، فإننا نلاحظ أن أفضل الصيغ لتقريب قيمة التكامل هي صيغة شبه المنحرف المعممة لـ *Simpson*.

<u>التمرين الثالث:</u>

ليكن التكامل: $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$

1- قرب التكامل باستخدام صيغة Trapèze المعممة من أجل $n = 10$ ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب (خطأ العلاقة).

2- قرب التكامل I باستخدام صيغة Simpson المعممة من أجل $n = 10$ ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب (خطأ العلاقة).

<u>الحل:</u>

1-1 تقريب التكامل باستخدام صيغة Trapèze المعممة من أجل $n = 10$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{h}{2}\left[f(1) + 2\sum_{i=1}^{9} f(x_{2i}) + f(2)\right]; h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_i	1	1,049	1,059	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{0{,}1}{2}[1 + 2(1{,}049 + 1{,}059 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265$$

$$1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378) + 1{,}414] = 1.218$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 1.218$$

2-1 تقدير قيمة الخطأ:

$$R_n = \frac{-n}{12}h^2 f''(\xi);\ \ 1 \le \xi \le 2$$

$$R_{10} = \frac{-n\frac{1}{n^2}}{12}\left(-\frac{1}{4}\right)\xi^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow |R_n| = \frac{1}{120}\left(\frac{1}{4}\right)\xi^{-\frac{3}{2}} \le 0{,}00208 \max_{[1,2]} \xi^{-\frac{3}{2}} = 2.08.10^{-3}$$

1-2 قرب التكامل I باستخدام صيغة Simpson المعممة من أجل $n = 10$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{h}{3}\left[f(1) + 2\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{5} f(x_{2i-1}) + f(2)\right]$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{0{,}1}{3}[1 + 2(1{,}059 + 1{,}183 + 1{,}265 + 1{,}342)$$

$$4(1{,}049 + 1{,}140 + 1{,}225 + 1{,}304 + 1{,}378) + 1{,}414] = 1.2165$$

2-2 تقدير قيمة الخطأ:

$$R_{10} = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i)\,; h = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$R_{10} = -\frac{(1)}{180}\left(\frac{1}{10}\right)^4 f^{(4)}(\mu);\ f^{(4)}(\mu) = \frac{15}{4}\mu^{\frac{-7}{2}}$$

$$R_{10} \le |5{,}5.10^{-7}| \max_{1\le\mu\le2} f^{(4)}(\mu) = 5{,}5.10^{-7} \max_{0\le\mu\le\pi} \frac{15}{4}\mu^{\frac{-7}{2}} = 2{,}08.10^{-6}$$

5-3-2 تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

ليكن التكامل التالي:

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \sqrt{1+x}dx$$

1- أحسب قيمة التكامل باستخدام صيغتي *Trapèze* و *Simpson* .

2- قرب قيمة التكامل باستخدام صيغتي *Trapèze* و *Simpson* المعممتين من أجل $n = 6$ ، أيّ الصيغ اقرب لتقريب التكامل.

التمرين الثاني:

1- أوجد قيمة m لتقريب قيمة التكامل: $\int_2^3 \sqrt{1+x}\,dx$

بالدقة: $e = 0{,}6.10^{-3}$ $(R \leq 0{,}5.10^{-3})$

التمرين الثالث:

1- قرب قيم التكاملات التالية باستخدام صيغتي *Trapèze* و *Simpson*.

2- أحسب التكاملات التالية من أحل $n = 4$ باستخدام صيغتي أشباه المنحرف المعممة لـ *Trapèze* و *Simpson*

$$\int_2^4 \frac{dx}{\ln x}\,;\ \int_1^2 \sin x^2\,dx\,;\ \int_5^6 e^{\cos x}dx;\ \int_1^3 \frac{e^x}{x}dx;\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\frac{1}{4}sin^2x}\ dx$$

التمرين الرابع:

قرب التكامل التالي باستخدام صيغ Newton-Cotes التكاملية $n = 3$ ، $n = 2$ ، $n = 1$ ،

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}dx$$

التمرين الخامس:

ليكن التكامل التالي:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

1- نستبدل في I $f(x)$ بـ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ، بين أن $I \approx I_1 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2- فسر هذه النتيجة هندسيا.

3- نضع: $x_i = x_0 + ih$ حيث: $i = \overline{0,n}$، باستخدام السؤال الأول أوجد عبارة لـ :

$$I_n = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx$$

4- باستخدام I_3 أحسب $\int_0^1 xe^{-x}dx$

المراجع العلمية

المراجع العربية

1. التحليل العددي، د. نصر الدين عيد، لطلاب السنة الثالثة رياضيات، منشورات جامعة حلب)، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية، 2011.

2. التحليل العددي، سلسلة ملخصات شوم، فرانسيس رشيد، دار ماكجر و هيل للنشر، 1968.

3. التحليل العددي (1)، د. هاشم عبد اللي، لطلاب السنة الثانية-احصاء رياضي، منشورات جامعة حلب، 2004.

4. التحليل العددي، د. محمد غشيم، لطلاب السنة الثانية-كلية الهندسة المعلوماتية، منشورات جامعة حلب، 2003.

5. التحليل العددي (2)، د. محي الدين البعلي، د. محمد صبح، د.علي جمال الدين، لطلاب السنة الرابعة معلوماتية-كلية العلوم، منشورات جامعة دمشق، 1995.

6. التحليل العددي، م. علي جاسم محمد علي، م. سعد نافع ابراهيم، م.م. رغد عبد الله كاظم، م.م. لقاء عبد الكريم حسين، م.م. زينب حميد احمد، مادة الرياضيات - للمرحلة الثانية، الجامعة المستنصرية، 2004.

المراجع الأجنبية

7. Cours d'Analyse numérique, Raphaèle Herbin, Licence de mathématiques, Université Aix Marseille, 2021.

8. Méthodes numériques « Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique », Guillaume Legendre, Dauphine Université Paris, 2014.

9. Analyse Numérique, Cours de Takéo Takahashi, Michel Pierre et Antoine Henrot, Cours électif CE33 Semestre S7, Ecole des mines de Nancy, 2014.

10. Méthodes numériques appliquées, M. Boumahrat et A. Bourdin, Edition OPU, 1983.

11. Applied numerical analysis, F.G. Curtis and P.O.Wheatdey, Addison-Wesly publishing Company, 1994.