وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي- تبسة-

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

مطبوعة بيداغوجية

التحليل العددي 2 (دروس)

لطلبة السنة الثانية ليسانس رياضيات

من إعداد:

د. قصري أحلام

أستاذ محاضر قسم أ

قسم الرياضيات

السنة الجامعية: 2023- 2024

فهرس المحتويات

العنوان		الصفحة
فهرس المحتويات		I
المقدمة		أ
الفصل الأول: حل جمل المعادلات الخطية		
.1	شرح مبدأ طرق الحل	2
.2	الطرق المباشرة	2
الفصل الثاني: حساب القيم الذاتية و الأشعة الذاتية		
.1	مفاهيم أساسية	40
.2	الطرق الحسابية لحساب القيم الذاتية	44
الفصل الثالث: حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى		
.1	عموميات	57
.2	الطرق العددية لحل مسالة تفاضلية بشروط ابتدائية وحدية	62
الفصل الرابع: حل جملة المعادلات غير الخطية		
.1	تعاريف	84
.2	الطرق العددية لحل الجمل الخطية	85
قائمة المراجع		103

المقدمـــة

التحليل العددي هو فرع من فروع الرياضيات، ويعتبر دراسة هذا الفرع أمراً بالغ الأهمية نظراً للدور الهام الذي يلعبه في حل مشاكل كثيرة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية. يهتم التحليل العددي بدراسة الطرق والخوارزميات التي تمكن من حل المسائل الرياضية بشكل تقريبي، ويستخدم في ذلك طرق عددية لحل المسائل المعقدة التي لا يمكن حلها بالطرق التقليدية. ومن خلال استخدام هذه الطرق العددية قد تنشأ أخطاء يتم دراستها لاحقا في كل فصل.

وبناءً على ذلك، قمت بإعداد هذه المطبوعة بهدف تقديم جميع التعريفات الأساسية المتعلقة بالتحليل العددي، بدءًا من تعريفه والهدف من دراسته، ومناقشة مزاياه وعيوبه على غرار الطريقة التحليلية. تم إعداد هذه المطبوعة وفقًا لمنهاج التحليل العددي 2 لطلاب السنة الثانية في قسم الرياضيات في طور الليسانس. ولم أرغب في التعمق في مواضيعها لتصبح مخصصة للمتخصصين فقط، بل أردت أن تكون شرحًا مبسطًا مع العديد من الأمثلة التطبيقية التي تسهل على الطالب فهم المادة وتزيد من اهتمامه بها ولا تثير ضده.

و قد تضمنت هذه المطبوعة أربعة فصول متنوعة ومختلفة يمكن أن نعرضها كمايلي:

الفصل الأول: ويتضمن حل جمل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة، نذكر منها طريقة كرامر، غوص، غوص جوردان، طريقة التحليل، والطرق غير المباشرة ونذر منها، طريقة جاكوبي، غوص سايدل، وطريقة الاسترخاء.

الفصل الثاني: وقد تضمن مختلف الطرق العددية لحساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية بالطرق المباشرة، والطرق العددية التكرارية لحساب القيم الذاتية ونذكر منها، طريقة جاكوبي، والطريقة المركبة من قسمين وهي طريقة جيفنز–هاوس هولدر.

الفصل الثالث: وقد تضمن الطرق العددية المختلفة لحل المسائل التفاضلية ذات المرتبة الأولى وبشروط حدية، ونكر منها طريقة أولر، طرق تايلر من رتب مختلفة، طرق رانج كيتا من رتب مختلفة أيضا.

الفصل الرابع: وقد تضمن مجمل الطرق العددية لمسألة حل جمل المعدلات غير الخطية، بدءا بتعاريف جد مهمة في السياق، وبعدها نتعرض لطريقة النقطة الثابتة، طرق نيوتن التكرارية و المختلفة للبحث عن متتالية الحلول التقريبية.

و قد تم تدعيم كل الفصول بعدد معتبر من الأمثلة العددية والتي تزيد من أهمية ما قدم في هذه المطبوعة، وذلك حتى يتسنى للطالب الفهم الجيد لمختلف الطرق.

إن التحليل العددي هو موضوع مهم جدا لمختلف المجالات العلمية، وهو ضروري لجميع الفروع العلمية خاصة الفروع التطبيقية. يعتبر استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية واستخدام لغات البرمجة المتعددة أمرا مهما. وفي هذا النسق تم حل العديد من الأمثلة العددية المختلفة والتي تزيد من أهمية ما قدم في هذه المطبوعة، وذلك حتى يتسنى للطالب الفهم الجيد لمختلف الطرق. وتدريبه على حل تمارين متنوعة، وهذا يساعدهم على التحضير لمواجهة التحديات العملية والبحثية في المستقبل.

أثناء وضعي لهذه المطبوعة، يجب أن أشير إلى أنني استفدت كثيرًا من تجربتي التدريسية في هذا الموضوع، بالإضافة إلى ما وجدته في بعض الكتب العربية والأجنبية لإثراء محتواها. آمل أنني نجحت في تحقيق الهدف المنشود من إعداد هذه المطبوعة، وأتمنى أن تحظى بقبولها في الوسط الجامعي لتصبح مرجعًا يثري مكتباتنا الجامعية.

أختتم بتقديم شكري وامتناني للدكتور أوصيف تقي الدين، أستاذ محاضر بجامعة أم البواقي، والدكتور نابتي عبد الرزاق، أستاذ محاضر بجامعة تبسة، على مراجعتهما وتقييمهما للمحتوى العلمي واللغوي.

آمل أنني قد وفقت في هذا العمل.

د. قصري أحلام، قسم الرياضيات ، جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي- تبسة-

الفصل الأول

حل جمل المعادلات الخطية

تمهيد

إن جملة المعادلات الخطية الموافقة لعدد من المسائل في العلوم التطبيقية والهندسية وكذلك في العلوم الاجتماعية والعلوم الاقتصادية، تعطى كماهو معلوم بشكل عام بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$AX = B \qquad (1.1)$$

في هذا الفصل سيتم دراسة جمل المعادلات ذات الشكل العام (1.1) وهو نظام n معدلات ذات n مجهول $i = \overline{1,n}; x_i$، ويكتب على الشكل:

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + a_{1\,3}x_3 + \cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + a_{2\,3}x_3 + \cdots + a_{2\,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + a_{n\,3}x_3 + \cdots + a_{n\,n}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.2)$$

من أجل $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مجهول، تكون الثوابت a_{ij}, b_i معلومة، حيث: $i, j = 1,2, \dots, n$

هناك طرق جبرية مباشرة لحل هذه المجموعة من المعادلات، مثل كرامر، وغيرها من الطرق المباشرة التي تستخدم مقلوب المصفوفات في الحل. وهذه الطرق عادة تكون طويلة ولذلك تم إدخال طرق أخرى للحل مثل طريقة غوص، غوص جوردان، التحليل، وهي طرق لا تحتاج لتكرارات لإيجاد الحل لذلك فهي تسمى بالطرق العددية المباشرة. وهناك طرق تقريبية عددية غير مباشرة والتي تحتاج لتكرارات عديدة للوصول إلى الحل التقريبي، ونذكر منها طريقة جاكوبي، غوص سايدل وطريقة الاسترخاء.

1. شرح مبدأ طرق الحل

باختصار نكتب و $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; /= \overline{1,n}$ أو على شكل مصفوفلتي كمايلي:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \dots a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{23} \dots a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} \dots a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \dots a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{23} \dots a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} \dots a_{n\,n} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

إذا كان $detA \neq 0$ فإن المصفوفة A تكون قابلة للعكس و عندئذ يوجد حل وحيد $X = A^{-1}B$

ومن أجل البحث عن الحل X نتطرق إلى عدة طرق المباشرة منها و الغير مباشرة.

2. الطرق المباشرة

1.2 الطريقة المباشرة (باستخدام مقلوب مصفوفة)

لدينا: $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

إذا نحسب مقلوب المصفوفة A^{-1} ومن أبسط الطرق، الطريقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} A^t / A_{i\,j} = (-1)^{i+j} D_{i\,j}; det\ A \neq 0 \qquad (1.5)$$

ثم نضرب مقلوب المصفوفة في الشعاع B لنجد شعاع الحل الدقيق والوحيد X.

مثال 1.1

حل باستخدام الطريقة المباشرة جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases} 3_{x_1} - 4_{x_2} + 4_{x_3} = 7 \\ 5_{x_1} - 3_{x_2} + 4_{x_3} = 11 \\ x_1 - 2_{x_2} + 2_{x_3} = 3 \end{cases}$$

الحل:

لدينا الشكل المصفوفاتي التالي:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 4\\ 5 & -3 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 3\end{pmatrix} : \text{أي} \begin{pmatrix}3 & -4 & 4\\ 5 & -3 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 3\end{pmatrix}$$

بعد حساب A^{-1} بأي طريقة نجد:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ -6 & 2 & 8\\ -7 & 2 & 11\end{pmatrix} \Rightarrow X=A^{-1}B \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

حيث:

$$A^{-1}=\frac{1}{det\ A}A^t/A_{i\,j}=(-1)^{i+j}D_{i\,j}; det\ A\neq 0$$

2.2 طريقة كرامر

نحسب الشعاع X ، كل قيمة حدا بالطرقة التالية: /

$$x_i=\frac{\Delta_i}{det\ A}\ ; i=\overline{1,n} \qquad (1.6)$$

Δ_i المحدد الناتج عن تعويض العمود i بالمتجه B

أي أن طريقة كرامر تعطي مركبات شعاع الحل الدقيق و الوحيد X كمايلي:

$$x_i=\frac{1}{det\ A}det\begin{vmatrix}a_{1\,1} & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} \dots\dots & a_{1\,n}\\ a_{2\,1} & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} \dots\dots & a_{2\,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n\,1} & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} \dots\dots & a_{n\,n}\end{vmatrix} \qquad (1.7)$$

- عدد العمليات المنجزة لطريقة كرامر هو : $(n+1)^2n!-1$عملية .
- نلاحظ أنه إذا كان $n\geq 10^3$ استحالة حل هذه الجملة بطريقة كرامر.
- لحساب كذلك A^{-1}(في حالة A قابلة للعكس)فان عدد العمليات المنجزة لإيجاد الحل X هو $n!\,(n^2+n+1)+3n^2-n$ عملية و تكون مستحيلة إذا كان $n\geq 10^2$ بالرغم من أن الحاسوب يقوم ب 10^9 عملية خلال الثانية الواحدة.
- و لهذا في هذه الدروسنقوم بحل هذه الجمل بالطرق المباشرة إذا كان $n\leq 100$ و لذلك نلجأ الى الطرق التكرارية لإيجاد حل تقريبي تقريبا جيدا للحل الدقيق.

مثال2.1

الحل بطريقة كرامر للمثال السابق

$$det\ A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 11 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{det\ A}\ .\Delta_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 5 & 11 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{det\ A}.\Delta_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 5 & -3 & 11 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \mathrm{x}_3 = \frac{1}{\det \mathrm{A}}, \Delta_3 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

و هو نفس شعاع الحل الدقيق للجملة السابقة في كلتا الطريقتين.

3.2 طريقة غوص

لتكن لدينا الجملة السابقة $AX = B$ حيث A مصفوفة كيفية وتحقق مايلي:

$a_{11} \neq 0$ و $det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ و $det\ A \neq 0$.

تعتمد طريقة غوص على تحويل الجملة$AX = B$ إلى جملة مكافئة لها هي $A'X = B'$ حيث A'

مصفوفة مثلثية علوية.'

1.3.2 شرح الطريقة

تعتمد هذه الطريقة على$(n-1)$ خطوة أو مرحلة، لتكن الجملة (1.4) معطاة بالشكل التالي:

$$\tilde{A} = [A, B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} \dots \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots & a_{nn} & & b_n \end{array}\right) \qquad (1.8)$$

وتسمى $\tilde{A}$ بالمصفوفة الموسعة

أ. المرحلة الأولى($K = 1$)

من أجل: $k = \overline{1, n-1}$

تعتمد هذه المرحلة على إعدام معاملات الشعاع x_1 حيث $a_{11} \neq 0$ أي:

$a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = a_{41}^{(1)} = \cdots = a_{n1}^{(1)} = 0$ اعتمادا على الخوارزمية التالية :

$$L_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} L_1 \sim L_j^{(1)}; j = \overline{2, n} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2^{(1)} \sim L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ L_3^{(1)} \sim L_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \sim L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{cases} \qquad (1.9)$$

بعد نهاية المرحلة الأولى نحصل على المصفوفة(1.10) التالية:

$$\widetilde{A^{(1)}} = \left[A^{(1)}, B^{(1)}\right] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \qquad (1.10)$$

حيث:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \;\; ; \;\; \begin{cases} i = \overline{2, n} \\ j = \overline{2, n} \end{cases}$$

ب. المرحلة الثانية $(K = 2)$

و تعتمد هذه الخطوة على تحويل العناصر أسفل القطر بالعمود الثاني إلي أصفار أي :

$$a_{32}^{(2)} = a_{42}^{(2)} = a_{52}^{(2)} = \cdots = a_{n2}^{(2)} = 0 \quad ; \quad a_{22}^{(1)} \neq 0$$

تعتمد هذه المرحلة على إعدام معاملات الشعاع x_2 حيث $a_{22} \neq 0$

$$L_j^{(1)} - \frac{a_{j2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2^{(1)} \sim L_j^{(2)} \quad ; \quad j = \overline{3,n} \Leftrightarrow \begin{cases} L_3^{(2)} \sim L_3^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2 \\ L_4^{(2)} \sim L_4^{(1)} - \dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2 \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \sim L_n^{(1)} - \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2 \end{cases} \qquad (1.11)$$

و بعد نهاية المرحلة الثانية نحصل على المصفوفة (1.12) التالية:

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[A^{(2)}, B^{(2)}\right] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots\dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots\dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right) \qquad (1.12)$$

حيث:
$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j} \quad ; \quad \begin{cases} i = \overline{3,n} \\ j = \overline{3,n} \end{cases}$$

و نبقى بنفس الطريقة حتى نصل إلى الخطوة الأخيرة ذات الرتبة$(n-1)$

ج. المرحلة الأخيرة $(K = n-1)$

و تعتمد على تحويل و إعدام معاملات الشعاع x_{n-1} و بنفس المبدأ السابق، فنتحصل على المصفوفة المثلثية العلوية$\tilde{A}^{(n-1)}$ كمايلي:

$$\tilde{A}^{(n-1)} = \left[A^{(n-1)}, B^{(n-1)}\right]$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \dots\dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \dots\dots & a_{4n}^{(3)} & b_4^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(4)} \dots\dots & a_{5n}^{(4)} & b_5^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right) \qquad (1.13)$$

وفي المرحلة الأخيرة نحل الجملة(1.9) بالخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \\ \vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left[b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right] \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}\, x_j\right] \end{cases} \qquad (1.14)$$

ملاحظة:

نلاحظ أنه في كل مرحلة تحويل نعتمد على أن$(a_{kk} \neq 0)$ ولذلك و في حالة ما إذا كان $\left(a_{kk}^{(k-1)} = 0\right)$ و $\left(a_{jk}^{(k-1)} \neq 0\right)$ حيث $j > k$، في هذه الحالة نقوم بتبديل السطرين k وj في الجملة كل في مكان الآخر.

مثال3.1

حل الجملة التالية بطريقة **غوص**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

الحل

المرحلة الأولى $(K = 1)$

نلاحظ أن: $a_{11} = 2 \neq 0$

$$[A, B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

بأجراء التحويلات التالية لغوص لإعدام الشعاع العمودي الأول، على السطرين الثاني والثالث كمايلي:

$$\begin{cases} L_2^{(1)} \to L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} \to L_3 + L_1 \end{cases}$$

نجد $[A, B]^{(1)}$ كالتالي:

$$[A, B]^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

المرحلة الثانية $(K = 2)$

نلاحظ أن: $a_{22} = -2 \neq 0$

بأجراء التحويلات التالية لغوص لإعدام الشعاع العمودي الثاني، على السطر الثالث كما يلي:

$$L_3^{(2)} \to L_3^{(1)} + 3L_2^{(1)}$$

نجد $[A, B]^{(2)}$ كمايلي :

$$[A, B]^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

ومنه نجد من الشكل المصفوفي السابق الشكل الخطي التالي:

$$\begin{cases} -5x_3 = 5 \\ -2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-1}{2} \\ x_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 حساب عدد العمليات الكلية لحل الجملة الخطية بطريقة غوص

أ. خلال المرحلة (i)

$$\left.\begin{array}{rl} \text{القسمة} & \leftarrow (n-i) \\ \text{الضرب} & \leftarrow (n-i)^2 + (n-i) \\ \text{الجمع} & \leftarrow (n-i)^2 + (n-i) \end{array}\right\}$$

ب. خلال جميع المراحل أي: $1 \leq i \leq n$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{القسمة} & \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{الضرب} & \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n^2-1)}{3} \\ \text{الجمع} & \leftarrow \frac{n(n^2-1)}{3} \end{array}\right\}$$

إذا العمليات المنجزة هي:

$$\frac{2n^3}{3} + \frac{\mathrm{n}^2}{2} - \frac{7\mathrm{n}}{6}$$

3.3.2 حساب عدد العمليات المنجزة لحل الجملة المثلثية العلوية

$$\left.\begin{array}{rl} \text{القسمة} & \leftarrow 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(i) = 1 + (n-1) = n \\ \text{الضرب} & \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{الجمع} & \leftarrow \sum_{i=}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \end{array}\right\}$$

إذا عمليات الجملة العلوية للحل هو n^2

نجد العمليات الكلية هي:

$$\frac{2n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{6}=\frac{4n^3+9n^2-7n}{6}$$

4.3.2 حساب مقلوب مصفوفة بطريقة غوص

لدينا $I=AA^{-1}$ أي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

أي:

$$AX_1=E_1\ ;\ AX_2=E_2\ ;\ AX_3=E_3$$

أي لدينا ثلاثة نظم ذات نفس المصفوفة A والطرف الثاني مختلف أي:

$$(A/I)=(A/E_1/E_2/E_3)$$

إذا المصفوفة الموسعة هي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a & b & c \\ 0 & 0 & a_{33} & d & e & f \end{array}\right) \qquad (1.16)$$

نجد:

نحصل على العمود الأول X_1 $\quad UX_1=E_1'$

نحصل على العمود الثاني X_2 $\quad UX_2=E_2'$

نحصل على العمود الأول X_3 $\quad UX_3=E_3'$

مثال 4.1

طبق طريقة غوص لحساب مقلوب المصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل

***. التحويل إلى النظام المثلثي** $a_{11} = 4 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2^{(1)} \rightsquigarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$$

$$L_3^{(2)} \rightsquigarrow L^{(1)}{}_3 - \frac{1}{2}L^{(1)}{}_2 \Rightarrow [A/I]^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & {}^1/_2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 4 & 2 & -{}^1/_4 & -{}^1/_{12} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & & & \uparrow \\ & & & \uparrow & \uparrow & E_3' \\ & & & E_1' & E_2' & \end{array}\right)$$

****. الحل بطريقة الصعود**

العمود الأول X_1

$$UX_1 = E_1' \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{21}{64};\quad y_1 = \frac{5}{32};\quad z_1 = \frac{-1}{16}$$

العمود الثاني X_2

$$UX_2 = E_2' \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_2 = \frac{5}{32};\quad y_2 = \frac{5}{16};\quad z_2 = \frac{-1}{8}$$

العمود الثالث X_3

$$UX_3 = E_3' \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_3 = \frac{-1}{16};\quad y_3 = \frac{-1}{8};\quad z_3 = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21}{64} & \frac{5}{32} & \frac{-1}{16} \\ \frac{5}{32} & \frac{5}{16} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

عدد العمليات الحسابية من اجل حساب A^{-1} بطريقة غوص هو: $\frac{n(4n^2-1)}{3}$

4.2 طريقة غوص جوردان

تقوم طريقة **غوص جوردان** على تحويل المصفوفة $AX = B$ حيث A إلى جملة مكافئة لها $A'X = B'$ حيث A' هي مصفوفة قطرية أو مصفوفة الوحدة.

ملاحظة

في حالة ما إذا أردنا تحويل المصفوفةA إلى مصفوفة الوحدة I نقوم دائما بقسمة كل سطر على المرتكز الخاص به حيث $(a_{ii} \neq 0)$ من الأول، أما إذا أردنا الحصول القطرية فلا نقوم بعملية القسمة على مرحلة كمايلي:

المرتكزات، وتعتمد كما في طريقة غوص على A

المرحلة الأولى $(k = 1)$

تعتمد على تعويضa_{11} للمصفوفة A بالعدد 1 وذلك بقسمة السطر الأول على المرتكز$0 \neq a_{11}$

كمايلي:

$$L_1(\frac{1}{a_{11}}) \rightsquigarrow L_1^{(1)}$$

ثم نعدم جميع معاملات الشعاع x_1 بطريقة غوص أي:

$$L_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}}E_1 \rightsquigarrow L_j^{(1)};\quad j = \overline{2,n}$$

فنحصل على:

$$\tilde{A}^{(1)} = \left[A^{(1)}, B^{(1)}\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots\dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots\dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \qquad (1.17)$$

حيث: $\begin{cases} i = \overline{2,n} \\ j = \overline{1,n} \end{cases} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$

ونبقى بنفس الطريقة في جميع المراحل المتبقية وذلك حسب رتبة المصفوفة لنحصل في المرحلة الأخيرة وبعد إتباع مراحل غوص في إعدام جميع عناصر الأشعة x_i $(i = \overline{1,n})$، عدا العناصر الموجودة في القطر المرتكزات a_{ii} لنحصل على مايلي:

$$\tilde{A}^{(n-1)} = \left[A^{(n-1)}, B^{(n-1)}\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 \dots\dots & 0 & & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(2)} \\ 0 & & 1 & 0 & \vdots \\ & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \end{array}\right) \qquad (1.18)$$

أما في حالة عدم القسمة على المرتكزات a_{ii} فإننا نحصل على:

$$\tilde{A}^{(n-1)} = \left[A^{(n-1)}, B^{(n-1)}\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 \dots\dots & 0 & & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & & 0 & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right) \qquad (1.19)$$

ومنه ومن الجملة (1.18) نحصل على قيم الشعاع X كمايلي:

$$x_i = b_i^{(n)} \qquad (1.20)$$

ومنه ومن الجملة (1.19) نحصل على قيم الشعاع X كمايلي:

$$x_i = \frac{b_i^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \qquad (1.21)$$

أما مجموع كل العمليات لحل الجملة الخطية وإيجاد قيم الشعاع X كمايلي:

$$J = \frac{1}{2}(2n^2 + n - 1)$$

1.4.2 مقارنة عدد العمليات في الطرق المدروسة

n	كرامر	غوص	غوص جوردان
2	11	9	9
3	59	28	30
5	1949	115	135
10	10^8	805	1045
20	10^{30}	5910	8190

ملاحظة:

1. طريقة **كرامر** تتطلب الكثير من العمليات فهي لا تستعمل عن $n > 5$.

2. عندما يكون n صغير، فإن طريقتي **غوص** و**غوص جوردان** متقاربتين والأسرع هي طريقة **غوص**.

2.4.2 حساب A^{-1} بطريقة غوص جوردان

لدينا $AA^{-1} = I$ ومنه المصفوفة الموسعة $(A/I) \rightsquigarrow (I/A^{-1})$

إذا نحسب A^{-1} كمايلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}{}' & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.22)$$

$$detA = (PP_1)(PP_2)(PP_3)(-1)^{p_1} \qquad (1.23)$$

مثال5.1

أحسب A^{-1} و $detA$ بطريقة **غوص جوردان** للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

الحل

***. حساب A^{-1} بطريقة غوص جوردان**

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \ |a_{mk}| = Max|a_{ik}| = 3$$

إذا نستبدل السطرين الأول والثالث كل في مكان الآخر، نحصل على:

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 14 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; pp_1 = 3$$

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & {}^{8}/_{3} & {}^{14}/_{3} \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{8}/_{3} & {}^{14}/_{3} \\ 0 & {}^{-1}/_{3} & {}^{-4}/_{3} \\ 0 & {}^{-10}/_{3} & {}^{-16}/_{3} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{3} \\ 0 & 1 & {}^{-2}/_{3} \\ 1 & 0 & {}^{-2}/_{3} \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن: $Max|a_{ik}| = \left|\frac{-10}{3}\right| = \frac{10}{3}$ ومنه تصبح (A/I) كمايلي:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & {}^{8}/_{3} & {}^{14}/_{3} & 0 & 0 & {}^{1}/_{3}\\ 0 & {}^{-10}/_{3} & {}^{-16}/_{3} & 1 & 0 & {}^{-2}/_{3}\\ 0 & {}^{-1}/_{3} & {}^{-4}/_{3} & 0 & 1 & {}^{-2}/_{3}\end{array}\right);\quad pp_2=\frac{-10}{3}$$

$$\Rightarrow (A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & {}^{8}/_{3} & {}^{14}/_{3} & 0 & 0 & {}^{1}/_{3}\\ 0 & 1 & {}^{8}/_{5} & {}^{-3}/_{10} & 0 & {}^{1}/_{5}\\ 0 & {}^{-1}/_{3} & {}^{-4}/_{5} & 0 & 1 & {}^{-2}/_{3}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & {}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} & 0 & {}^{-1}/_{5}\\ 0 & 1 & {}^{8}/_{5} & {}^{-3}/_{10} & 0 & {}^{1}/_{5}\\ 0 & 0 & {}^{-4}/_{5} & {}^{-1}/_{10} & 1 & {}^{-3}/_{5}\end{array}\right);\ pp_3=\frac{-4}{5}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & {}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} & 0 & {}^{-1}/_{5}\\ 0 & 1 & {}^{8}/_{5} & {}^{-3}/_{10} & 0 & {}^{1}/_{5}\\ 0 & 0 & 1 & {}^{1}/_{8} & {}^{-5}/_{4} & {}^{3}/_{4}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & {}^{3}/_{4} & {}^{1}/_{2} & {}^{-1}/_{2}\\ 0 & 1 & 0 & {}^{-1}/_{2} & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & {}^{1}/_{8} & {}^{-5}/_{4} & {}^{3}/_{4}\end{array}\right)$$

ومنه:

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}{}^{3}/_{4} & {}^{1}/_{2} & {}^{-1}/_{2}\\ {}^{-1}/_{2} & 2 & -1\\ {}^{1}/_{8} & {}^{-5}/_{4} & {}^{3}/_{4}\end{pmatrix}$$

****. حساب $detA$ بطريقة غوص جوردون**

$$detA = (-1)^p (pp_1)(pp_2)(pp_3) = (-1)^2 . 3. \left(-10/3\right)\left(-4/5\right) = 8$$

حيث p عدد مرات تبديل الأسطر أو الأعمدة للمصفوفة A .

5.2 طريقة الفك المثلثي (طريقة التحليل$A = LU$)

لدينا: $AX = B$ و $LU = A$ حيث:

L مصفوفة مثلثية سفلية

U مصفوفة مثلثية علوية

تعتمد هذه الطريقة على مرحلتين:

1. تكوين المصفوفتين U و L
2. حل النظام $LY = B$ بطريقة النزول
3. حل النظام $UX = B$ بطريقة النزول .

أ. حساب المصفوفتينU وL للمصفوفة $A = LU$

مثال تطبيقي

لدينا المصفوفة التالية ذات الرتبة الثالثة والمعرفة كمايلي:

$$A = LU \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

حيث:

$$\begin{cases} l_{\text{ik}} = 0; si\ k > i \\ u_{kj} = 0; si\ k > j \\ a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \end{cases}$$

ب. دراسة خوارزمية الجهة المثلثية العليا للمصفوفة A

لدينا: $a_{rj}\,;\quad j \geq r\,,\quad \left(r = \overline{1,n};\ j = \overline{r,n}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk}u_{kj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj} + l_{rr}u_{rj} \\ u_{rj} = \dfrac{a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj}}{l_{rr}} \end{cases} \qquad (1.25)$$

ج. دراسة خوارزمية الجهة المثلثية السفلى للمصفوفةA

لدينا:

$$a_{ir}\,;\quad i \geq r,\ \left(r = \overline{1,n};\ i = \overline{r,n}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{ir} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik}u_{kr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr} + l_{ir}u_{rr} \\ a_{ij}^{(1)} = \dfrac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}} \end{cases} \qquad (1.26)$$

1.5.2 طريقة Doolittle $(\boldsymbol{l_{ii} = 1})$

لدينا:

$$A = LU \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

أ. خوارزمية طريقة Doolittle

. تكوين المصفوفتين L و U

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj}\ ; & \begin{cases} r = \overline{1,n} \\ j = \overline{1,n} \end{cases} \\ l_{ir} = a_{ir} - \dfrac{\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}}; & u_{rr} \neq 0 \end{cases} \qquad (1.28)$$

. حل النظام $LY = B$ بطريقة النزول

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_i \; ; \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (1.29)$$

. حل النظام $UX = Y$ بطريقة الصعود

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \right] ; \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (1.30)$$

2.5.2 طريقة Crout $(U_{ii} = 1)$

$$A = LU \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & I_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.31)$$

ب. خوارزمية طريقة Crout

. تكوين المصفوفتين L و U

$$\begin{cases} l_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr} \; ; \quad \begin{cases} r = \overline{1,n} \\ i = \overline{r,n} \end{cases} \\ u_{rj} = \frac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} \right] ; \quad j = \overline{r+1,n} \; : \; l_{\mathrm{rr}} \neq 0 \end{cases} \qquad (1.32)$$

. حل النظام $LY = B$ بطريقة النزول

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j \right]; \qquad i = \overline{1,n} \qquad (1.33)$$

. حل النظام $UX = Y$ بطريقة الصعود

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \qquad (1.34)$$

مثال6.1

حل الجملة $AX = B$ بطريقة Crout

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الحل

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & I_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. **تكوين المصفوفتين** L و U

العمود الأول:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow l_{11} = 1:\ l_{21} = 0\ :\ \ l_{31} = 3$$

العمود الثاني:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow u_{11} = 1;\ \ l_{22} = 2;\ \ \ 3 + l_{32} = 3;\ \ l_{32} = 0$$

العمود الثالث:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ O & 2 & 0 \\ l_{31} & 0 & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow u_{13} = 1;\ \ u_{23} = 2\ ;\ \ l_{33} = 1$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. **حل النظام** $\boldsymbol{LY = B}$ **بطريقة النزول**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = 1;\ \ y_2 = \frac{1}{2}\ ;\ \ y_3 = -2 \Rightarrow Y = \left(1, \frac{1}{2}, -2\right)^t$$

. حل النظام $UX = Y$ بطريقة الصعود

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{2};\ x_2 = \frac{9}{2}\ ;\ x_3 = -2 \Rightarrow X = \left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{2}, -2\right)^t$$

ملاحظة:

1. نستطيع حساب محدد المصفوفةA اعتمادا على الطريقتين السابقتين كمايلي:

$$det\ A\ = det\ L.det\ U\ = Det\ L.1 = Det\ L \qquad (Crout)$$
$$det\ A\ = det\ L.det\ U\ = 1.Det\ U = Det\ U \qquad (Doolittle)$$

2. نستطيع حساب A^{-1} كمايلي:

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

خوارزمية A^{-1}

. تكوين المصفوفتين L و U

. حساب المصفوفة U^{-1} بطريقة الصعود.

. حساب المصفوفة L^{-1} بطريقة النزول.

6.2 طريقة الجذور التربيعية لـ cholesky

تعريف1 نقول عن المصفوفة A أنها متناظرة إذا كانت: $A = A^t$

تعريف2 نقول عن المصفوفةA أنها معرفة موجبة إذا تحقق الشرط التالي:

$$(\forall X \in IR^N; X^T AX > 0; X \neq 0) \text{ أو } \big((AX, X) > 0\big) : X \neq 0$$

تعريف 3 إذا كانت المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة فهي قابلة للعكس. وعليه فإمكاننا كتابة A على الشكل $A = LL^t$ حيث:

L هي مصفوفة مثلثية سفلية.

L^t هي مصفوفة مثلثية علوية.

مثال تطبيقي 2.1

$$A = LL^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & I_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}\,;\ l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}\ ;\ \ l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}}\ ;\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2}$$

$$l_{32} = \frac{a_{23} - l_{31}l_{21}}{l_{22}}\ \ ; l_{33} = \sqrt{a_{33} - {l_{31}}^2 - {l_{32}}^2}$$

ثم نحل الجملة بنفس الطريقة السابقة ل Crout و Doolittle أي طريقتي النزول والصعود كمايلي:

$$AX = B \Leftrightarrow LL^tX = B \Rightarrow \begin{cases} LY = B & \text{طريقة النزول} \\ L^TX = Y & \text{طريقة الصعود} \end{cases} \quad (1.36)$$

مثال 7.1

حل الجملة التالية بطريقة الجذور التربيعية، ثم أحسب $det\,A$ و A^{-1}.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 16 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}$$

الحل

. حل الجملة بطريقة الجذور التربيعية

لدينا:

$$A = LL^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & I_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l_{11} = \sqrt{4} = 2;\ l_{21} = \frac{-2}{2} = -1\ ;\ \ l_{31} = \frac{1}{2}\ ;\ l_{22} = \sqrt{9 - (-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$l_{32}=\frac{5-\left(\frac{1}{2}\right)(-1)}{2\sqrt{2}}=\frac{11}{4\sqrt{2}}\ ;l_{33}=\sqrt{16-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{4\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{383}{32}}$$

نحل الجملة بطريقة النزول $LY=B$ كمايلي:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2\sqrt{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{11}{4\sqrt{2}}&\sqrt{\frac{383}{32}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-15\end{pmatrix}\Rightarrow y_1=\frac{3}{2};\ y_2=\frac{-11}{4\sqrt{2}}\ ;\ y_3=-\sqrt{\frac{383}{32}}$$

$$Y=\left(\frac{3}{2},\frac{-11}{4\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{383}{32}}\right)^t$$

نحل الجملة بطريقة الصعود $L^tX=Y$ كمايلي:

$$\begin{pmatrix}2&-1&\frac{1}{2}\\0&2\sqrt{2}&\frac{11}{4\sqrt{2}}\\0&0&\sqrt{\frac{383}{32}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{-11}{4\sqrt{2}}\\-\sqrt{\frac{383}{32}}\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=1;\ x_2=0\ ;\ x_3=-1$$

$$\Rightarrow X=(1,0,-1)^t$$

. حساب $detA$ و A^{-1}

$$detA=\ l_{11}^2l_{22}^2\ l_{33}^2=(2^2)\left(2\sqrt{2}^2\right)\left(\sqrt{\frac{383}{32}}^2\right)=383\neq0$$

$$A^{-1}=(LL^t)^{-1}=(L^t)^{-1}L^{-1}=(L^{-1})^tL^{-1}$$

. حساب L^{-1}

لدينا: $$LL^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2\sqrt{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{11}{4\sqrt{2}}&\sqrt{\frac{383}{32}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\b&d&0\\c&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-19}{4\sqrt{766}} & \frac{-11}{\sqrt{383}} & \sqrt{\frac{32}{383}} \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

لو ضربنا المصفوفة القطرية D للمصفوفة L بالمصفوفة L^t نجد المصفوفة العلوية المتحصل عليها بطريقة **غوص** حيث:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{383}{32}} \end{pmatrix}$$

7.2 طريقة Householder

تعتمد طريقة Householder على تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية علوية مكافئة لها وكذلك الطرف الثاني Bكمايلي:

مثال تطبيقي 3.1

رتبة المصفوفة $n = 3$

$$\left[A^{(1)}, B^{(1)}\right] \xrightarrow[\text{المرحلة(1)}]{} \left[A^{(2)}, B^{(2)}\right] \xrightarrow[\text{المرحلة(2)}]{} \left[A^{(3)}, B^{(3)}\right]$$

حيث:

$$\begin{cases} A^{(2)} = H^{(1)}A^{(1)}\ ; \quad B^{(2)} = H^{(1)}B^{(1)} \\ A^{(3)} = H^{(2)}A^{(2)}; \ B^{(3)} = H^{(2)}B^{(2)} \end{cases} \qquad (1.37)$$

حيث: $H^{(2)}$ و $H^{(1)}$ هي مصفوفات Householder وتحقق:

$$H = H^T = H^{-1}$$

حيث:

$$\begin{cases} H = I - \frac{\mathrm{WWT}}{\mathrm{r}} \\ \mathrm{W} = \mathrm{V} - \alpha \mathrm{e}_1 \\ \mathrm{r} = \alpha(\alpha - \mathrm{Ve}_1) > 0 \\ \alpha = -\mathrm{sign}(\mathrm{Ve}_1)\|\mathrm{V}\|_{\mathrm{e}} \end{cases} \quad (1.38)$$

وتحقق: $HV = \alpha e_1$

المرحلة 1

لتكن:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} & {a_{12}}^{(1)} & {a_{13}}^{(1)} \\ {a_{21}}^{(1)} & {a_{22}}^{(1)} & {a_{23}}^{(1)} \\ {a_{31}}^{(1)} & {a_{32}}^{(1)} & {a_{33}}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad V_1 = \begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} \\ {a_{21}}^{(1)} \\ {a_{31}}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -sign(a_{11})\sqrt{({a_{11}}^{(1)})^2 + ({a_{21}}^{(1)})^2 + ({a_{31}}^{(1)})^2} \\ r_1 = \alpha_1(\alpha_1 - a_{11}) > 0 \\ w_1 = v_1 - \alpha e_1 \begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} \\ {a_{21}}^{(1)} \\ {a_{31}}^{(1)} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.39)$$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{r_1} \begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} - \alpha \\ {a_{21}}^{(1)} \\ {a_{31}}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} - \alpha & {a_{21}}^{(1)} & {a_{31}}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\left({a_{11}}^{(1)} - \alpha\right)^2}{r_1} & -\frac{a_{21}({a_{11}}^{(1)} - \alpha_1)}{r_1} & -\frac{a_{31}\left({a_{11}}^{(1)} - \alpha_1\right)}{r_1} \\ -\frac{a_{21}({a_{11}}^{1} - \alpha_1)}{r_1} & 1 - \frac{{a_{21}}^{(1)^2}}{r_1} & -\frac{a_{21}a_{31}}{r_1} \\ -\frac{a_{31}\left({a_{11}}^{(1)}\alpha_1\right)}{r_1} & -\frac{a_{21}a_{31}}{r_1} & 1 - \frac{{a_{31}}^{(1)^2}}{r_1} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

بضرب $H^1\ A^{(1)}$ نجد $A^{(2)}$ كمايلي:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & {a_{12}}^{(2)} & {a_{13}}^{(2)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & {a_{23}}^{(2)} \\ 0 & {a_{32}}^{(2)} & {a_{33}}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (1.41)$$

المرحلة 2

نحسب $H^{(2)}$ كمايلي:

لدينا

$$H^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_2 & \widetilde{H}_2 \\ 0 & \widetilde{H}_2 & \widetilde{H}_2 \end{array}\right) ;\ V_2 = \begin{pmatrix} {a_{22}}^{(2)} \\ {a_{32}}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -sing\left({a_{22}}^{(2)}\right)\sqrt{[({a_{22}}^{(2)})^2 + ({a_{32}}^{(2)})^2]} \\ r_2 = \alpha_2\left(\alpha_2 - {a_{22}}^{(2)}\right) > 0\ ; \quad w_2 = \begin{pmatrix} {a_{22}}^{(2)} - \alpha_2 \\ a_{32} \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (1.43)$$

$$\widetilde{H}^{(2)} = I_2 - \frac{W_2 {W_2}^T}{r_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{r_2}\begin{pmatrix} {a_{22}}^{(2)} - \alpha_2 \\ {a_{32}}^{(2)} \end{pmatrix}\left({a_{22}}^{(2)} - \alpha_2 \quad {a_{32}}^{(2)}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\left({a_{22}}^{(2)} - \alpha_2\right)^2}{r_2} & \dfrac{-{a_{32}}^{(2)}\left({a_{22}}^{(2)} - \alpha_2\right)}{r_2} \\ \dfrac{-{a_{32}}^{(2)}({a_{22}}^2 - \alpha_2)}{r_2} & 1 - \dfrac{\left({a_{32}}^{(2)}\right)^2}{r_2} \end{pmatrix} \qquad (1.44)$$

وتحقق:

$$\widetilde{H}^{(2)} V_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبضرب $H^{(2)}A^{(2)}$ نجد $A^{(3)}$ كمايلي:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_2 & \widetilde{H}_2 \\ 0 & \widetilde{H}_2 & \widetilde{H}_2 \end{array}\right).\begin{pmatrix} \alpha_1 & {a_{12}}^{(2)} & {a_{13}}^{(2)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & {a_{23}}^{(2)} \\ 0 & {a_{32}}^{(2)} & {a_{33}}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & {a_{12}}^{(2)} & {a_{13}}^{(2)} \\ 0 & \alpha_2 & {a_{23}}^{(2)} \\ 0 & 0 & {a_{33}}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

وبعد حساب $A^{(3)}$ نحل الجملة:

$$A^{(3)}X = H^{(2)}H^{(1)}\,B^{(1)} \qquad (1.46)$$

نجد شعاع الحل الوحيد X

ملاحظة:

طريقة Householder تعتمد على الكثير من العمليات الحسابية المنجزة، حوالي ضعف العمليات المنجزة طريقي غوص و غوص جوردون وعددها هو:

$$\frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{14}{3}n - 9$$

مثال 8.1

حل الجملة التالية بطريقة Householder

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

الحل

المرحلة الأولى

لتكن:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix};\quad V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \|V_1\| = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -sign(4)\sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2} = -5 \\ r_1 = -5(-5-4) = 45 > 0 \\ w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}(9 \quad 3 \quad 0) = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -36 & 0 & -27 \\ 0 & 45 & 0 \\ -27 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

بضرب $H^1\ A^{(1)}$ نجد $A^{(2)}$ كمايلي:

$$A^{(2)} = H^{(1)}\ A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-23}{5} & \frac{-6}{5} \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{-17}{5} \end{pmatrix};\ B^{(2)} = H^{(1)}\ B^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-89}{5} \\ 7 \\ \frac{-23}{5} \end{pmatrix}$$

المرحلة الثانية

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \frac{14}{5} & \frac{-17}{5} \end{pmatrix};\ \ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix};\ \|V_2\| = \sqrt{\frac{221}{5}}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -sign(-1)\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{221}{5}} \\ r_2 = \frac{221 + \sqrt{221}}{25} > 0 \\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{221}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{\frac{221}{5}} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_2 = I_2 - \frac{1}{r_2} w_2 {w_2}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\frac{221+\sqrt{221}}{25}}\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{\frac{221}{5}} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{\frac{221}{5}} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{221}} & \frac{14}{\sqrt{221}} \\ \frac{11}{\sqrt{221}} & \frac{5}{\sqrt{221}} \end{pmatrix} \Rightarrow H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{221}} & \frac{14}{\sqrt{221}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{221}} & \frac{5}{\sqrt{221}} \end{pmatrix}$$

ومنه نحسب$A^{(3)}$ وذلك بضرب المصفوفة $H^{(2)}A^{(2)}$ فنجد:

$$A^{(3)} = H^{(2)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{221}} & \frac{14}{\sqrt{221}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{221}} & \frac{5}{\sqrt{221}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 & \frac{-23}{5} & \frac{-6}{5} \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{-17}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-23}{5} & \frac{-6}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{221}}{5} & \frac{-313}{\sqrt{221}} \\ 0 & 0 & \frac{25}{\sqrt{221}} \end{pmatrix}; \; B^{(3)} = H^{(2)}\, B^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-89}{5} \\ \frac{-497}{\sqrt{221}} \\ \frac{75}{\sqrt{221}} \end{pmatrix}$$

3.الطرق التكرارية والعددية

تعريف 4

نقول عن مصفوفةA أنها ذات القطر السائدDFD إذا تحقق:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \quad i = \overline{1,n} \qquad (1.47)$$

وذلك في كل سطر

مثال 9.1

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} 11 > 2 + 3 = 5 \\ 7 > 1 + 2 = 3 \\ 8 > 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

ومنه A ذات قطر سائد و A^t ذات قطر سائد أيضا.

ملاحظة:

إذا كانت A ذات قطر سائد فإن A^t ليست دائما ذات قطر سائد و العكس صحيح.

1.3 مبدأ الطرق التكرارية

ليكن لدينا الجملة الخطية المعرفة بـ: $AX = B$

نختار متجه ابتدائي(شعاع الحل الابتدائي) $X^{(0)}$ حيث: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$

نخلق متتالية من المتجهات التقريبية:

$$X^{(0)} \to X^{(1)} \to X^{(2)} \to \cdots \to X^{(k)} \to \cdots$$

وتكون الطريقة متقاربة إذا كان: $\lim_{k\to+\infty} X^{(k)} = X^*$

حيث X^* هو الحل الدقيق ويحقق: $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1}B$

. تذكير

إذا كان لدينا: $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ فإن:

$$\|V\|_L = \max_{1\le i\le n}|V_i| = \|V\|_\infty ; \ \|V\|_C = \sum_{i=1}^{n}|V_i|; \|V\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|V_i|^2}$$

حيث: $X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}; \quad X^{(k-1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$

. شروط التوقف

$$\begin{cases} \left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_{\infty}=\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_{L}<\varepsilon \\ \left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_{C}\leq\varepsilon\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|\leq\varepsilon \\ \dfrac{\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_{\infty}}{\left\|X^{(k)}\right\|_{\infty}}<\varepsilon \end{cases}$$

. شروط الخطأ $E^{(k)}=\left|X^{*}-X^{(k)}\right|$

2.3 طريقة Jacobi

تعتمد هذه الطريقة على تحليل المصفوفة A على النحو التالي:

$$A=D-L-U$$

D مصفوفة قطرية ، L مصفوفة مثلثية سفلية، U مصفوفة مثلثية علوية.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};L=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -a_{n-1n} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.48)$$

لدينا:

$$AX=B\Rightarrow(D-L-U)X=B\Rightarrow DX-(L+U)X=B$$

$$\Rightarrow DX=(L+U)X+B\Rightarrow X=D^{-1}(L+U)X+D^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=TX+C\Rightarrow X^{K}=TX^{(K-1)}+C;\begin{cases} T=D^{-1}(L+U) \\ C=D^{-1}B \end{cases} \qquad (1.49)$$

أي أن:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

و نستنتج حساب الشعاع $X^{(K)}$ابتداء من الشعاع $X^{(K-1)}$ بطريقة المصفوفات (الطريقة السابقة) مع مراعاة $(a_{ii} \neq 0)$، أما إذا أردنا استخدام طريقة الجمل الخطية فإن:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{21}x_1^{(k-1)} - \cdots - a_{n-1n}x_{n-1}^{(k-1)}] \end{cases} \quad (1.51)$$

نعطي قيمة ابتدائية لـ $X^{(0)}$ ثم نعوض فنجد $X^{(1)}$ ، ثم نعوض $X^{(1)}$ فنجد $X^{(2)}$ ، وهكذا إلى غاية $X^{(k)}$

ومنه يمكن كتابة الجملة (1.51) بصفة عامة كمايلي:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - \sum_{j=2, i\neq j}^{n} a_{1j}\, x_j^{(K-1)}] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{2j}\, x_j^{(K-1)}] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{nJ}\, x_j^{(K-1)}] \end{cases} \quad (1.52)$$

. شروط التقارب

هناك شرط كافي لكن غير لازم و هو إذا كانت A مصفوفة ذات القطر السائد فإن طريقة جاكوبي متقاربة نحو X^* و ذلك مهما يكن $X^{(0)}$.

ملاحظة:

1. يمكن تحويل النظام أو الجملة الخطية حتى تصبح المصفوفةA ذات قطر سائد.

2. يمكن حساب الخطأ باستخدام العلاقة التالية :

$$\left\|X^* - X^{(K)}\right\|_L \leq \frac{\|T\|_L^{(k)}}{1-\|T\|_L}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_L \qquad (1.53)$$

مثال 10.1

أوجد الحل التقريبي$X^{(4)}$، وأحسب الخطأ الناتج للجملة التالية:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} ; \; X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل

.إيجاد متتالية الحلول التقريبية لشعاع الحل الدقيق من أجل $(k = 4)$

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة ذات قطر سائد، إذا التقارب أكيد.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left[8 - 0.24\, x_2^{(k-1)} + 0.08x_3^{(k-1)}\right] = 2 - 0.06\, x_2^{(k-1)} + 0.02\, x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{3}\left[9 - 0.09\, x_1^{(k-1)} + 0.15\, x_3^{(k-1)}\right] = 3 - 0.03\, x_1^{(k-1)} + 0.05\, x_3^{(k-1)} \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{4}\left[20 - 0.04\, x_1^{(k-1)} 0.08\, x_3^{(k-1)}\right] = 5 - 0.01\, x_1^{(k-1)} + 0.02\, x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

ويمكن الحصول على متتالية الحلول التقريبية لشعاع الحل الدقيق في الجدول التالي:

	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
x_1	0	2	1.92	1.9094	1.909228
x_2	0	3	3.19	3.1944	3.194948
x_3	0	5	5.04	5.0446	5.044794

.حساب الخطأ الناتج لحل الجملة السابقة

لدينا:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix};\ \|T\|_L = Max\,(0.08, 0.08, 0.03) = 0.08$$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};\ \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_L = 5$$

$$\left\|X^* - X^{(K)}\right\|_L \leq \frac{\|T\|_L^{(k)}}{1 - \|T\|_L}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_L = \frac{(0.08)^4}{1 - 0.08}(5) = 2.2(10)^{-4}$$

$$\Rightarrow Max\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right| = 2.2(10)^{-4}\ ;\ X^* = \begin{pmatrix} 1.909228 \pm 2.2(10)^{-4} \\ 3.194948 \pm 2.2(10)^{-4} \\ 5.044794 \pm 2.2(10)^{-4} \end{pmatrix}$$

2.3 طريقة Gauss Seidel

لدينا:

$$AX = B \Rightarrow (D - L - U)X = B \quad et\ M = D - L \Rightarrow (M - U)X = B$$

$$MX = UX + B \Rightarrow X^{(k)} = M^{-1}UX^{(k-1)} + M^{-1}B \Rightarrow X^{(k)} = TX^{(k-1)} + C$$

إذا أردنا البحث عن الحل بطريقة الجمل الخطية فإن:

$$MX^{(k)} = UX^{(k-1)} + B\ ;\ M = D - L \qquad (1.54)$$

$$MX^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1.55)$$

أما إذا أردنا الحل $X^{(k)}$ بطريقة الجمل الخطية فإننا نستخدم العلاقة التالية:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{n-1n}x_{n-1}^{(k-1)}] \end{cases} \qquad (1.56)$$

ومنه يمكن كتابة الجملة (1.56)بصفة عامة كمايلي:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - -\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{2j}x_j^{(k)} - \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} a_{2j}\, x_j{}^{(k)}] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, x_j{}^{(k)}] \end{cases} \quad ; \; a_{ii} \neq 0 \qquad i = \overline{1,n} \;\; (1.57)$$

بصفة عامة:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}]; \quad a_{ii} \neq 0; \quad i = \overline{1,n} \quad (1.58)$$

و لطريقة **Gauss Seidel** في التقارب نفس الشروط السابقة الموجودة في طريقة **Jacobi**، لكن سرعة التقارب في طريقة **Gauss Seidel** أكثر من سرعة التقارب في طريقة **Jacobi**.

مثال11.1

حل الجملة الخطية السابقة بطريقة **Gauss Seidel**

الحل

.إيجاد متتالية الحلول التقريبية لشعاع الحل الدقيق من أجل $(k = 4)$

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة ذات قطر سائد، إذا التقارب أكيد.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left[8 - 0.24\, x_2^{(k-1)} + 0.08 x_3^{(k-1)}\right] = 2 - 0.06\, x_2^{(k-1)} + 0.02\, x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{3}\left[9 - 0.09\, x_1^{(k)} + 0.15\, x_3^{(k-1)}\right] = 3 - 0.03\, x_1^{(k)} + 0.05\, x_3^{(k-1)} \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{4}\left[20 - 0.04\, x_1^{(k)} 0.08\, x_3^{(k)}\right] = 5 - 0.01\, x_1^{(k)} + 0.02\, x_2^{(k)} \end{cases}$$

ويمكن الحصول على متتالية الحلول التقريبية لشعاع الحل الدقيق في الجدول التالي:

	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
x_1	0	2	1.92	1.924218	1.909237
x_2	0	3	2.9429	3.194253	3.194954
x_3	0	5	5.0396	5.044642	5.044806

.حساب الخطأ الناتج لحل الجملة السابقة

لدينا:

$$T = M^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -0.0075 & \frac{1}{3} & 0 \\ -0.0026 & 0.0066 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -0.24 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ 0 & 0.0018 & 0.0494 \\ 0 & 0.00062 & 0.00078 \end{pmatrix};\ \|T\|_L = Max\,(0.08, 0.0512, 0.0014) = 0.08$$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};\ \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_L = 5$$

$$\left\|X^* - X^{(k)}\right\|_L \leq \frac{\|T\|_L^{(k)}}{1 - \|T\|_L} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_L = \frac{(0.08)^4}{1 - 0.08}(5) = 2.2(10)^{-4}$$

$$\Rightarrow Max\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right| = 2.2(10)^{-4}\ ;\ X^* = \begin{pmatrix} 1.909228 \pm 2.2(10)^{-4} \\ 3.194948 \pm 2.2(10)^{-4} \\ 5.044794 \pm 2.2(10)^{-4} \end{pmatrix}$$

3.2 طريقة الإسترخاء

لتكن A مصفوفة ذات الرتبة n ذات القطر $a_{ii} \neq 0$ معطاة كما يلي:

$$A = D - E - F \qquad (1.59)$$

D مصفوفة قطرية ، E مصفوفة مثلثية سفلية، F مصفوفة مثلثية علوية.

ليكن العدد Wعدد حقيقي غير معدوم (يسمى بوسيط الاسترخاء) نستنتج كتابة A كما يلي:

$$A = \frac{1}{W}D - E - \left(\left(\frac{1-W}{W}\right)D + F\right) \qquad (1.60)$$

حسب Gauss Seidel لدينا:

$$A = M - U$$

بالمطابقة نجد:

$$M = \frac{1}{W}D - E;\ U = \left(\frac{1-W}{W}\right)D + F \qquad (1.61)$$

وأيضا لدينا حسب Gauss Seidel

$$X = M^{-1}UX + M^{-1}B$$

$$\Rightarrow X^{(k)} = M^{-1}UX^{(k-1)} + M^{-1}B$$

لكن في طريقة الاسترخاء نجد: $M = D - WE;\ \ U = (1-W)D + WF$

و بعد التعويض و حسب Gauss Seidel نجد:

$$X^{(k)} = (D - WE)^{-1}[(1-W)D + WF]X^{(k-1)} + (D - WE)^{-1}B \quad (1.62)$$

$$x_i^{(k)} = (1-w)x_i^{(k-1)} + \frac{W}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}] \qquad (1.63)$$

ملاحظة

1. إذا كان $0 < W < 1$ (تحت الاسترخاء)
2. $1 < W$ (فوق الاسترخاء)
3. $W = 1$ Gauss Seidel

نظرية1

إذا كانت A مصفوفة معرفة موجبة و $0 < W \leq 2$، إذا طريقة الاسترخاء تتقارب دوما مهما كان شعاع الحل الابتدائي $X^{(0)}$.

نظرية 2

إذا كانتA مصفوفة معرفة موجبة و $S(T_j)^2 < 1$ ، حيث: $S(T_j)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة T_j

حيث:$T_j = D^{-1}(L+U)$

وبذلك فإن أفضل اختيار لـ W يعطى بالشكل:

$$W = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - S(T_j)^2}}$$

مثال12.1

حل بطريقة الاسترخاء الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases} ; \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k = 2$$

مثال13.1

1. حل بطريقتي Jacobi Gauss seidel الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 19 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 19 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases} \qquad k = 3 \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. قارن بين الطريقتين في حساب قيمة الخطأ.

الفصل الثاني

حساب القيم الذاتية و الأشعة الذاتية

تمهيد

بعدما تطرقنا في الفصل الأول للطرق المباشرة والعددية لحل جمل المعدلات الخطية، سوف نتطرق في هذا الفصل للطرق المختلفة لحساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية، منها الطرق المباشرة والمعتاد تطبيقها في الجبر الخطي، وغيرها من الطرق العددية والتقريبية للحصول غلى القيم الذاتية والتي تعد طرق طويلة نوعا ما إلا أنها تؤدي نفس الغرض لذلك. ومن أجل هذا لابد أولا أن نتطرق إلى حوصلة من المفاهيم الأساسية الجبرية والتي ستكون كأدوات ضرورية لتطبيق هذه الطرق.

1. مفاهيم أساسية

1. ليكن لدينا جملة الأشعة $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$، نقول أنها مستقلة خطيا،إذا وجدت سلميات

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ المعدوم كلها معا في وقت واحد وتحقق:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$$

. إذا لم تكن الجملة السابقة مستقلة خطيا فهي مرتبطة حتما خطيا.

2.إذا كانت جملة الأشعة $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^n$ إذا:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n;\ X = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \cdots + \beta_n V_n\ ;\ \beta_i \in \mathbb{R}\ ;\ \overline{i = 1, n}$$

والكتابة وحيدة والجملة (جملة الأشعة المستقلة خطيا) تسمى أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$.

3. نقول عن الشعاع $X \in \mathbb{R}^n$ أنه شعاعا ذاتيا، إذا كان $X \neq 0$ ويوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث:

$$AX = \lambda X$$

و تسمى λ قيمة ذاتية.

4. نقول عن المصفوفتان B و A أنهما متشابهتان و λ قيمة ذاتية لـ A مرفقة بالشعاع الذاتي X، إذا

λ قيمة ذاتية لـ B.

5. نقول عن A مصفوفة عمودية (متعامدة) إذا كان: $A^{-1} = A^t$.

6. إذا كانت A مصفوفة تناظرية إذا توجد مصفوفة P متعامدة بحيث: $P^{-1}AP = P^tAP = D$

D هي مصفوفة قطرية وقطرها مكون من القيم الذاتية لـ A .

تعريف 1.2

تكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n بمعاملات حقيقية أو مركبة و λ سلمي حقيقي أو تخيلي.

$$\exists X \in (\mathbb{C}^n), X \neq 0, AX = \lambda X$$

$A - \lambda I$ مصفوفة غير قابلة للقلب .

$$\Rightarrow det(A - \lambda Id) = 0 \qquad (2.1)$$

اذا كان λ يحقق العلاقات السابقة، نقول عن λ انه قيمة ذاتية لـ A و كل شعاع يحقق (2.1) يسمى شعاع ذاتي لـ A .

تعريف 2.2

نتحقق أن $\lambda \to det(A - \lambda Id)$ كثير حدود من الدرجة (كثير الحدود المميز لـ A) ذات المعامل لاكبر حد $(-1)^n$. و تكون القيم الذاتية عندئذ هي جذور كثير الحدود المميز.

يمكننا ان نعتبر أن الحساب العددي لقيم القيمة الذاتية هو حالة خاصة من حساب جذور معادلة كثير الحدود.

تعريف 3.2

إن صعوبة تحديد القيم الذاتية بطريقة عددية لكثير الحدود $det(A - \lambda Id)$ يجعل الخوارزميات التي تعتمد على هذه الفكرة عموما غير فعالة. في الواقع، يحدث العكس بدلا من ذلك، حيث يمكن حساب الجذور باستخدام العلاقة التالية:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (2.2)$$

باستخدام خوارزمية البحث عن القيم الذاتية للمصفوفة التالية ذات كثير الحدود المميز السابق بمعامل $(-1)^n$ لاكبر حد.

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

1. إن القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هي القيم القطرية. $det(A - \lambda Id) = \prod(a_{ii} - \lambda)$.

2. إن العديد من الخوارزميات تتبع طريقة جعل المصفوفة A الاصلية مثلثية او قطرية، من خلال بناء سلسلة من المصفوفات التي لها نفس القيم الذاتية و تتجه نحو مصفوفة مثلثية او قطرية. لذلك من المهم التذكير أن التحويل الذي يحفظ القيم الذاتية هو التشابه.

تعريف 4.2

نقول عن مصفوفتين A و B انهما متشابهتين اذا وجدت مصفوفة P حيث:

$$B = P^{-1}AP$$

نقول عن A انها قابلة للمقاطرة اذا كانت مشابهة لمصفوفة قطرية. وعليه كل مصفوفتان متشابهتان لهما نفس القيم الذاتية.

أما إذا كان $B = PAQ$ نقول في هذه الحالة أن B و A متكافئتان.

تعريف 5.2

نقول عن A انها قابلة للمقاطرة اذا و فقط اذا وجد أساس ل $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ يشكل أشعة ذاتية لـ A .

البرهان

نفرض ان $B = P^{-1}AP$ قابلة للمقاطرة. و ليكن e_i شعاع مولد لاساس في $\mathbb{R}^N$ حيث:

$$e_i = (0, \dots, 1.0, \dots, 0)$$

و ليكن λ_i ، $i = 1, \dots, n$ عناصر قطر المصفوفة B. اذا :

$$Be_i = \lambda_i . \mathrm{e}_i = P^{-1}AP\mathrm{e}_i \qquad (2.3)$$

$$\Rightarrow \lambda_i . P\mathrm{e}_i = A . P\mathrm{e}_i \qquad (2.4)$$

اذا $P\mathrm{e}_i$ هي الأشعة الذاتية لـ A. بما أن P قابلة للقلب فإنها مصفوفة عبور من أساس لأخر. نجد إذا أساسا للأشعة الذاتية و التي هي الأشعة العمودية للمصفوفة P .

مثال 1.2

أحسب القيم الذاتية والأشعة الذاتية بالطريقة المباشرة للمصفوفة A المعطاة بـ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل

. حساب القيم الذاتية

$$(A - \lambda Id) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$det|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -4-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 2$$

. حساب الأشعة الذاتية

. من أجل $AX = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$

$$AX = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 12 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ 2y = 3z \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}z$$

$$\Rightarrow V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) = \left(-2z, \frac{3}{2}z, z\right) = z\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right); z \in \mathbb{R}\right\}$$

من أجل $AX = X \Leftrightarrow \lambda_2 = 1$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 12 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) = (-4z, 0, z) = z(-4,0,1); z \in \mathbb{R}\}$$

من أجل $AX = 2X \Leftrightarrow \lambda_3 = 0$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) = \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}z$$

$$\Rightarrow V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) = (2y, y, 0) = y(2,1,0); y \in \mathbb{R}\}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. الطرق الحسابية لحساب القيم الذاتية

1.2 طريقة القوى

نعتبر المتتالية المعرفة بالشكل التالي:

$$X_{n+1} = AX_n \qquad (2.5)$$

نفرض ان A قابلة للمقاطرة، و ليكن $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, .., \mathrm{e}_n$ أساسا للاشعة الذاتية. مع $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيم ذاتية لها بالترتيب، و نكتب:

$$X_0 = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad (2.6)$$

بتحليل X_0 بالنسبة للاساس e_1 نجد:

$$X_n = \alpha_1 {\lambda_1}^n \mathrm{e}_1 + \alpha_2 {\lambda_2}^n e_2 + \cdots + \alpha_n {\lambda_n}^n e_n \qquad (2.7)$$

لنفرض الأن أن:

$$|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_{n-2}| \dots \geq |\lambda_1|$$

$$X_n = {\lambda_N}^n \left[\alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^n \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^n e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \right] \qquad (2.8)$$

بما أن من أجل كل $i < N$ ، $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^n = 0$ نجد أن من أجل كل n كبير: $X_n \sim \alpha_N {\lambda_N}^n e_N$

إذا:

- من أجل كل n كبير: X_n تعطي اتجاه للشعاع الذاتي e_n.
- إذا كان الحد j المكون لـ e_n غير معدوم فان:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(X_{n+1})_j}{(X_n)_j}$$

خوارزمية القوى التراجعية:

$$\begin{cases} X_0 \text{ اختياره يتم} \\ Y_{n+1} = AX_n \\ X_{n+1} = Y_{n+1}/\|Y_{n+1}\|_2 \\ \sigma_{n+1} = \overline{{X_n}^t} Y_{n+1} \end{cases} \qquad (2.9)$$

فرضية

نفرض ان A قابلة للمقاطرة و قيمها الذاتية تحقق:

$$|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_{n-2}| \dots \geq |\lambda_1|$$

و ليكن $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, .., \mathrm{e}_n$ أساسا للاشعة الذاتية.

مع $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيم ذاتية لها بالترتيب مع:

$$X_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \; ; \; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

و $\alpha_n \neq 0$ إذا :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n+1} = \lambda_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} X_{n+1} - \beta^n \varepsilon_n = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

حيث ε_n شعاع مرتبط خطيا مع e_n و $\beta = \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}$

2.2 طريقة هاوس هولدر–جيفانز Householder–Givens

تمكننا هذه الطريقة من البحث عن القيم الذاتية لمصفوفة تناظرية A من أهم خصائصها أنه تمكننا من البحث عن كل قيمة على حدا (حصر القيم الذاتية أي كل قيمة موجودة في أصغر مجال يحويها)، لكن هذه الطريقة لا تمكننا من حساب الأشعة الذاتية، وتنقسم هذه الطريقة إلى قسمين:

1. A مصفوفة مثلثية او تعرف مصفوفة متعامدة Ω حيث $\Omega^t A \Omega$ مصفوفة مثلثية قطرية و ذلك من خلال مجموعة من العمليات باستخدام مصفوفة تسمى بمصفوفة هاوسهولدر.
2. نقوم بحساب القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية تناظرية، و من اجل ذلك نستعمل طريقة التقسيمات المتتالية او طريقة جيفانز.

1.2.2 طريقة هاوس هولدر Householder

تعتمد هذه الطريقة على تحويل المصفوفة التناظرية A إلى مصفوفة ثلاثية القطر.

لتكن A إلى مصفوفة تناظرية ذات الرتبة n حيث: $A_1 = A$، في هذه الطريقة نحسب Ω_k في كل خطوة كمايلي:

$$\Omega_k^{\mathrm{t}} = \Omega_k^{-1} = I - 2WW^t \qquad (2.11)$$

ويعطى الشعاع W كمايلي:

$$W^t = (W_1, W_2, \dots W_{n-1}, 0)$$

ويحقق: $W^t W = 1$

ثم نحسب المصفوفة :

$$A_{k+1} = \Omega_k^{\mathrm{t}} \mathrm{A_k} \Omega_{\mathrm{k}} \qquad (2.12)$$

أين نجدّ:

$$a_{n-k+1,j}^{(k+1)} = a_{j,n-k+1}^{(k+1)} = 0; j = \overline{1, n-k+1} \qquad (2.13)$$

حتى نحصل على A_k من الشكل:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1k-1} & 0 & 0 \\ \vdots & a_{k-1,k-1} & & 0 \\ a_{k-1,1} & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \quad 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \quad a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

ومن أجل تحويل المصفوفة التناظرية A إلى مصفوفة ثلاثية القطر B ، نستخدم المراحل التالية لخوارزمية **Householder** كمايلي:

$$\begin{cases} q = \left[\sum_{j=1}^{i-2} \left(a_{i-1,j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \; ; \; i = n-k+2 \\ Si: \; a^{(k)}{}_{i-1,i-2} = 0; \begin{cases} Alors \quad S = q \\ Sinon = q \dfrac{a^{(k)}{}_{i-1,i-2}}{\left|a^{(k)}{}_{i-1,i-2}\right|} \end{cases} \\ 2r^2 = q^2 + S a^{(k)}{}_{i-1,i-2} \end{cases} \qquad (2.15)$$

حساب الشعاع V

$$\begin{cases} v_{i-2} = a^{(k)}{}_{i-1,i-2} + S \\ v_{i-1} = 0 \\ v_l = 0, \quad l = \overline{i,n} \end{cases} \qquad (2.16)$$

$$Si \; i > 3; Alors \; ; \; v_j = \; a^{(k)}{}_{i-1,j}, \overline{J = 1, i-3}$$

حساب الشعاع U

$$\begin{cases} u_j = \dfrac{1}{2r^2}\sum_{l=1}^{i-2} a^{(k)}{}_{j,l}\, v_l;\ \overline{j=1,i-1} \\ B = \sum_{j=1}^{i-2} v_j\, u_j \\ Z_j = u_j - \dfrac{B}{4r^2} v_j;\ \overline{j=1,i-1} \end{cases} \qquad (2.17)$$

حساب عناصر $A^{(k+1)}$

$$\begin{cases} a_{lj}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k)} - v_l z_j - v_j z_l \\ a_{lj}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k+1)} \\ a_{ll}^{(k+1)} = a_{ll}^{(k)} - 2v_l z_l \end{cases} ; \begin{cases} j = \overline{1,l-1} \\ l = \overline{2,i-2} \\ k = \overline{1,n-2} \end{cases} \qquad (2.18)$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(k+1)} = a_{11}^{(k)} - 2v_1 z_1 \\ a_{i-1,j}^{(k+1)} = a_{j,i-1}^{(k+1)} = 0 \\ a_{i-1,i-2}^{(k+1)} = a_{i-1,i-2}^{(k)} - 2v_{i-2} z_{i-1} \\ a_{i-1,i-2}^{(k+1)} = a_{i-2,i-1}^{(k+1)} \end{cases} ; \begin{cases} j = \overline{1,i-3} \\ k = \overline{1,n-2} \\ l = \overline{2,i-2} \end{cases} \qquad (2.19)$$

مثال2.2

طبق طريقة Householder لتحويل A إلى مصفوفة ثلاثية القطر.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 طريقة جيفانز:

تعتمد هذه الطريقة أساسا على نظريتين، الأولى نستطيع بها أن نبرهن الحدودي المميز $P_n(\lambda)$ للمصفوفة B_i يتميز بعدة ميزات هي.

لتكن:

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & c_{i-1} \\ 0 & & 0 & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix};\ 1 \le i \le n \qquad (2.20)$$

ثلاثية القطر، ثم نحاول ايجاد عدد جذوره والتي هي أصلا القيم الذاتيةن ثم نقوم بتقريب هذه القيم

نحسب أولا كثير الحدود المميز لـ B_i كل على حدا.

نقول ان $P_i(\lambda) = det\,(B_i - \lambda Id)$ هو كثير الحدود المميز لـ B_i . ان كثيرات الحدود هذه متميزة بخاصية تحقق صيغة بسيطة للتكرار ذات ثلاث حدود وتشكل ما يسمى بتتابع ستور. وتؤدي هذه الخاصية الى ترتيب الاصفار في P_i بالنسبة لP_{i-1} .

ولحساب كثير الحدود المميز نعتمد النظريتين التاليتين:

نظرية 1.2

كثيرات الحدود $P_i(\lambda)$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$، معرفة لكل $i = \overline{0,n}$ بالصيغ التالية:

$$\begin{cases} P_0(\lambda) = 1 \\ P_1(\lambda) = b_1 - \lambda \\ \vdots \\ \vdots \\ P_i(\lambda) = (b_i - \lambda)P_{i-1}(\lambda) - {c_{i-1}}^2 P_{i-2}(\lambda); 2 \le i \le n \end{cases}$$

تتبع الخاصائص التالية:

1. كثير الحدود $P_i(\lambda)$ هو كثير الحدود المميز للمصفوفةB_i ; $1 \le i \le n$

2. $\lim_{\lambda \to -\infty} P_i(\lambda) = +\infty$

3 $P_i(\lambda_0) = 0; P_{i-1}(\lambda_0)P_{i+1}(\lambda_0) < 0;\ 1 \le i \le n$.

4. كثير الحدود $P_i(\lambda)$، $d^\circ P_i(\lambda)$ جذر حقيقي مختلف.

ملاحظة:

1. كل متتالية كثير حدود تحقق الشروط 2، 3، 4 تسمى بمتتالية Sturm

2. طريقة **Givens** تعتمد على خصائص كل متتالية كثير حدود والتي تمكننا من حساب مباشر للعدد $\mu \in \mathbb{R}$ معطى وذلك حسب النظرية التالية:

نظرية 2.2

ليكن i عدد صحيح $(1 \leq i \leq n)$ وليكن $\mu \in \mathbb{R}$ عدد معطى كمايلي:

$$Sign\ P_i(\mu) = \begin{cases} Sign\ P_i(\mu); & P_i(\mu) \neq 0 \\ Sign\ P_{i-1}(\mu); & P_i(\mu) = 0 \end{cases}$$

ولتكن لدينا المجموعة $E(i,\mu)$ مرتبطة كمايلي:

$$E(i,\mu) = \{+,\ Sign\ P_1(\mu), Sign\ P_2(\mu), \dots, Sign\ P_i(\mu)\}$$

إذا عدد التغير في الاشارة لعناصر المجموعة $E(i,\mu)$، نرمز له بالرمز $N(i,\mu)$، وهو عدد جذور كثير الحدود P_i والتي تكون أقل من العدد μ، أما العدد $M(i,\mu)$ هو عدد الأزواج المتتابعة التي لها نفس الإشارة $\{-,-\},\{+,+\}$، وهو عدد الجذور التي تكون أكبر من أو يساوي العدد μ حيث:

$$(M(i,\mu) + N(i,\mu) = i)$$

*إذا أردنا تقريب القيمة الذاتية من الرتبة i للمصفوفة B_i فإننا نبدأ بوضع مجال $[a_0, b_0]$ حيث تكون $\lambda_i \in [a_0, b_0]$، إذا:

$$a_0 = -b_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|b_1\|$$

ثم نحسب c_0 منتصف المجال $[a_0, b_0]$ ثم العدد $N(n, c_0)$ كمايلي:

$$\begin{cases} N(n,c_0) \geq i \Rightarrow \lambda_i \in [a_0, c_0[\\ N(n,c_0) < i \Rightarrow \lambda_i \in [c_0, b_0] \end{cases}$$

إذا نتحصل على المجال $[a_1, b_1]$، نصف طول المجال $[a_0, b_0]$ ويحوي هو أيضا القيمة الذاتية λ_i ونواصل وبنفس الطريقة، حيث نستطيع حصر القيمة الذاتية λ_i في مجال أصغر فأصغر تدريجيا يحوي λ_i

مثال 3.2

إحصر القيمة الذاتية λ_3 بطريقة Givens للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل

. حساب كثير الحدود المميز

$$\begin{cases} P_0(\lambda) = 1 \\ P_1(\lambda) = 1 - \lambda \\ P_2(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 3) \\ P_2(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) \\ P_i(\lambda) = (1-\lambda)[(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) + (3-\lambda)] \end{cases}$$

. حصر القيمة الذاتية $i = 3, \lambda_3$

الحصر الأول

$$a_0 = -b_0 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(3,4,2) = \|b_1\| = 4$$

$$\Rightarrow \lambda_3 \in [-4,4];\ c_0 = 0; E(4,0) = \{+,+,-,-,+\}$$

$$\begin{cases} N(4,0) = 2 < i = 3 \ \left(\text{جذرين سالبين}\right); \Rightarrow \lambda_3 \in [0,4] \\ M(4,0) = 2; \ \left(\text{جذرين موجبين}\right) \end{cases}$$

الحصر الثاني

$$\Rightarrow \lambda_3 \in [0,4];\ c_1 = 2; E(4,2) = \{+,-,-,+,+\}$$

$$\begin{cases} N(4,2) = 3 \ge i = 3 \ ; \Rightarrow \lambda_3 \in [0,2] \\ M(4,0) = 1 \end{cases}$$

الحصر الثالث

$$\Rightarrow \lambda_3 \in [0,2];\ c_2 = 1; E(4,1) = \{+,+,-,-,+\}$$

$$\begin{cases} N(4,1) = 2 < i = 3 ; \Rightarrow \lambda_3 \in [1,2[\\ M(4,0) = 2 \end{cases}$$

ونبقى بنفس الطريقة للحصر إذا أردنا أن نحصر القيمة الذاتية λ_3 أكثر فأكثر.

3.2 طريقة جاكوبي Jacobi

تطبق هذه الطريقة على المصفوفات التناظرية الحقيقية. ونقوم بإيجاد القيم الذاتية والاشعة الذاتية في نفس الوقت.

ونعلم أنه إذاكانت A مصفوفة تناظرية فهي قابلة للمقاطرة، أي يمكن ايجادمصفوفة متعامدة P وتحقق مايلي:

$$P^t AP = dig(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i);\ \overline{i = 1,n}$$

1.3.2 شرح الطريقة

تقوم طريقة جاكوبي على بناء أو تكوين متتالية مصفوفات متعامدة $(\Omega_k)_{k\geq 1}$ حيث أن المصفوفات A_k تحقق مايلي:

$$\begin{cases} A_1 = A \\ \mathrm{A}_{k+1} = {\Omega_k}^t . \mathrm{A}_k . \Omega_k \end{cases} \qquad (2.21)$$

وهي متقاربة نحو مصفوفة قطرية $dig(\lambda_i)$. نجد عندئذ القيم الذاتية لـ A على قطر A_k حيث k كبير.

إن الأشعة الذاتية لـ A هي الأشعة العمودية لـ $\mathrm{O}_k = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_k$

في كل خطوة المبدأ في كل عملية تحويل $\mathrm{A}_{k+1} = {\Omega_k}^t . \mathrm{A}_k . \Omega_k$,$k \geq 1$، هو إعدام عنصرين خارج عناصر القطر بوضع تناظري.

نظرية 3.2

إذا كان $1 \leq p < q \leq n$، $\theta \in \mathbb{R}$ إذا تعرف المصفوفات Ω_k مصفوفات دوران من الشكل:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & 0 & cos\,\theta & sin\,\theta & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & -sin\,\theta & cos\,\theta & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & \dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

حيث موضعي الدالة $cos\,\theta$ داخل عناصر القطر وتقع في تقاطع للسطر والعمود رقم p ، وكذا لتقاطع السطر والعمود رقم q ، أما الدالة $sin\,\theta$ فهي تقع في تقاطع للسطر p والعمود رقم q، والدالة $-sin\,\theta$ فهي تقع في تقاطع للسطر q والعمود رقم p. حيث ${\Omega_k}^{-1} = {\Omega_k}^{t}$

1. اذا كانت المصفوفة $A = (a_{ij})$ تناظرية، نتاكد أن المصفوفة $B = (b_{ij})$ المعرفة بـ:

$$B = {\Omega_k}^{t}.\mathrm{A}_k.\Omega_k = {\Omega_k}^{-1}.\mathrm{A}_k.\Omega_k \qquad (2.22)$$

هي أيضا مصفوفة تناظرية وتحقق الشرط:

$$\sum_{i,j=1}^{n} {b_{ij}}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \qquad (2.23)$$

2. إذا كان $a_{pq} \neq 0$، إذا يوجد عدد واحد فقط θ ويحقق: $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$

وتحقق المعادلة:

$$cot\,2\theta = \frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}} \quad \text{أو} \quad tan\frac{2a_{pq}}{a_{qq}-a_{pp}}$$

لتكن المصفوفة $A_k = (a_{ij})^k$ معطاة، نختار الثنائية (p,q) حيث $p \neq q$ و $a_{pq} \neq 0$، ثم ننشئ المصفوفة Ω كماتبينه **النظرية 3.2** ونختار الزاوية θ_k بالشروط السابقة وعليه نجد:

$$\mathrm{A}_{k+1} = (a_{ij})^{k+1} = {\Omega_k}^{t}.\mathrm{A}_k.\Omega_k = {\Omega_k}^{-1}.\mathrm{A}_k.\Omega_k \qquad (2.24)$$

يبقى لنا كيفية اختيار الثنائية في كل مرة، يكون لدينا:

$$\left(a_{pq}{}^{k}\right) = \max_{i \neq j} \left|a_{ij}{}^{(k)}\right| \text{ (خارج عناصر القطر)}$$

ونختار بطريقة الكنس الدوري كمايلي:

$$(1,2),(1,3),\dots,(1,n),(2,3),(2,4),\dots,(2,4),(3,4),\dots,(3,n)$$

وذلك حسب الشروط السابقة للنظرية.

2.3.2 حساب معاملات المصفوفة B_i

لدينا:

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{\alpha i} \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha k}\omega_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{\alpha i} a_{\alpha k}\omega_{kj}$$

ومنه:

$$\begin{cases} si\ i \neq p,q\ et\ j \neq p,q & a_{ij} = b_{ij} \\ si\ i = p\ et\ j \neq p,q & b_{qj} = cos\theta a_{pj} - sin\theta a_{pj} \\ si\ i = q\ et\ j \neq p & b_{qj} = sin\theta a_{pj} + cos\theta a_{qj} \\ pour\ i = j = p & b_{pp} = cos^2\theta a_{pp} + sin^2\theta a_{qq} - sin2\theta a_{pq} \\ pour\ i = j = q & b_{qq} = sin\theta a_{pp} + cos^2\theta a_{qq} + sin2\theta a_{pq} \\ pour\ i = p, j = q & b_{pq} = cos2\theta a_{pq} + \dfrac{sin2\theta}{2}(a_{pp} - a_{qq}) \end{cases}$$

والباقي يحسب بوضع تناظري

توطئة 1.2

اذا تم اختيار θ من العلاقة السابقة نجد:

$$\sum_{i,j} b_{ij}{}^{2} = \sum_{i,j} a_{ij}{}^{2}$$

$$\sum_{i} b_{ii}{}^{2} = \sum_{i} a_{ii}^{2} + a_{pq}^{2}$$

ملاحظة:

من التوطئة السابقة نلاحظ ان: $a_{pq} \neq 0$ ، قطر المصفوفة B غالب في العموم على قطر A و منه نكتب:

$$\sum_{i \neq j} {b_{ij}}^2 = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 - a_{pq}^2$$

إن تكرار هذا النوع من العمليات يجب أن يؤدي إلى توسيع الجزء الخارجي بشكل متزايد قطري المصفوفات المتعاقبة.

نظرية 4.2

إن هذه العناصر التي تقع خارج اقطار المصفوفات A_k تتقارب نحو الصفر لما k يؤول الى المالانهاية.

نظرية 5.2

القطر D_k لـ A_k تتقارب نحو مصفوفة $D = diag(\lambda_{\sigma(i)})$ حيث σ تبديل على $\{1,2, \dots n\}$

نظرية 6.2

نفرض ان كل القيم الذاتية لـ A معلومة.اذا المصفوفة $O_k = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_k$ تتقارب نحو مصفوفة متعامدة حيث اشعتها العمودية هي الاشعة الذاتية لـ A.

ملاحظة:

أما في المرحلة الأخيرة نحصل على المصفوفة القطرية والتي قطرها يتكون من القيم الذاتية للمصفوفة A الأشعة الذاتية فيمكن الحصول عليها بأي طريقة.

مثال 4.2

أحسب القيم الذاتية للمصفوفة A بطريقة جاكوبي.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل

نختار $a_{pq} = a_{12} = 2 \neq 0$ أي $p = 1, q = 2$ ومنه $\theta = \frac{\pi}{4}$ إذا:

$$\Omega^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_2 = {\Omega_1}^t . \mathrm{A}_1 . \Omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الأشعة الذاتية

$$V_1 = \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الفصل الثالث

حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

تمهيد

من الصعب حل بعض المعادلات التفاضلية بالطرق التحليلية، لذا يتعين علينا اللجوء إلى الطرق التقريبية. في هذا الفصل، سنتناول الطرق التقريبية الأكثر شيوعًا، مثل الطرق ذات الخطوة الواحدة والطرق متعددة الخطوات. بواسطة هذه الطرق، نحصل على حلول عددية تقريبية.

حل مسالة تفاضلية بشروط ابتدائية وحدية

1.عموميات

تعريف 1.3

كل مسالة تفاضلية من الرتبة الأولى تكتب على الشكل:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad (3.1)$$

من أجل كل $a \le t \le b$ ومرفقة بشرط ابتدائي يكتب على الشكل $y(a) = \alpha$

تعريف 2.3

نقول عن الدالة $f(t.y)$ أنها تحقق شرط **Lipshitz** بالنسبة للمتغير y وفي المجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ حيث:

$$|f(t.y_1) - f(t.y_2)| \le L|y_1 - y_2| \; ; \quad (t.y_1)\,(t.y_2) \in D \quad (3.2)$$

ويسمى L ثابت **Lipshitz** من اجل الدالة f

مثال 1.3

أثبت أن الدالة $f(t.y)$ أنها تحقق شرط **Lipshitz**

$$f(t.y) = t|y|;\ \ D = \{(t.y)/1 \le t \le 2/-3 \le y \le 4\}$$

الحل

لدينا:

$$|f(t.y_1) - f(t.y_2)| = \big|t|y_1| - t|y_2|\big|$$
$$= |t|\big||y_1| - |y_2|\big| \le 2|y_1 - y_2|$$

إذا تحقق شرط **Lipshitz** مع الثابت الذي هو $L = 2$

تعريف 3.3

نقول عن المجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ أنها مترابطة إذا كان من أجل كل (t_1, y_1) و(t_2, y_2)نقطتان موجودتان فيD فان النقطة من اجل $0 \le \lambda \le 1$

$$\big((1-\lambda)t_1 + \lambda_2 t_2(1-\lambda)y_1\lambda y_2\big) \in D \qquad (3.3)$$

هندسيا يمكن أن نربط أي نقطتين منD مجموعة من الخطوط أو المستقيمات المتكسرة دون مغادرة المنطقة D

ملاحظة

في هذا المحور نتناول المجموعات D المعرفة كما يلي:

$$(D \text{ مترابطة}),\ a\ b \in \mathbb{R}\ D = \{(t,y)/a \le t \le b\ ; -\infty < y < +\infty\}$$

نظرية 1.3

لتكن$f(t,y)$ معرفة في المنطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ مترابطة إذا وجد ثابتL بحيث من أجل كل:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|; (t,y) \in D \qquad (3.4)$$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|; (t,y) \in D$ إذا f يحقق شروط **Lipshitz** فيD بالنسبة للمتغير y وL هو ثابت **Lipshitz**

نظرية 2.3

لتكن $D = \{(t,y)/a \leq t \leq b: -\infty < y < +\infty\}$ وفي $f(t,y)$ مستمرة في D إذا كانت f تحقق شرط **Lipshitz** في D بالنسبة للمتغير y إذا المسالة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \propto \end{cases} ; \quad a \leq t \leq b \qquad (3.5)$$

تقبل حل $y(t)$ من اجل $a \leq t \leq b$

مثال 2.3

لتكن المسالة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = t \sin t\, y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,0 \leq t \leq 2$$

الحل

. إثبات أن D منطقة مترابطة مستمرة

$$D = \{(t,y)/0 \leq t \leq 2: -\infty < y < +\infty\}$$

ومنه منطقة مترابطة مستمرة على D

. $f(t,y)$ تقبل حل وحيد في D

لدينا:

$$f(t,y) = 1 + t\sin t\, y$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = |t^2 \cos t\, y| \le |t^2| = 4 \quad ; L = 4$$

إذن المسالة تقبل حل وحيد (حسب الشروط).

نعتبر t ثابت ونطبق نظرية القيم المتوسطة, نجد أنه يمكن إيجاد ξ

$$\xi \in (y_1, y_2)$$

حيث:

$$t^2 \cos \xi\, t = \frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1} = f'(\xi)$$

$$\Longrightarrow |f(t,y_2) - f(t,y_1)| = |y_2 - y_1||t^2 \cos \xi t\,| \le 4|y_2 - y_1|$$

أي أن $f(t,y)$ تحقق شرط **Lipshitz** في D

ملاحظة

في معظم المسائل نهتم بوضعية المسالة إذا كانت معرفة أو لا، أي إذا قمنا بتغيير بسيط وصغير بالنسبة للمسالة .هل هذا سيؤدي إلي تغيير صغير جدا في الحل أم لا .

تعريف 4.3

لتكن لدينا المسالة:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y' = f(t,y_1) \\ y(a) = \propto \end{cases} ; a \le t \le b \qquad (3.6)$$

نقول أنها معرفة إذا تحقق مايلي:

1. الحل الوحيد للمسالة موجود

2. هناك ثابتين k و ع بحيث يتميز الحل الوحيد للمسألة

$$(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(t,z) + \delta(t) \\ z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \end{cases} ; \quad a \le t \le b \qquad (3.7)$$

بأنه موجود إذا توفرت الشروط من أجل كل:

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \; ; \quad a \le t \le b \qquad (3.8)$$

حيث: $|\varepsilon_0| < \varepsilon |\delta(t)| < \varepsilon$;

تسمى (p) بالمسألة المضطربة المرفقة للمسالة الأصلية.

نظرية 3.3

لتكن: $D = \{(t,y); a \le t \le \delta : -\infty < y < +\infty\}$

والمسألة التفاضلية الابتدائية

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y' = f(t,y) \\ y(a) = \propto \end{cases} ; a \le t \le b \qquad (3.9)$$

تكون f معرفة جيدا بشرط أن f مستمرة وتحقق شرط **Lipshit** بالنسبة للمتغير y في المنطقة D .

مثال 3.3

$$D = \{(t,y)/0 \le t \le 1 : -\infty < y < +\infty\}$$

$$(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} ; 0 \le t \le 1$$

1. أثبت أن $f(t,y)$ مترابط في D

2. $f(t,y)$ مستمرة على D

الحل

1. إثبات أن $f(t,y)$ مترابط في D

$$f'(t,y) = \left|\frac{\partial(-y+t+1)}{\partial y}\right| = |-1| = 1$$

ومنه $L = 1$ وحسب **النظرية 3.3** فإن المسألة (p) معرفة جيدا

$$(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = z' = -z + t + 1 + \delta(t) & 0 \le t \le 1 \\ z(0) = 1 + \varepsilon_0 \end{cases}$$

لدينا حل المسألة هو:

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t} + t \\ z(t) = (1 + \varepsilon_0 - \delta)e^{-t} + t + \delta;\ |\varepsilon_0| < \varepsilon \end{cases}$$

وعليه فإن:

$$|z(t) - y(t)| = \left||\delta - \varepsilon_0|e^{-t} - \delta\right| \le |\varepsilon_0 e^{-t}| + |\delta||1 - e^{-t}| \le 2\varepsilon$$

2. الطرق العددية لحل مسالة تفاضلية بشروط ابتدائية وحدية

هناك طرق عددية مختلفة وعديدة لإيجاد حل تقريبي لمسالة تفاضلية بشروط ابتدائية وحدية، ونذكر منها أشهر الطرق استخداما ونذر منها طريقة أولر، طريقة تايلر وطرق رانج كيتا ذوات الرتب المختلفة.

1.2 طريقة Euler

رغم أنها نادرا ما تستخدم لكنها طريقة بسيطة وتكمن بساطها في مشتقاتها التي يمكن أن تستخدم في طرق وتقنيات أخرى، وموضوعها هو إيجاد حل تقريبي لكن مسألة تفاضلية معرفة جيدا.

في الواقع الحصول على تقريبات مستمرة لـ $y(t)$ ، لا يمكن الحصول عليها وعوضا عن ذلك نجد القيم التقريبية لـ y في نقاط مختلفة لـ $y(t)$ في نقاط مختلفة تسمى نقاط العقد في المجال $[a,b]$.

شرح الطريقة

تعتمد هذه الطريقة على تعيين النقاط $\{t_0,t_1,t_2,\dots,t_n\}; n\in IN^*$، حيث لدينا

$t_i=a+ih; i=0,1,\dots n$ و $h=\frac{b-a}{n}$ تسمى طول الخطوة :

ونفرض أن $y(t)$ هو الحل الوحيد للمسألة (p) يملك دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[a,b]$، نطبق نشر تايلور على الدالة $y(t_{i+1})$ عند النقطة t_i إذا نستطيع كتابة مايلي:

$$y(t_{i+1})=y(t_i)+\frac{(t_{i+1}-t_i)}{1!}y'(t_i)+\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2!}y''(\xi_i);\ t_i\le\ \xi\le t_{i+1} \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow y(t_{i+1})=y(t_i)+hy'(t_i)+\frac{h^2}{2!}y''(\xi_i);\ h=t_{i+1}-t_i \quad (3.11)$$

إذا طريقة **Euler** تعرف لنا $y(t_i)\approx w_i$، حيث:

$$\begin{cases} w_{i+1}=w_i+hf(t_i,w_i) \\ w_0=\alpha \end{cases} \quad (3.12)$$

مثال 4.3

طبق طريقة أولر من أجل $n=5$ لحل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}=-y+t+1 \\ y(0)=1 \end{cases} ;0\le t\le 1$$

الحل

نضع: $n=5$، $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{5}=0.2$ ، $t_i=0.2i$.

$$\begin{cases} w_i = w_{i-1} + hf(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

$$w_i = w_{i-1} + 0.2(-w_{i-1} + 0.2(i-1) + 1) = 0.8w_{i-1} + (0.2)^2(i-1) + 0.2$$

$$w_i = 0.8w_{i-1} + 0.04(i-1) + 0.2 = 0.8w_{i-1} + 0.04i + 0.16; i = \overline{1,5}$$

الحل الحقيقي للمسألة:

$$y(t) = t + e^{-t}$$

t_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
w_i	1.0	1.01	1.056100	1.131441	1.230467	1.348678
y_i	1.0	1.018731	1.070320	1.0148812	1.449329	1.367879
$\|y_i - w_i\|$	0	0.008731	0.014220	0.017371	0.018862	0.019201

ملاحظة

يجمع الجدول التالي النتائج المتتالية (العشرة الأولى منها من أجل $h = 0.1$)

مما يجعل من الممكن مقارنة الحلول العددية والحلول التحليلية لملاحظة تطور الخطأ

$méthode\ d'Euler \quad y' = -y(t) + t + 1$			
t_i	$y(t_i)$	y_i	$\|y(t_i) - y_i\|$
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.000000	0.004837
0.2	1.018731	1.010000	0.008731
0.3	1.040818	1.029000	0.011818
0.4	1.070302	1.056100	0.014220
0.5	1.106531	1.090490	0.016041
0.6	1.148812	1.131441	0.017371
0.7	1.196585	1.178297	0.018288
0.8	1.249329	1.213467	0.018862
0.9	1.306570	1.287420	0.019150
1	1.367879	1.348678	0.019201

2.2 طريقة تايلور

لتكن المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y' = f(t,y) \\ y(a) = \propto \end{cases} ; a \le t \le b \qquad (3.13)$$

والتي حلها $y(t)$ الذي يملك $(n+1)$، $y \in C^{n+1}[a,b]$، إذا قمنا بنشر $y(t)$ في جوار t_i من الرتبة n

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_i); \qquad t_i \le \xi \le t_{i+1} \qquad (3.14)$$

والمشتقات المتتابعة لـ $y(t)$ نحصل عليها كمايلي:

$$\begin{cases} y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \\ y''(t_i) = f'(t_i, y(t_i)) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n)}(t_i) = f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) \end{cases} \qquad (3.15)$$

نعوض الجملة (3.15) في المعادلة (3.14) نحصل المعادلة (3.16) كمايلي:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!}f'(t_i, y(t_i)) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)); \qquad t_i \le \xi \le t_{i+1} \qquad (3.16)$$

ملاحظة

1. إذا كانت $n = 1$ نحصل على طريقة أولر

2. أما من أجل $n \in IN; n \ge 2$ نجد:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \dfrac{h^2}{2!} f'(t_i, w_i) + \cdots + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i) \\ w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.17)$$

حيث:

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2!} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i) \quad (3.18)$$

وهي صيغة تايلور من الرتبة n.

مثال 5.3

من أجل المثال السابق، أوجد صيغة تايلور من أجل $n = 2;\ n = 4$

الحل

لدينا:

$$y' = f\big(t, y(t)\big) = -y + t + 1 \Rightarrow f'\big(t, y(t)\big) = -y' + 1 = -(-y + t + 1) + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'\big(t, y(t)\big) = y - t \\ f'\big(t, y(t)\big) = y' - 1 = -y + t \\ f''\big(t, y(t)\big) = -y' + 1 = y - t \end{cases}$$

1. حساب صيغة تايلور من أجل $n = 2$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + hT^{(2)}(t_i, w_i) \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i + hT^{(2)}(t_i, w_i) = w_i + h\left[-w_i + t_i + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i)\right]$$

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i + \left(h - \frac{h^2}{2}\right)(t_i - w_i) + h; h = 0.2$$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{h}{2}\right)(t_i - w_i) + 1\right] \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

2. حساب صيغة تايلور من أجل $n = 4$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + hT^{(4)}(t_i, w_i) \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i + hT^{(4)}(t_i, w_i)$$

$$= w_i + h\left[f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, w_i) + \frac{h^2}{6}f''(t_i, w_i) + \frac{h^3}{24}f'''(t_i, w_i)\right]$$

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i + h\left[-w_i + t_i + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i) + \frac{h^2}{6}(-w_i + t_i) + \frac{h^3}{24}(w_i - t_i)\right]$$

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right)(t_i - w_i) + 1\right]$$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right)(t_i - w_i) + 1\right] \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

. من أجل $n = 10$، إذا أخذنا $h = 0.2$ ، $t_i = 0.2i$ إذا تصبح العلاقتين السابقتين كمايلي:

. من أجل تايلور $n = 2$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{0.2}{2}\right)(0.2i - w_i) + 1\right] \\ w_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_{i+1} = 0.82w_i + 0.36i + 0.2 \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

. من أجل تايلور $n = 4$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + 0.2\left[\left(1 - \frac{0.2}{2} + \frac{0.04}{6} - \frac{0.008}{24}\right)(0.2i - w_i) + 1\right]; \overline{i = 0,9} \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص كل الحسابات في الجدول التالي:

t	القيمة الصحيحة	$n=2$	E	$n=4$	E
0.0	1.0	1.0	0	1.0	0
0.2	1.08730753	1.019025	$2.942.10^{-4}$	1.0187309	$1.483.10^{-7}$
0.4	1.07032004	1.070802	$4.82.10^{-4}$	1.07032028	$2.429.10^{-7}$
0.6	1.14881163	1.149404	$5.924.10^{-4}$	1.14881193	$2.983.10^{-7}$
0.8	1.24932896	1.249976	$6.47.10^{-4}$	1.24932928	$3.256.10^{-7}$
1.0	1.36787944	1.368541	$6.616.10^{-4}$	1.36787977	$3.332.10^{-7}$

يجمع الجدول التالي النتائج المتتالية (العشرة الأولى منها)

$méthode\ de\ Taylor \quad y' = -y(t) + t + 1$			
t_i	$y(t_i)$	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0.0	1.000000	1.000000	0.0000000
0.1	1.004873	1.005000	0.000163
0.2	1.018731	1.019025	0.000249
0.3	1.040818	1.041218	0.000400
0.4	1.070302	1.07802	0.000482
0.5	1.106531	1.107075	0.000544
0.6	1.148812	1.149404	0.000592
0.7	1.136585	1.197210	0.000625
0.8	1.249329	1.249975	0.000646
0.9	1.306570	1.307228	0.000658
0.1	1.367879	1.368541	0.000662

نلاحظ أن الخطأ في طريقة تايلور من الرتبة 2 اصغر من طريقة اويلر

مثال 6.3

طبق طريقتي كل من أولر وتايلور من أجل $n = 2$ ، من أجل$h = 0.5$ لحل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t}(y^2 - y); \ \ 1 \le t \le 3 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

الحل

1. صيغة أولر$n = 1$

$$\begin{cases} w_i = w_{i-1} + hf(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_i = w_{i-1} + 0.5\left[\frac{1}{t}({w_{i-1}}^2 - w_{i-1})\right] \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_i = w_{i-1} + \frac{0.5}{1 + 0.5(i-1)}[({w_{i-1}}^2 - w_{i-1})] \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

2. صيغة تايلور $n = 2$

$$\begin{cases} w_i = w_{i-1} + hf(t_{i-1}, w_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_i = w_{i-1} + 0.5\left[\frac{1}{t_{i-1}}({w_{i-1}}^2 + w_{i-1}) + \frac{{w_{i-1}}^2}{{t^2}_{i-1}}(w_{i-1} + 1)\right] \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_i = w_{i-1} + \frac{0.5}{1 + 0.5(i-1)}({w_{i-1}}^2 + w_{i-1}) + \frac{w_{i-1}}{\left(1 + 0.5(i-1)\right)^2}({w_{i-1}}^2 + w_{i-1}) \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_i = w_{i-1} + \frac{0.5}{1 + 0.5(i-1)}({w_{i-1}}^2 + w_{i-1})\left[1 + \frac{0.5}{1 + 0.5(i-1)} w_{i-1}\right]; i = \overline{0,3} \\ w_0 = -2 \end{cases}$$

. الجدول التالي يبين الحلول التقريبية لطريقتي أولر و تايلور

i	t_{i-1}	$w_i\ Euler$	$w_i\ Taylor$
0	1.0	-2	-2
1	1.5	-1	-2
2	2.0	-1	-1.777776
3	2.5	-1	-1.585732
4	3.0	-1	-1.458882

ملاحظة

طريقة أولر وتايلور تمتلكان خصائص مستحبة لكنهما تحتاجان إلى حساب المشتقات وفي معظم الحالات يكون الأمر معقدا ويستغرق مدة طويلة ولذلك فهي نادرا ما تستخدمان وبدلا منهما نستخدم طريقة تختصر الوقت وهي طرق رانج كيتا.

3.2 طريقة رانج كيتا Runge−kutta

1.3.2 شرح الطريقة

طريقة رانج كيتا تختصر لنا الوقت وتحذف لنا حساب المشتقات ولتحقيق ذلك يجب حساب $f(t,y)$ في نقاط أخرى غير العقد.

الصيغة العامة لأي صيغة لصيغ رانج كيتا ذات n حد تعطى بالشكل التالي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + \sum_{j=1}^{n} b_i k_j \\ w_0 = \alpha \end{cases}; \quad \begin{cases} k_1 = hf(t_i, w_i) \\ k_j = hf\left(t_i + hc_q, w_i + \sum_{p=1}^{q-1} a_{qp} k_p\right) \end{cases} \quad (3.19)$$

حيث: $c_q, b_i, q = \overline{2,m}, a_{qp}$ ثوابت تختار حسب الدقة المراد حسابها.

2.3.2 الحالة الأولى $m = 1$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + b_1 k_1;\ k_1 = hf(t_i, w_i) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_{i+1} = w_i + b_1 hf(t_i, w_i) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.20)$$

ملاحظة:

إذا كان $b_1 = 1$ نحصل على طريق أولر

3.3.2 الحالة الثانية $m = 2$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + b_1 k_1 + b_2 k_2 \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, w_i), \\ k_2 = hf\left(t_i + hc_q, w_i + \sum_{p=1}^{1} a_{qp} k_p\right); q = 2 \Rightarrow k_2 = hf(t_i + hc_2, w_i + a_{21} k_1) \end{cases} \quad (3.22)$$

نعوض العلاقة (3.22) في العلاقة (3.21) نجد العلاقة (3.23) كمايلي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + b_1 hf(t_i, w_i) + b_2 hf\left(t_i + c_2 h, w_i + a_{21} hf(t_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.23)$$

الحالات الخاصة

أ. إذا أخذنا $b_2 = 1; b_1 = 0;\ c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$، نحصل في هذه الحالة على طريقة النقطة الوسطى والتي تعرف على النحو الآتي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + + + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.24)$$

ب. إذا أخذنا $b_2 = b_1 = \frac{1}{2};\ c_2 = a_{21} = 1$، نحصل في هذه الحالة على طريقة أولر المعدلة والتي تعرف على النحو الآتي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f\left(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \quad (3.25)$$

ج. إذا أخذنا $b_2 = \frac{3}{4};\ b_1 = \frac{1}{4};\ c_2 = a_{21} = \frac{2}{3}$، نحصل في هذه الحالة على طريقة Heun والتي تعرف على النحو الآتي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} f(t_i, w_i) + \frac{3}{4} hf\left(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3} hf(t_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha \end{cases} \qquad (3.26)$$

4.3.2 الحالة الثالثة $m = 3$

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 \\ w_0 = \alpha \end{cases} \qquad (3.27)$$

طريقة رانج كيتا من الرتبة الثالثة في الغالب لا تستخدم.

5.3.2 الحالة الثالثة $m = 4$

طريقة رانج كيتا من الرتبة الرابعة بالشكل التالي:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \overline{i = n-1} \\ w_0 = \alpha \end{cases} \qquad (3.28)$$

حيث أن:

$$\begin{cases} k_1 = h.f(t_i, w_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}) \end{cases};\quad \begin{cases} k_3 = h.f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3) \end{cases} \qquad (3.29)$$

مثال 7.3

نستخدم نفس المثال السابق لحل المسألة التفاضلية بطريقة رانج كيتا من الرتبة الرابعة:

$$\begin{cases} y' = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases};\ h = 0.1$$

الحل

لدينا: $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ حيث:

$$\begin{cases} k_1 = h.f(t_i, w_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} k_3 = h.f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.1f(t_0, w_0) = 0.1(-1+1) = 0 \\ k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{0}{2}\right) = 0.1f(0+0.05, 1+0) = 0.1(-1+0.05+1) = 0.005 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = h.f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1f(0+0.05, 1+0.0025) = 0.00475 \\ k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3) = 0.1f(0+0.1, 1+0.00475) = 0.009525 \end{cases}$$

بعدما نعوض قيم k_i إذن في العلاقة السابقة نجد:

$$w_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.005) + 2(0.0045) + 0.009525) = 1.004754166$$

يجمع الجدول التالي النتائج المتتالية (العشرة الأولى منها)

Méthode de Runge−kutta $y' = -y(t) + t + 1$			
t_i	w_i	y_i	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	1.004754166	1.0048375400	0.819×10^{-7}
0.2	1.0187307798	1.0187309014	0.148×10^{-6}
0.3	1.0408182207	1.0408184220	0.210×10^{-6}
0.4	1.0703200460	1.0703202892	0.242×10^{-6}
0.5	1.1065306597	1.1065309344	0.274×10^{-6}
0.6	1.1488116361	1.0148811934	0.298×10^{-6}
0.7	1.1965853034	1.1965856186	0.314×10^{-6}
0.8	1.2493289641	1.2493292897	0.325×10^{-6}
0.9	1.3065696598	1.3065799912	0.331×10^{-6}
1.0	1.3678779412	1.3678797744	0.333×10^{-6}

مثال 8.3

حل المسألة التفاضلية التالية بجميع الطرق السابقة المدروسة:

$$\begin{cases} y' = -y(t) + t^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}; \ h = 0.1$$

الحل

نحسب الحل الدقيق نجده:

$$y(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$$

أما الحلول العددية بجميع الطرق السابقة فسوف نلخصها في الجدول التالي:

t_i	y_i	$w_i Euler$	e_{Euler}	$w_i M.mod$	$e_{M.mod}$
0.0	1.000000	1.000000	0	1.000000	$3.01.10^{-4}$
0.2	1.002538	1.002426	$1.72.10^{-4}$	1.0029025	$3.65.10^{-4}$
0.4	1.019359	1.019262	$9.75.10^{-5}$	1.0201288	$7.69.10^{-4}$
0.6	1.062376	1.062378	$2.9.10^{-6}$	1.0635645	$1.19.10^{-3}$
0.8	1.141342	1.141496	$1.55.10^{-4}$	1.1429444	$1.60.10^{-3}$
1.0	1.264241	1.264579	$3.39.10^{-4}$	1.2662416	2.10^{-3}

$w_i Heun$	e_{Heun}	$w_i R.K$	e_{R-K}
1.000000	0	1.000000	0
1.025856	$4.65.10^{-5}$	1.1873090	$1.0.10^{-8}$
1.0195512	$1.91.10^{-4}$	1.0703202	$1.48.10^{-7}$
1.0627739	$3.97.10^{-4}$	1.1488119	$2.43.10^{-7}$
1.1419794	$6.37.10^{-4}$	1.2493298	$9.33.10^{-7}$
1.2651337	$8.93.10^{-4}$	1.3678737	$3.33.10^{-7}$

ملاحظات

1. تسمى المسألة التالية بمسألة كوشي:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

2. نسمي طريقة ذات خطوة واحدة التي تمكننا من حساب w_{n+1}، انطلاقا من قيمة واحدة سابقة w_n، وتكون الطريقة ذات r خطوة إذا الطرق التي تحتاج لجميع النتائج المتحصل عليها في $n, n-1, n-2, \dots, n-(r+1)$، خطوة سابقة وذلك لحساب w_{n+1}.

3. الطرق ذات الخطوة الواحدة جميعها يمكن كتابتها على الشكلّ:

$$w_{i+1} = w_i + h_i \emptyset(t_i, w_i, h_i);\ \overline{i = 0, n} \qquad (3.30)$$

حيث: $\emptyset$ دالة مستمرة ومعرفة بـ: $\emptyset: [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4. جميع الطرق التي درسناها هي طرق ذات خطوة واحدة.

تعريف 5.3

نقول عن الطريقة أنها متماسكة إذا كان من أجل كل حل دقيق τ ، فإن مجموع الأخطاء النسبية ولتكن: $\sum_{i=0}^{n} |e_i|$ تؤول نحو 0 عندما يؤول h نحو0.

تعريف 6.3

نقول عن الطريقة أنها مستقرة إذا وجد ثابت $\delta \geq 0$ يسمى بثابت الاستقرار، بحيث من أجل كل متتاليتين معرفتين بالشكل:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h_i \emptyset(t_i, w_i, h_i);\ \overline{i = 0, n} \\ \widetilde{w}_{i+1} = \widetilde{w}_i + h_i \emptyset(t_i, \widetilde{w}_i, h_i) + e_i \end{cases} \qquad (3.31)$$

لدينا:

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\widetilde{w}_i - w_i| \leq \delta \left(|\widetilde{w}_0 - w_0| + \sum_{i=0}^{n} |e_i| \right) \qquad (3.32)$$

تعريف 7.3

نقول عن الطريقة أنها متقاربة، إذا كان من أجل كل حل دقيق τ، متتالية الحلول التقريبية $\{w_i\}_{i=0}^{n}$

$$w_{i+1} = w_i + h_i \emptyset(t_i, w_i, h_i) \qquad (3.33)$$

تحقق:

$$\max_{0 \le i \le n} |w_i - \tau(t_i)| \to 0; y_0 \to \tau(t_0) \qquad (3.34)$$

تسمى القيمة الأخيرة بالخطأ النسبي.

نظرية 4.3

تكون الطريقة ذات الخطوة الواحدة المعرفة بالدالة $\emptyset$ متماسكة، إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \Rightarrow \emptyset(t, y, 0) = f(t, y) \qquad (3.35)$$

نظرية 5.3

تكون الطريقة ذات الخطوة الواحدة المعرفة بالدالة $\emptyset$ ثابتة، إذا وفقط إذا كان $\emptyset$ دالة Lipshitz بالنسبة لـ y في هذه الحالة يمكن أخذ ثابت الاستقرار كمايلي:

$$S = e^{kt}, k: \text{ثابت}$$

$$\exists k \ge 0;\ |\emptyset(t, y_1, h) - \emptyset(t, y_2, h)| \le k|y_1 - y_2|;\ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \qquad (3.36)$$

4.2 المعادلات الفرقية :

يشير التعبير "المعادلة الفروق "إلى معادلة تحتوي فروقا مثل

$$\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k = 0 \qquad (3.37)$$

إذن هي علاقة بين القيم y_k لتابع معروف على مجموعة متقطعة من الادلة x_k وبفرض أن الادلة على أبعاد متساوية فإن المتغير العادي $x_k = x_0 + hk$ يجعلنا نتعامل مع دليل صحيح k أن حل معادلة الفروق تجعل متتالية الحلول تحسب بالتكرار اي اذا كانت y_k معلومة نحسب y_{k+1}

تعريف 8.3

رتبة المعادلات الفرقية هي الفرق بين أكبر وأصغر دليلين k يظهران في المعادلة

مثال 9.3

المعادلة الفرقية التالية من الرتبة الثالثة

$$y_4 - y_1 = 3y_2$$

1.4.2 المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى

وهي المعادلة التي تأخذ الشكل العام التالي:

$$y_{k+1} = f_1(k).y_k + f_2(k) \qquad (3.38)$$

وعندما يكون $f_2(k) = 0$ تسمى بالمعادلة "المتجانسة "

إن حل هذه المعادلة يعني حساب y_{k+1} بدلالة y_k

مثال 10.3

حل المعادلة الفرقية التالية من المرتبة الأولى:

$$\begin{cases} y_{k+1} = ky_k + k^2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

الحل

بإعطاء k قيم متتالية ابتداء من الصفر نجد:

$$\begin{cases} y_1 = 0.y_0 + 0^2 = 0 \\ y_2 = 1.y_1 + 0^2 = 1 \\ y_3 = 2.y_2 + 2^2 = 2.1 + 4 = 6 \end{cases}$$

ونبق بهذا الشكل فنحصل على:

$$y_4 = 2, y_5 = 124$$

1.4.2 المعادلات الفرقية الخطية من المرتبة الثانية

هي كل معادلة تكتب من الشكل العام التالي:

$$f_1(k)y_{k+2} + f_2(k).x_{k+1} + f_3(k).x_k + f_4(k) = 0 \qquad (3.39)$$

وتسمى معادلة متجانسة إذا كان $f_4(k) = 0$ وعندما تكون الدوال $f_1, f_2 f_3$ ثوابت تسمى معادلة فرقية ذات أمثال ثابتة.

لحل المعادلات الفرقية من المرتبة الثانية نكتب أولا المعادلة المميزة لها فمثلا المعادلة :

$$ay_{k+2} + by_{k+1} + cy_k = 0 \qquad (3.40)$$

والمعادلة المميزة لها هي:

$$ar^2 + br + c = 0\ ;\ \Delta = b^2 - 4.a.c$$

هذه المعادلة حلها هو:

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2.r_2^k \qquad (3.41)$$

وهو يحقق مفهوم المعادلة الفرقية ويتم تحديد الثابتين c_1, c_2 من الشروط الابتدائية y_2, y_1 أي :

$$\begin{cases} y_0 = c_1 + c_2 \\ y_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 \end{cases} \qquad (3.42)$$

من الجملة (3.42) نجدّ:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0 r_2}{r_1 - r_2};\quad c_2 = \frac{r_1 y_0 - y_1}{r_1 - r_2} \qquad (3.43)$$

مثال 11.3

حل مسالة القيم الابتدائية من المرتبة الثانية التالية:

$$\begin{cases} y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

الحل

لو أخذنا: $k = 0,1,2, \ldots$ فنجد أن:

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + y_0 = 1 \\ y_3 = y_2 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ y_4 = y_3 + y_2 = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نجد بقية الحلول:

$$y_5 = 5; y_6 = 8; y_7 = 13; y_8 = 21; \ldots \ldots \ldots$$

مثال 12.3

أوجد حل معادلة الفروق التالية:

$$\begin{cases} 2y_{k+2} - 8y_{k+1} + 6y_k = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

الحل

نضع المعادلة المميزة لهذه المعادلة الفرقية الاتية:

$$2r^2 - 8r + 6 = 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \mp 4$$

$$r_1 = \frac{8+4}{4} = 3;\ r_2 = \frac{8-4}{4} = 1$$

وبالتالي فان الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y_k = c_1.(1)^k + c_2.(3)^k$$

نحدد الثوابت من شروط الابتدائية:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1.5 = c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0.75 \\ c_2 = 0.25 \end{cases}$$

ومنه نجد الحل:

$$y_1 = 0.75 + 0.25(3)^k;\ k = 0,1,2,3,\dots$$

وطبعا للحصول على بقية الحلول نبدل قيم k المتتالية لنحصل على بقية قيم y_k المتتالية أيضا

حيث ... ... $k = 0,1,2,3,$

2.4.2 طريقة اولر – كوشي

هذه الطريقة تعتمد بحساب التكامل في العلاقة باستخدام قاعدة شبه المنحرف فنجد أن:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \qquad (3.44)$$

وبسبب ظهور y_{i+1} في الطرف الايمن نستبدلها بقيمة تقريبية محسوبة من إحدى علاقات التكامل ونرمز لها $y_{i+1}^{(0)}$ بينما نرمز في الطرف الايسر لـ y_{i+1} بـ $y_{i+1}^{(0)}$ وهكذا بالتكرار نحصل على الحلول التقريبية من العلاقة التكرارية التالية:

$$y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(n)})\right] \quad (3.45)$$

أما عبارة الخطأ هنا فهو نفسه مشتق قانون الخطأ في طريقة شبه المنحرف ويعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_p = -\frac{h^3}{12} y^{(2)}(\varepsilon) \qquad (3.46)$$

ويسمى بالخطأ في "قسم التصحيح "

بينما الخطأ الثاني ε_c والذي يحسب من الخطأ في طريقة أولر

$$\varepsilon_c = \frac{h^2}{2} y''(\varepsilon) \qquad (3.47)$$

ويسمى بالخطأ في "قسم التنبؤ"

مثال 13.3

لتكن المعادلة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} y' = xy^{\frac{1}{3}} \\ y(1) = 1;\ h = 0.1 \end{cases}$$

حل هذه المعادلة بطريقة اولر – كوشي في النقطة $x = 1.1$

الحل

لدينا من طريقة اولر

$$y(1.1) = 1.1$$

وهذا القسم كما ذكرنا في النظري هو قسم التنبؤ و الخطأفي هذا القسم خطأ التنبؤ و الذي يساوي

$$|\varepsilon_c| < 0.0066667$$

أما قسم التصحيح فيحسب بالشكل

$$y(1.1) = 1 + 0.05(1 + 1.03228) = 1.10677$$

حيث تم تعويض قيمة $y'(1.1)$ في الطرف الايمن للعلاقة الاخيرة من صيغة اولر (من قسم التنبؤ)

تمارين غير محلولة

التمرين الأول

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

وذلك باستخدام طريقة اولر من اجل $h = 0.2$ وحيث $0 \le t \le 1$

التمرين الثاني

حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة أولر وتايلر من أجل $n = 2$:

$$\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 1; \end{cases} 0 \le t \le 0.2\,;\ h = 0.2$$

التمرين الثالث

حل المعادلة التفاضلية بطريقة اولر ثم اولر – كوشي

$$\begin{cases} y = t + y \\ y(0) = 0;\ 0 \le t \le 1; h = 0.2 \end{cases}$$

التمرين الرابع

حل المعادلة التفاضلية السابقة بطريقة رانج–كوتا، ثم قارن بين النتائج.

التمرين الخامس

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = t - y \\ y(0) = 0; h = 0.2 \end{cases}$$

حل هذه المعادلة في النقطة $t = 0.6$ بطريقة رانج– كوتا.

التمرين السادس

أوجد حل المعادلة التفاضلية الفرقية

$$\begin{cases} 3y_{k+2} - 12y_{k+1} + 12y_k = 0 \\ y_0 = 0;\ y_1 = 3 \end{cases}$$

التمرين السابع

أوجد الحل العام للمعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى التالية

$$\begin{cases} y_{k+1} - 4y_k - 1 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

التمرين الثامن

أوجد الحل الخاص للمعادلة الفرقية التالية

$$\begin{cases} 2y_{k+2} - 6y_{k+1} - 8y_k = 0 \\ y_0 = 0; y_1 = 2 \end{cases}$$

الفصل الرابع

حل جملة المعادلات غير الخطية

تمهيد:

يتم اللجوء إلى الطرق العددية لحل جملة المعادلات غير الخطية، وذلك لتغطية العجز الذي تعاني منه الطرق التحليلية، والتي تعتمد على الطرق التكرارية ابتداء من شعاع الحل الابتدائي.

وسوف نتطرق في هذا الفصل إلى بعض الطرق منها، طريقة النقطة الثابتة، طرق نيوتن المختلفة، مع دعمنا لفهم هذا الفصل بتقديم أمثلة عددية معتبرة.

1. تعاريف

تعريف 1.4

نعرف الشكل العام لجملة المعادلات غير الخطية $F(X)$ كمايلي:

$$\begin{cases} f_1(x_1x_2,\dots\dots\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1x_2,\dots\dots\dots,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1x_2,\dots\dots\dots,x_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow F(X)=0 \qquad (4.1)$$

حل الجملة غير الخطية (4.1) هو إمكانية البحث عن الشعاع $X=(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

حيث تكون $F(X)=(f_1,f_2,\dots\dots,f_n)^t$ دوال مستمرة على المجال D

تعريف 2.4

نقول عن الدالة $F(X)$ أنها مستمرة عند الشعاع $X_0 \in D$ اذا كانت $\lim\limits_{X\to X_0} F(X)$ موجودة أي:

نقول عن الدالة $F(X)$ أنها مستمرة عند الشعاع $X_0 \in D$ اذا كانت $\lim\limits_{X\to X_0} F(X)$ موجودة أي:

$$\lim_{X\to X_0} F(X)=F(X_0) \qquad (4.2)$$

ونكتب $F(X)\in C(D)$ إذا كانت F مستمرة عند كل نقطة من D .

تعريف 3.4

إذا كان: $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots\dots, f_n(X))^t$

تكون النهاية معرفة وموجودة إذا كانت:

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L = (l_1, l_2 \dots\dots, l_n)^t \qquad (4.3)$$

حيث: $\lim_{X \to X_0} f_i(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = l_i$

تعريف 4.4

نقول عن الدالة$G(X)$: $G: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

أنها تقبل نقطة ثابتة $\alpha \in D$ اذا كانت $G(\alpha) = \alpha$

2. الطرق العددية لحل الجمل الخطية

1.2 طريقة النقطة الثابتة

تعتمد طريقة النقطة الثابتة على تحويل نظام المعادلات $F(X) = 0$ إلى النظام $G(X) = X$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_1 = g_1(x_2, \dots\dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_2 = g_1(x_1, \dots\dots, x_n) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_n = g_1(x_1, \dots\dots, x_{n-1}) \end{cases} \qquad (4.4)$$

مثال تطبيقي

نأخذ الجملة التالية المكونة من معادلتين حسابيا يمكن كتابتها كمايلي:

$$\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases} \qquad (4.5)$$

مثال 1.4

لتكن الجملة الآتية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases}$$

أ. الاحتمال الأول

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{4 - y^2} \\ y = 1 - e^x \end{cases}$$

بيانيا حل هذه الجملة هو نقاط تقاطع الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ مع البيان $y = 1 - e^x$

إذا أخذنا $y_0 = 0.8$ نجد مايلي:

قيم x	-1.83	-1.815	-1.815	-1.8162
قيم x	0.8	0.84	0.8372	0.874

نلاحظ أن الاختيار الأول $y_0 = 0.8$ تكون القيم y_i وx_i متقاربة إذا الطريقة متقاربة من أجل هذه الاختيار

إذا أخذنا $y_0 = -1.7$ نجد مايلي :

قيم x	1.05	0.743	1.665	1.0042
قيم y	-1.7	-1.857	-1.102	-4.307

نلاحظ أن الطريقة تتباعد من أجل هذه الاختيار

ب. الاحتمال الثاني

$$\begin{cases} y = -\sqrt{4 - x^2} \\ x = \ln(1 - y) \end{cases}$$

إذا أخذنا $y_0 = -1.7$ نجد مايلي :

قيم x	0.993	1.006	1.0032	1.0042
قيم y	-1.7	-1.736	-1.7299	-1.7296

نلاحظ تقارب الطريقة من أجل هذه الاختيار.

ملاحظة

في المثال السابق نلاحظ وجود صعوبات لحل جملة المعادلات غير الخطية ولذلك يتوجب علينا وضع بعض الشروط الضمان التقارب يمكن إعطاؤها في نص النظرية التالية:

نظرية 1.4

لتكن:

$$\forall a_i b_i \in \mathbb{R}\,; i = \overline{1,n};\ D = \{(x_1 x_2, \dots\dots, x_n)^t;\ a_i \le x_i \le b_i\}$$

ولتكن $G(X)$ دالة مستمرة وتحقق: $G: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ G \in \mathbb{C}(D)$

وتحقق: $\forall X \in D; G(x) \in D$

1. إذا $G(X)$ تملك نقطة ثابتة في D $G = (g_1, g_2, \dots\dots, g_n)^t$

2. وإذا وجد $M < 1$ ويحقق:

$$\left|\frac{\partial g_i\,(X)}{\partial x_j}\right| \le \frac{M}{n};\ \forall X \in D; j = \overline{1.n} \qquad (4.6)$$

إذا $G(X)$ تملك نقطة ثابتة وحيدة في D، إذا متتالية الحلول التقريبية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ تقارب نحو شعاع الحل الحقيقي $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n)^t$ والتي تحقق: $G\left(x^{(k-1)}\right) = x^{(k)}; k \ge 1$

$$\left\|X^{(k)} - \alpha\right\|_\infty \le \frac{M^{(k)}}{1-M}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty ;\ \ \|X\|_\infty = \max_{0 \le i \le n}|x_i| \quad (4.7)$$

مثال 2.4

حل بطريقة النقطة الثابتة جملة المعادلات غير الخطية التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 3x_1 - cosx_2 x_3 - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x^2{}_1 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sinx_3 + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

$$D = \{x_1, x_2, x_3)^t; -1 \le x_i \le 1\}; X^{(0)} = (0.1, 0.1, 0.1)$$

الحل

نحل الجملة السابقة بطريقة النقطة الثابتة

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}cosx_2x_3 + \frac{1}{6} = g_1(X) \\ x_2 = \frac{1}{9}\sqrt{x^2{}_1 + sinx_3 + 0.6} - 0.1 \quad = g_2(X) \\ x_3 = -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} = g_3(X) \end{cases}$$

$$G: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; G(x) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))^t \; ; \; \forall X = (x_1, x_2, x_3)^t \in D$$

فإن:

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{3}|\cos(x_2x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.4932 \leq 0.50$$

$$|g_2(x_1, x_2, x_3)|$$

$$= \left|\frac{1}{9}\sqrt{x^2{}_1 + sinx_3 + 0.6} - 0.1\right| \leq \frac{1}{9}\left|\sqrt{(-1)^2 + \sin(-1) + 1.06} - 0.1\right| = 0.022$$

$$et \; |g_2(x_1, x_2, x_3)| = \frac{1}{9}\left|\sqrt{(1)^2 + \sin(1) + 1.06} - 0.1\right| \leq 0.089 \leq 0.09$$

$$|g_3(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{20}e^{x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61$$

$$\Rightarrow G(x) = \big(g_1(x), g_2(x), g_3(x)\big) \in [-1,1]; \; \forall \alpha \in D$$

وهذه الدوال كلها مستمرة في المجال D، ومنه إذا $G(X)$ تملك نقطة ثابتة في D.

2. لدينا أيضا: حساب $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|$، وذلك من أجل أثبات أن $G(X)$ تملك نقطة ثابتة وحيدة في D.

$$\left|\frac{\partial g_1(X)}{\partial x_1}\right| = 0; \; \left|\frac{\partial g_2(X)}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{\partial g_3(X)}{\partial x_3}\right| = 0$$

$$\left|\frac{\partial g_1(X)}{\partial x_2}\right| \leq \frac{1}{3}|x_3||sinx_2x_3| \leq \frac{1}{3}\sin(1) \leq 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_1(X)}{\partial x_3}\right| \leq \frac{1}{3}|x_2||sinx_2x_3| \leq \frac{1}{3}\sin(1) \leq 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_2(X)}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1{}^2 + sinx_3 - 1.06}} \leq \frac{1}{9\sqrt{0.218}} < 0.238$$

$$\left|\frac{\partial g_2(X)}{\partial x_3}\right| = \frac{|cosx_3|}{18\sqrt{{x_1}^2 + sinx_3 - 1.06}} \leq \frac{1}{18\sqrt{0.218}} \leq 0.119$$

$$\left|\frac{\partial g_3(X)}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_2|}{20} e^{x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e^1 \leq 0.14$$

$$\left|\frac{\partial g_3(X)}{\partial x_2}\right| = \frac{|x_1|}{20} e^{x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e^1 \leq 0.14$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية للدالة $G(x)$ موجودة داخل المجال D أي $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \subset D$ وهي دوال مستمرة على المجال D، وتحقق الشرط :

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leq \max(|0.281\ |, |0.14|, |0.119|, |0.238|) = 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{M}{n} = \frac{M}{3} \leq 0.281 \Rightarrow M = 0.843 < 1$$

ومنه $G(x)$ تمتلك نقطة ثابتة وحيدة α في المجال $[-1,1]$، وذلك حسب النظرية 1.4

حساب متتالية الحلول التقريبية:

لدينا: $X^{(k)} = G\left(X^{(k-1)}\right) = G(x_1, x_2, x_3)^{(k)}$

k	${X_1}^{(k)} = g_1(X)$	${x_2}^{(k)} = g_2(X)$	${x_3}^{(k)} = g_3(X)$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.1	0.1	−0.1	0.1
1	0.4999833	0.00944115	−0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	−0.52336331	$9.4(10)^{-3}$
3	0.5	0.00001234	−0.52359814	$2.3.10^{-4}$
4	0.5	3.10^{-8}	−0.6235847	$1.2(10)^{-5}$
5	0.5	2.10^{-8}	−0.52355877	$3.1(10)^{-7}$

من أجل: $M = 0.843$

$$(0.423) < 1.15\left\|X^{(5)} - \alpha\right\|_\infty \leq \frac{0.843^{(5)}}{1-0.843}$$

$$\alpha = (0.5; 2.10^{-8}; -0.5235987)^t \approx (0.5; 0\ ; -\frac{\pi}{6})^t$$

$$\Rightarrow \left\|X^{(5)} - \alpha\right\|_\infty \leq 2.10^{-8}$$

2.2 طريق نيوتن المختلفة لحل المعادلات غير الخطية

يمكن تحديد طريقتي نيوتن وبايلي لحل معادلات من المعادلات غير الخطية مثل:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

يعتمد الحل على نشر تايلور لدالة لعدة متغيرات وهنا من أجل متغيرين x, y يعطى هذا النشر كمايلي:

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)\delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\delta y^2\right] + \cdots \quad (4.8)$$

$$g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y$$

$$+\frac{1}{2}\left[g_{xx}(x_0, y_0)\delta x^2 + 2g_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + g_{yy}(x_0, y_0)\delta y^2\right] + \cdots (4.9)$$

إن تمديد طريقة نيوتن لحل جملة معادلات غير خطية تعتمد على تقريب الدوال ذات عدة متغيرات إلى دالة أو تابع خطي بكثيرات حدود تايلور.

مثال تطبيقي لحل جملة ذات متغيرين y و x :

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

إن الدوال $f(x,y), g(x,y)$ تقرب الى نشري تايلور (4.8), (4.9) بعد حذف الحدود بعد الدرجة الأولى منه وبشكل مشابه يمكن أيضا استخدام طريقة بايلي لحل هذه الجملة والذي يعتمد على تقريب الدوال بعدة متغيرات بكثيرات حدود تايلور التربيعية بعد حذف الحدود من الدرجة الثانية في $\delta x, \delta y$ للنشرين السابقين.

إن استخدام طريقة بايلي ترجع لتعديل طريقة نيوتن

1.2.2 طريقة نيوتن لحل جملة معادلات غير خطية

نفرض أن الحل الابتدائي(x_0, y_0) معلوم لحل الجملة وإذا أخذ هذا التقدير أو الحل بزيادة مقدارها$\delta x, \delta y$ عندئذ تقريبات المرتبة الأولى لنتيجة تتغير $f(x,y)$و$g(x,y)$ تعطى بالشكل:

$$\begin{cases} \delta f(x,y) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y \\ \delta g(x,y) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y \end{cases} \qquad (4.11)$$

إن حل الجملة (4.10) نحصل عليه بتحديد $\delta x, \delta y$ بحيث أن التفاضل لكليهما يحقق الشرط التالي:

$$\begin{cases} \delta f = -f(x_0, y_0) \\ \delta g = -g(x_0, y_0) \end{cases} \qquad (4.12)$$

نعوض المعادلة (4.12) في (4.11) نجد:

$$\begin{cases} -f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y \\ -g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y \end{cases} \qquad (4.13)$$

وهذان المعادلتان الخطيتان يمكن حلهما بالنسبة لـ $\delta x, \delta y$

وإذا قدرنا كل من $f(x, y)$ و $g(x, y)$ عند$(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ وكتبناهما على شكل نشر تايلور ينتج من (4.13) أن الطرف الأيمن لمعادلات الناتجة يكون معدوما أي

$$\begin{cases} f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y = 0 \\ g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y = 0 \end{cases} \qquad (4.14)$$

إذا كان هذا النشر لتايلور دقيقا فإنه من المعلوم أن: $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ يكون تقريبا لحل المعادلات(4.10) .

إذا كان $|\delta x| > \varepsilon$ أو $|\delta y| > \varepsilon$ حيث تكون القيمة ε صغيرة جدا وموجبة فانه من الضروري استبدال x_0 بـ $x_0 + \delta y$ و y_0 بـ $y_0 + \delta y$ تكرار معالجة الحل غالبا ما يكون عدد قليل من التكرارات لها وبالتالي تعطي قيما دقيقة لجذور المعادلة (4.10). والتي تبرهن أن التقريبات الابتدائية (x_0, y_0) كافية لتقدير الحل الحقيقي.

مثال 3.4

لتكن جملة المعدلتين غير الخطية معطاة بـ:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g(x, y) = \dfrac{x^2}{9} + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

أوجد حل هذه المعادلات بطريقة نيوتن من أجل الحل الابتدائي $(x_0, y_0) = (1,1)$

الحل

في كل تكرار نحسب التصحيح التفاضلي $\delta x, \delta y$ بحل المعادلات الخطية:

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

نستمر بالتكرار حتى يصبح التصحيحين التفاضلين مهملين، ولدينا:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x;\ f_y(x,y) = 2y \\ g_x(x,y) = \dfrac{2}{g}x; g_y(x,y) = 2y \end{cases}$$

وبتعويض $(x_0,y_0) = (1,1)$ في الجملة نجد:

$$f(x_0,y_0) = -2.0\ ;\ g(x_0,y_0) = \frac{1}{9}$$

ومنه :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2/9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-2.0) \\ -1/9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على التقريب الأول:

$$\delta x = 1.1875\ ;\ \delta y = -0.1875$$

$$x_0 + \delta x = 2.1875\ ;\ y_0 + \delta y = 0.8125$$

وبالتالي نجد:

$$f(x_0,y_0) = 1.445;\ g(x_0,y_0) = 0.192$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} 4.375 & 1.625 \\ 0.486 & 1.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.445 \\ -0.192 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على التقريب الثاني للحل:

$$\delta x = -0.322;\ \delta y = -0.0218$$

$$x_0 + \delta x = 1.8655;\ y_0 + \delta y = 0.7907$$

ومنه وبالتعويض نجد:

$$f(x_0, y_0) = 0.1052;\ g(x_0, y_0) = 0.0119$$

وبالتالي

$$\begin{bmatrix} 3.731 & 1.5818 \\ 0.4146 & 1.5818 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1052 \\ -0.0119 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الثالث للحل

$$\delta x = -0.0281;\ \delta y = -0.00015$$

$$x_0 + \delta x = 1.8374;\ y_0 + \delta y = 0.79055$$

$$f(x_0, y_0) = 0.001008\,;\, g(x_0, y_0) = 0.000084$$

ملاحظة:

ما نلاحظه في المثال أنه يمكن طرحه على شكل مسألة هندسية بالشكل:

أوجد التقاطع التربيعي بين المعادلة الأولى للدائرة $x^2 + y^2 = 4$ والمعادلة الثانية وهي القطع الناقص

$$\frac{\mathrm{x}^2}{9} + \mathrm{y}^2 = 1$$

2.2.2 طريقة نيوتن المعدلة باستخدام نشر تايلور التربيعي

يمكن تعديل طريقة نيوتن وذلك بأخذ المشتقات من المرتبة الثانية، هذا يعني أنه إذا أخذنا الحل الابتدائي (x_0, y_0) مع ازدياد $(\delta x, \delta y)$ عندئذ التقريب من المرتبة الثانية لـ $f(x, y)$ و$g(x, y)$ يعطى بالشكل:

$$\begin{cases} \delta f = f_x \delta x + f_y \delta y + \frac{1}{2}[f_{xx}\delta x^2 + 2f_{xy}\delta x\delta y + f_{yy}\delta y^2] \\ \delta \mathrm{g} = \mathrm{g_x}\delta \mathrm{x} + \mathrm{g_y}\delta \mathrm{y} + \frac{1}{2}[\mathrm{g_{xx}}\delta \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{g_{xy}}\delta \mathrm{x}\delta \mathrm{y} + \mathrm{g_{yy}}\delta \mathrm{y}^2] \end{cases} \quad (4.15)$$

إن حل الجملة (4.10) نحصل عليه بتعيين$\delta x, \delta y$ حيث أن: $\delta g, \delta f$ يحقق الشرط:

$$\begin{cases} \delta f = -f(x_0, y_0) \\ \delta g = -g(x_0, y_0) \end{cases} \quad (4.16)$$

وبتعويض(4.16) في (4.15) نجد (4.17):

$$\begin{cases} -f(x_0,y_0) = \left[f_x + \frac{f_{xx}\delta_x}{2} + \frac{f_{yy}\delta_y}{2}\right]\delta x + [f_y + \frac{f_{yy}\delta_y}{2} + \frac{f_{xy}\delta_x}{2}]\delta y \\ -g(x_0,y_0) = \left[g_x + \frac{g_{xx}\delta_x}{2} + \frac{g_{yy}\delta_y}{2}\right]\delta x + [g_y + \frac{g_{yy}\delta_y}{2} + \frac{g_{xy}\delta_x}{2}]\delta y \end{cases} \quad (4.17)$$

إذا كان $\delta y, \delta x$ داخل الأقواس مقربة على الترتيب:

$-f/f_x$ $\quad -f/f_y$ في المعادلة الأولى

$-g/g_x$ $\quad -g/g_y$ في المعادلة الثانية

فإن الجملة تكتب على شكل جملة معادلات خطية لـ$\delta x, \delta y$

$$\begin{cases} -f(x_0,y_0) = \left[f_x - \frac{f_{xx}f}{2} - \frac{f_{yy}f}{2}\right]\delta x + [f_y - \frac{f_{yy}f}{2} - \frac{f_{xy}f}{2}]\delta y \\ -g(x_0,y_0) = \left[g_x - \frac{g_{xx}g}{2} - \frac{g_{yy}g}{2}\right]\delta x + [g_y - \frac{g_{yy}g}{2} - \frac{g_{xy}g}{2}]\delta y \end{cases} \quad (4.18)$$

بحل هذه المعادلات نحصل على$\delta y, \delta x$ والتي نحصل منها عل $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ وهي تقدير جيد لحل جملة (4.10) يعتمد على الدقة نشر تايلور التربيعي على التقريب $(\delta x, \delta y)$ المستخدم في (4.18) إذا كان $|\delta x| < \varepsilon$ أو $|\delta y| < \varepsilon$ فان الإجراءات الكلية تكرر بعد استبدال القيم لـ (y_0, x_0) بـ

$$(y_0 + \delta y, x_0 + \delta x)$$

مثال 4.4

حل جملة المعادلتين غير الخطيتين التاليتين:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g(x,y) = \frac{x^2}{9} + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

علما أن الحل الابتدائي $(x_0, y_0) = (1,1)$

الحل

في كل تكرار أحسب التصحيح التفاضلي $\delta x, \delta y$ بحل المعادلات الخطية

$$\begin{bmatrix} f_x - \frac{f_{xx}f}{2f_x} - \frac{f_{xy}f}{2f_y} & f_y - \frac{f_{yy}f}{2f_y} - \frac{f_{xy}f}{2f_x} \\ g_x - \frac{g_{xx}g}{2g_x} - \frac{g_{xy}g}{2g_y} & g_y - \frac{g_{yy}g}{2g_y} - \frac{g_{xy}g}{2g_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$f_x(x,y) = 2x \ ; \ f_{xx}(x,y) = 2 \ ; f_{xy}(x,y) = 0 \ ; f_y(x,y) = 2y \ ; f_{yy}(x,y) = 2$$

$$g_x(x,y) = \frac{2}{9}x \ ; \ g_{xx}(x,y) = \frac{2}{9} \ ; g_{xy}(x,y) = 0 \ ; g_y(x,y) = 2y \ ; g_{yy}(x,y) = 2$$

بما أن $(x_0, y_0) = (1,1)$

$$f(x_0, y_0) = -2; \ g(x_0, y_0) = \frac{1}{9}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{2}{2} - \frac{-2}{2} - 0 & 2 - \frac{2}{2} - \frac{-2}{2} - 0 \\ \frac{2}{9} - \frac{2/9}{2} - \frac{1/9}{2/9} - 0 & 2 - \frac{2}{2} - \frac{1/9}{2} - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الأول:

$$\delta x = 0.0477; \ \delta y = -0.0831$$

$$x_0 + \delta x = 1 - 8393 \ ; \ y_0 + \delta y = 7919$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$f(x_0, y_0) = -0.0101; \ g(x_0, y_0) = 0.0030$$

لقد حصلنا على هذه التقريبات بتكرارين من الطريقة المعدلة فقط بينما في غالب الأحيان نحتاج لثلاثة تكرارات في طريقة نيوتن العادية للحصول على تلك التقريبات.

3.2.2 تعميم طريقة نيوتن في حل جملة معادلات غير خطية

لدينا جملة المعادلات غير الخطية من الشكل:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (4.19)$$

يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل الجبري $F(X) = 0$، حيث:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} ; F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

ولحل الجملة (4.19) باستخدام طريقة نيوتن للتقريبات المتتالية $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

وبفرض أنه لدينا التقريب k لأحد الجذور المنعزلة للمعادلة (4.20) عندئذ يكتب الحل الدقيق بالشكل:

$$x = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \qquad (4.21)$$

حيث

$\varepsilon^{(k)} = \left(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)}\right)$ هو قيمة الخطأ في تقريب متتالية الحلول التقريبية للحل الدقيق، لأجل هذا نعوض (4.21) في (4.20) فنجد:

$$f\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = 0 \qquad (4.22)$$

لنفرض أن التابع $F(X)$ قابل للاشتقاق و مشتقاته مستمرة في ساحة محدبة ما تحوي على X و$X^{(k)}$ ولنفرض الطرف الاول للمعادلة (4.22) بالنسبة لقوى الخطأ الصغير $\varepsilon^{(k)}$ مكتفين بالحدود الخطية إذا:

$$f\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\varepsilon^{(k)} = 0 \qquad (4.23)$$

أو بشكل مفصل للنشر فنجد:

$$f_1\left(x_1^{(k)} + \varepsilon_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \varepsilon_2^{(k)}, \dots\dots, x_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right) = f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots\dots, x_n^{(k)}\right)$$

$$+ f'_{1x_1}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)} + f'_{1x_2}\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{k}$$

$$+ \dots + f'_{1x_n}\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)} = 0$$

$$f_2\left(x_1^{(k)}+\varepsilon_1^{(k)},x_2^{(k)}+\varepsilon_2^{(k)},\dots..,x_n^{(k)}+\varepsilon_n^{(k)}\right)=f_2\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots..,x_n^{(k)}\right)$$

$$+f'_{2x_1}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)}+f'_{2x_2}\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{k}$$
$$+\dots+f'_{2x_n}\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)}=0$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$f_n\left(x_1^{(k)}+\varepsilon_1^{(k)},x_2^{(k)}+\varepsilon_2^{(k)},\dots..,x_n^{(k)}+\varepsilon_n^{(k)}\right)=f_n\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots..,x_n^{(k)}\right)$$

$$+f'_{nx_1}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)}+f'_{nx_2}\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{k}+\dots+$$
$$f'_{nx_n}\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\varepsilon_n^{(k)}=0 \qquad (4.24)$$

إن جملة المعدلات لـ(4.24) تؤدي إلى مشتقة $F'(X)$ كمصفوفة المشتقات الجزئية ومن المرتبة الأولى للتوابع $f_1,f_2,\dots..,f_n$ للمتغيرات $x_1,x_2,\dots,x_n$ على الترتيب. ونكتب:

$$F'(X)=J(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

و تكتب أيضا من الشكل المختصر:

$$F'(X)=J(X)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right];(i,j=1,2,\dots..,n) \quad (4.26)$$

إن جملة المعادلات (4.24) هي جملة المعادلات الخطية بالنسبة لـ ε_i^k حيث $(i=1,2,\dots..,n)$ ذات المصفوفة $J(x)$ وبالتالي يمكن كتابة (4.23) بالشكل:

$$F(X^k)+J(X^k)\varepsilon^k=0 \qquad (4.27)$$

نفرض أن $J\left(X^{(k)}\right)$ مصفوفة نظامية ومحددها لا يساوي الصفر، إذا نحصل على:

$$\varepsilon^{(k)}=-J^{-1}\left(X^{(k)}\right)F\left(X^{(k)}\right) \qquad (4.28)$$

وبالتعويض نجد:

$$X^{(k+)1}=X^{(k)}-J^{-1}\left(X^{(k)}\right)F\left(X^{(k)}\right);(k=0,1,2,\dots) \quad (4.29)$$

ونبدأ بالتقريب الابتدائي $X^{(0)}$ لإيجاد بقية التقريبات المتتالية

مثال 5.4

أوجد الحلول التقريبية الموجبة لجملة المعادلتين التاليتين:

$$F(X) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + 3\,ln\,x_1 - x_2^2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 9 \end{cases}$$

الحل

إن المنحنيات لهاتين المعادلتين تقريبا في النقاط $M_1(1.4; -1.5); M_2(3.4; 2.2)$

نختار شعاع الحل الابتدائي $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix}$

لنحسب التقريب التالي بأربعة أرقام عشرية وبأخذ

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$F(X^0) = \begin{bmatrix} 3.4 + 3log3.4 - 2.2^2 \\ (2).(3.4)^2 - (3.4)(2.2) - (5).(3.4) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1544 \\ -0.3600 \end{bmatrix}$$

نبحث عن المصفوفة الجاكوبيان

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3M}{x_1} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{bmatrix}$$

و حيث أن$M = 0.43429$ فإن:

$$J\left(X^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(3).(0.43429)}{3.4} & (-2)(2.2) \\ (4)(3.4) - 2.2 - 5 & -3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3832 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = det\,J\left(X^{(0)}\right) = 23.4571 \neq 0$$

المصفوفة إذن هي مصفوفة نظامية لنأخذ مقلوبها

$$J^{-1}(X^{(0)}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{bmatrix}$$

حسب العلاقة (4.29) فإن:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix} - \frac{1}{23.4571}\begin{bmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1544 \\ -0.3600 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix} - \frac{1}{23.4571}\begin{bmatrix} -2.10896 \\ -1.48604 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0899 \\ 0.0633 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4899 \\ 2.2633 \end{bmatrix}$$

i	x_1	$\varepsilon_1 = \Delta x_1$	x_2	$\varepsilon_2 = \Delta x_2$
0	3.4	0.0899	2.2	0.0633
1	3.4899	−0016	2.2633	−0.0012
2	3.4891	−0.0008	2.2621	−0.0005
3	3.4875	−0.00005	2.2616	−0.00002

إذا توقفنا عند التقريب $X^{(3)}$ وقمنا بتعويض قيمتي هذا الشعاع في الجملة $F(X)$ نجد:

$$x_1 = 3.4875 \quad , x_2 = 2.2616$$

$$F(X^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.00003 \end{bmatrix}$$

مثال 6.4

باستخدام طريقة نيوتن أوجد الحل الموجب التقريبي لجملة المعادلات التالية:

$$F(X) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

وذلك بأخذ الحل الابتدائي $X^{(0)} = (0.5; 0.5; 0.5)$

الحل

$$F(X) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$F\left(X^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}x^2+y^2+z^2-1\\2x^2+y^2-4z\\3x^2-4y+z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.25\\-1.25\\-1.00\end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة الجاكوبيان تعطى بـ

$$J(X)=\begin{bmatrix}2x & 2y & 2z\\4x & 2y & -4\\6x & -4 & 2z\end{bmatrix}$$

لدينا

$$J\left(X^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -4\\3 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$det\,J\left(X^{(0)}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -4\\3 & -4 & 1\end{vmatrix}=-40\neq 0$$

لنبحث عن مقلوب المصفوفة الجاكوبية

$$J^{-1}\left(X^{(0)}\right)=-\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-15 & -5 & -5\\-14 & -2 & 6\\-11 & 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\\frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-3}{20}\\\frac{11}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{1}{40}\end{bmatrix}$$

حسب العلاقة (4.29) فإن التقريب الأول $X^{(1)}$ يعطى بـ:

$$X^{(1)}=X^{(0)}-J^{-1}\left(X^{(0)}\right)f\left(X^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\\frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-3}{20}\\\frac{11}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{1}{40}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.25\\-1.25\\-1.00\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.375\\0\\-0.125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.875\\0.500\\0.375\end{bmatrix}$$

نحسب التقريب الثاني $X^{(2)}$:

$$F\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}(0.875)^2+(0.500)^2+(0.375)^2-1\\2.(0.875)^2+(0.500)^2-4.(0.375)\\3.(0.875)^2-4.(0.500)+(0.375)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.15625\\0.28125\\0.43750\end{bmatrix}$$

$$J\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}2.(0.875) & 2.(0.500) & 2.(0.375)\\4.(0.875) & 2.(0.500) & -4\\6.(0.875) & -4 & 0.750\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\3.500 & 1 & -4\\2.250 & -4 & 0.750\end{bmatrix}$$

ومنه

$$det\,J\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\3.500 & 1 & -4\\2.250 & -4 & 0.750\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\1.750 & 0 & -4.750\\12.250 & 0 & 3.750\end{vmatrix}=-64.75\neq 0$$

ومنه:

$$J^{-1}\left(X^{(1)}\right)=-\frac{1}{64.75}\begin{bmatrix}-15.25 & -3.75 & -4.75\\-23.625 & -2.6250 & 9.625\\-19.25 & 12.25 & -1.75\end{bmatrix}$$

إذا:

$$\begin{aligned}X^{(2)}&=X^{(1)}-J^{-1}\left(X^{(1)}\right)F\left(X^{(1)}\right)\\&=\begin{bmatrix}0.875\\0.500\\0.375\end{bmatrix}+\frac{1}{64.75}\begin{bmatrix}-15.25 & -3.75 & -4.75\\-23.625 & -2.6250 & 9.625\\-19.25 & 12.25 & -1.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.15625\\0.28125\\0.43750\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0.875\\0.500\\0.375\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.08519\\0.00338\\0.00507\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.78981\\0.49662\\0.36993\end{bmatrix}\end{aligned}$$

وبشكل مشابه نحسب التقريب الثالث أي $X^{(3)}$ يكتب كمايلي:

$$X^{(3)}=\begin{bmatrix}0.78521\\0.49662\\0.36992\end{bmatrix}\;;F(X^{(3)})=\begin{bmatrix}0.00001\\0.00004\\0.00005\end{bmatrix}$$

مثال 7.4

نحل نفس **المثال 2.4** الذي قمنا بحله بطريق النقطة الثابتة

$$F(X)=\begin{cases} 3x_1-cosx_2x_3-\dfrac{1}{2}=0 \\ x^2{}_1-81(x_2+0.1)^2+sinx_3+1.06=0 \\ e^{-x_1x_2}+20x_3+\dfrac{10\pi-3}{3}=0 \end{cases}$$

$$D=\{x_1,x_2,x_3)^t;-1\le x_i\le 1\};X^{(0)}=(0.1,0.1,0.1)$$

الحل

$$J(X)=\begin{bmatrix} 3 & x_3\sin x_2x_3 & x_2\sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2-0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_2x_3} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق العلاقة (4.29) المعطاة بـ:

$$X^{(k+)1}=X^{(k)}-J^{-1}\left(X^{(k)}\right)F\left(X^{(k)}\right);(k=0,1,2,\dots)$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right\|$
0	0,1	0,1	0,1	0
1	0,5003702	0,01946686	−0,52152047	0,422
2	0,5000459	0,00158859	−0,52355711	$1.79.10^{-2}$
3	0,5000000	0,00001244	−0,52359845	$1.58.10^{-3}$
4	0,5000000	0,00000000	−0,52358877	$1.24.10^{-5}$
5	0,5000000	0,00000000	−0,52359877	0

ملاحظة

نلاحظ أن طريقة نيوتن لحل جمل المعادلات غير الخطية $F(X)=0$ سريع جدا، لنحصل في الأخير على الحل الدقيق، لكن حسابيا هي مكلفة جدا للوقت خاصة إذا كان عدد المعادلات كبير، لذلك من الجيد وفي كل الطرق أن نحاول تقليص عدد المعادلات التي يجب حلها على قدر المستطاع، وذلك تسهيلا للحسابات وتقليصا للوقت.

قائمـــة المراجـــع

باللغة العربية

1. جان بول مندري، ترجمة أبو بكرخالد سعد الله، الاحتمالات: محاضرات وأعمال موجهة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993.

2. السعدي رجال الاحتمالات، نظرية الاحتمالات، الجزء الأول: مبادئ الحساب الاحتمالي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995.

3. السعدي رجال الاحتمالات ،نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني: التوزيعات الاحتمالية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995.

4. سيمور ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 1995.

5. موراي سبيجل، جون شيلر وألو سرينيفاسان، ترجمة محمود على أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، الاحتمالات والإحصاء، ملخصات شوم، الطبعة الأولى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.

6. عبد الحفيظ مصطفى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقاته، 2008.

7. مبارك أسبر ديب، مبادئ في الإحصاء و الاحتمالات، جامعة تشرين اللاذقية، 2009.

8. جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، 2011.

9. لحسن عبد الله باشيوة، مقدمة في الاحتمالات، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2014.

باللغات الأجنبية

10. M. Atteia, M. Padel: Elements d'analyse numerique, Ceradues-Editions.

11. J. Baranger: Introduction a l'analyse numerique, Ed. Hermann.

12. M. Boumahrat, A. Bourdin: Methodes numeriques appliquees. Ed. OPU 1983.

13. B. Demodovitch, I. Maron: Elements de calcul numerique, Ed. Mir Mosco.

14. Ph. G. Ciarlet: Introduction a l'analyse numerique matricielle et a l'optimisation, Dunod, Paris.

15. Curtis F. Gerald, P. O. Wheatley: Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Company.

16. P. Lascaux, J. Theodor: Analyse numerique appliquee a l'art de l'ingenieur, Tomes I et II, Masson, Paris.

17. G. Meurant: Resolution numerique des grands systemes, Ed. Stanford University.

18. P. Lascaux, J. Theodor: Analyse numerique appliquee a l'art de l'ingenieur, Tomes I et II, Masson, Paris.

20. Grinstead Charles M. and Laurie Snell J., Introduction to Probability, Swarthmore College, 2005.

21. Kroese D. P., A Short Introduction to Probability, The University of Queensland, 2018.

22. Degrave C. and Degrave D., Précis de mathématiques Probabilités-Statistiques 1^{ere} et 2^{eme} années: Cours-Méthodes-Exercices résolus, Edition Bréal, 2004.