République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques

THÈSE
Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT EN SCIENCES
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème

Résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordres fractionnaires

Présenté Par :
MEDKOUR Mohammed

Devant le jury :

BOUMAZA Nouri	*Professeur*	*Univérsité de Tébessa*	*Président*
REBIAI Belgacem	*Professeur*	*Univérsité de Tébessa*	*Rapporteur*
BAHI Mohamed Cherif	*MCA*	*Univérsité de Tébessa*	*Co- Rapporteur*
SAOUDI Khaled	*Professeur*	*Univérsité de Khanchela*	*Examinateur*
CHAOUI Abdelrazek	*Professeur*	*Université de Guelma*	*Examinateur*
CHIHEB Tarek	*MCA*	*Université de Guelma*	*Examinateur*
BOUAZIZ Khalifa	*MCA*	*Univérsité de Tébessa*	*Invité*

Date de soutenance : ...../...../.....

Table des matières

1 Préliminaires **9**

1.1 Espaces L^p 9

1.2 L'espace de fonctions absolument continues 11

1.2.1 Espace absolument continue 11

1.2.2 Caractérisation des fonctions absolument continues 12

1.3 Espace de Sobolev 12

2 Intégrale et Dérivation fractionnaire **15**

2.1 Intégral fractionnaire 15

2.1.1 Fonction de Gamma 15

2.1.2 Fonction Bêta 17

2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler 18

2.2 L'intégrales fractionnaire sur un intervalle 19

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 21

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 24

3 Résolution d'une equation aux dérivées par différentes methodes **30**

3.1 La méthode de transformation de Fourier 31

3.1.1 Transformée de Fourier 31

3.1.2 Régularité et transformée de Fourier 32

3.2 Méthode de la transformée de Laplace 38

3.2.1 Transformée de Laplace 38
3.2.2 Application de la méthode de la transformée de Laplace 40
3.3 Méthode de la fonction exponentielle et l'analyse de la transformée de Laplace . . 44
3.4 Méthode de décomposition adomienne 47
3.5 La méthode de développement en série 53

4 Existence locale et explosion de la solution d'une équations différentièlle fractionnaire avec un terme source non linéaire 57

4.1 Introduction 57
4.2 Explosion de la solution 59
4.3 Existence Local 65
4.4 Taux d'explosion de la solution pour $\theta = 2$ 69
.

Remerciements

Au terme de cette thèse, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, **Rebiai Belgacem**, et à mon co-directeur de thèse, **Bahi Mohamed Cherif**, pour leur encadrement bienveillant, leur conseils précieux et leur rigueur scientifique. Leurssoutien et leurs disponibilités ont été essentiels dans la réalisation de cette recherche.

Je remercie Monsieur le Professeur **Boumaza Nouri**, Président du jury, Monsieur le Professeur **Saoudi Khaled,** enseignants à l'université de Khenchela, Monsieur le Professeur **Chaoui Abdelrazek,** Monsieur le Docteur **Bouaziz khalifa et** Monsieur le Docteur **Chiheb Tarek,** enseignants à l'université 8 Mai 1945 Guelma**,** tous des examinateurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, ainsi que pour leurs remarques constructives qui ont enrichi cette étude.

Un grand merci à mes collègues et amis. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à ma famille, qui a toujours cru en moi et m'a soutenu avec patience et encouragement dans les moments de doute comme dans les réussites. Leur amour et leur confiance ont été une force précieuse.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à cette aventure académique et humaine.

Medkour Mohammed

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'étude de l'existence locale et de l'explosion des solutions d'une équation différentielle fractionnaire avec un terme source non linéaire. L'accent est mis sur l'existence et l'explosion de solutions dans des conditions spécifiques. Concernant l'existence locale, on établit des critères garantissant l'existence d'une solution sur un intervalle de temps fini, en démontrant que les solutions existent sous certaines hypothèses avant de potentiellement exploser. Aussi, pour l'explosion de la solution, on analyse les circonstances dans lesquelles celle-ci explose en un temps fini, en décrivant les conditions mathématiques menant à ce phénomène. Finalement, on analyse le taux d'explosion sous certaines conditions, en fournissant des estimations mathématiques de la vitesse à laquelle la solution diverge à l'approche du temps d'explosion.

Mots clés : Dérivées fractionnaires, Equations aux dérivées partielles fractionnaires, Existence locale, Explosion.

Abstract

This thesis focuses on the study of the local existence and blow-up of solutions to a fractional differential equation with a nonlinear source term. The focus is on the existence and explosion of solutions under specific conditions. Concerning local existence, we establish criteria ensuring the existence of a solution over a finite time interval, demonstrating that solutions exist under certain assumptions before potentially blowing up. However for the blow-up of the solution, we analyze the circumstances under which it blows up in a finite time, describing the mathematical conditions leading to this phenomenon.

Keywords : Fractional derivatives, Fractional partial differential equations, Local existence, Blow-up.

الملخص

تُركز هذه الأطروحة على دراسة الوجود المحلي وانفجار الحلول لمعادلة تفاضلية كسرية ذات حد مصدر غير خطي. وينصبّ التركيز على وجود وانفجار الحلول في ظل ظروف محددة. وفيما يتعلق بالوجود المحلي، نُرسي معايير تضمن وجود حل خلال فترة زمنية محدودة، مُثبتين وجود الحلول في ظل افتراضات مُعينة قبل انفجارها المُحتمل. أما بالنسبة لانفجار الحل، فنُحلل الظروف التي يُفجر فيها خلال فترة زمنية محدودة، مُوضحين الظروف الرياضية المُؤدية إلى هذه الظاهرة.

الكلمـات المفتاحيـة: المشـتقات الكسـرية، المعـادلات التفاضـلية الجزئية الكسرية، الوجود المحلي، الانفجار.

Introduction

Depuis plusieurs décennies, les équations différentielles jouent un rôle central dans la modélisation des phénomènes physiques, biologiques et sociaux. Avec l'émergence des concepts fractionnaires, la théorie des dérivées et des intégrales a été étendue au-delà des ordres entiers, ouvrant ainsi la voie à des applications plus riches et complexes. Les opérateurs fractionnaires, tels que ceux de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov, permettent de mieux capturer les dynamiques à mémoire et les phénomènes non locaux qui apparaissent dans des systèmes à caractère complexe.

Le calcul fractionnaire, qui étend les concepts de dérivée et d'intégrale aux ordres non entiers, est une branche des mathématiques qui a évolué sur plusieurs siècles. Ses origines remontent aux pionniers du calcul différentiel et intégral, et il a connu un développement significatif grâce à des contributions majeures de mathématiciens au fil du temps.

L'idée d'une dérivation d'ordre fractionnaire a été suggérée pour la première fois par Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$, l'un des cofondateurs du calcul différentiel et intégral. En 1695, dans une correspondance avec Guillaume de l'Hôpital, Leibniz pose une question audacieuse :

"Que signifie si $\frac{d^n}{dx^n}$ avec $n = \frac{1}{2}$"

Cette question marque le début de la réflexion sur les dérivées d'ordre fractionnaire. À l'époque, la réponse restait purement spéculative, et les outils mathématiques nécessaires à une définition rigoureuse n'étaient pas encore développés.

Au XVIIIe siècle, plusieurs mathématiciens s'intéressent à cette question, mais c'est au XIXe siècle que le calcul fractionnaire commence à être formalisé.

Joseph Fourier $(1768 - 1830)$ introduit dans ses travaux sur la théorie de la chaleur des opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire.

Joseph Liouville $(1809 - 1882)$ et Bernhard Riemann $(1826 - 1866)$ développent étendent l'intégrale et la dérivationd classique.

Ces travaux jettent les bases du calcul fractionnaire, bien que son utilité reste à ce stade largement théorique.

À partir du XXe siècle, plusieurs variantes de la dérivée fractionnaire sont introduites pour répondre à différents besoins mathématiques et physiques :

Marcel Riesz ($1886-1969$) propose une extension alternative de la dérivée fractionnaire en lien avec l'analyse harmonique.

Paul Lévy ($1886-1971$) et d'autres mathématiciens développent des liens entre les dérivées fractionnaires et les processus stochastiques.

Bruno Ross (années 1940) travaille sur la dérivée fractionnaire en lien avec les séries de Taylor généralisées.

Michele Caputo (1967) introduit la dérivée de Caputo, une variante plus adaptée aux modèles physiques et aux problèmes aux conditions initiales.

La dérivée de Caputo devient particulièrement populaire en physique et ingénierie, car elle permet de mieux modéliser les phénomènes ayant une mémoire (effets historiques dans les matériaux, écoulements viscoélastiques, etc).

Cette thèse s'intéresse à l'étude de l'existence locale et de l'explosion des solutions d'une équation différentielle fractionnaire avec un terme source non linéaire. Notre thése se compose de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires fondamentaux sur les espaces fonctionnelles : de Lebesgue, des fonctions absolument continues et de Sobolev et on montionne le théorème de point fixe de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les notions essentielles à la compréhension du calcul fractionnaire, en présentant les définitions et les propriétés des fonctions gamma, bêta et de Mittag-Leffler et en mettant l'accent sur les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, et de Caputo.

Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques méthodes de résolution analytiques de problèmes fractionnaires.

Dans le dernier chapitre, nous nous concentrons sur l'étude d'une équation aux dérivées partielles fractionnaires avec un terme source non linéaire.

Nous mentionnons la notion de la solution douce locale et son existence, puis sous quelles condtions la soltion global explose , passant sur la notion de taux de l'explosion dans le cas particulier où $\theta = 2$.

L'objectif principal de ce travail est de fournir une analyse approfondie des propriétés des

opérateurs fractionnaires et de leur application aux solutions d'équations différentielles. En particulier, nous espérons contribuer à une meilleure compréhension des dynamiques non linéaires associées aux mémoires fractionnaires.

Chapitre 1

Préliminaires

On fait un rappelle de quelques concepts et résultats préliminaires utilent pour notre étude. On commence par quelques concepts et observations fondamentaux : espaces fonctionnels et inégalités . Ensuite, on expose brièvement l'intégration et la dérivation fractionnaire (non entière) en montionnant les fonctions liées au calcul fractionnaire : Bêta et Mittag-Leffler.

1.1 Espaces $\mathbf{L}^p$

Définition 1.1 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On note :*

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} d\mu,$$

pour $p \in [1, +\infty[$; qu'on appelle norme L^P de f, et lorsque $p = \infty$

$$\|f\|_\infty := \inf \{a > 0; \mu (\{|f| \geq a\}) = 0\},$$

qu'on appelle supremum essentiel de f. On remarquera que

$$|f| \leq \|f\|_{+\infty} ; \mu - pp.$$

Définition 1.2 *$(p \in [1, +\infty[) \cdot$ $L^p(E)$, denote l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs*

dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *telles que* $|f|^p$ *est* $\mu-$*intégrable, i.e.*

$$\|f\|_p < +\infty$$

Définition 1.3 $(p = +\infty)\cdot$*On note* $L^\infty(\mu)$, *l'ensemble de toutes les fonctions mesurables* f *à valeurs dans* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *qui sont* $\mu-$*essentiellement bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe* $a > 0$, *pour lequel* $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, *soit encore telles que*

$$\|f\|_{+\infty} < +\infty.$$

Proposition 1.1 *Pour tout* $p \in [1, +\infty]$, L^p *est un espace Banach.*

Inégalités utiles

Soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a

• **Inégalité de Hölder**

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

• **Inégalité de Young**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

• **Inégalité de** $\varepsilon-$**Young**

Soient $u \geq 0$, $v \geq 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, alors on a

$$uv \leq \varepsilon u^P + C(\varepsilon)\, v^q.$$

• **Inégalité de Ju**

Notons par $x = (x_1; x_2; \cdots; x_n)$, le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Soit u une fonction définie de Ω á valeurs dans $\mathbb{R}$. Définissons aussi le Laplacien de u,

$$\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x).$$

Lemme 1.1 (*Inégalité de Cordoba*)*Soient* ϕ *une fonction positive de Schwartz,* $\delta \in [0.2]$ *et* $q \geq 1.$*,On obtient*

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \phi^q \leq q\phi^{q-1} (-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \phi.$$

1.2 L'espace de fonctions absolument continues

Définition 1.4 *Un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *est un domaine si :*

i− Ω *un ouvert dans* $\mathbb{R}^n$,

ii− Ω *un connexe dans* $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5 *Un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *est domaine On définit respectivement les espaces* $C^0(\Omega), C^m(\Omega) \quad m \in \mathbb{N}$ *et* $C^\infty(\Omega)$ *par :*

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\},$$

$$C^m(\Omega) = \left\{ f \in C^{m-1}(\Omega) : D^\alpha \in C^0(\Omega), |\alpha| = m \right\}, m \geq 1,$$

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

1.2.1 Espace absolument continue

Définition 1.6 *On dit que* $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, *est absolument continue si pour tout* $\varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que pour toute partition* $]\alpha_k, \beta_k[_{k=1}^n$ *de* $[\alpha, \beta]$ *si*

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} |g(\beta_k) - g(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Notation 1.1 *On note* $AC([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonction absolument continue.*

Proposition 1.2 (i) *Si* f *absolument continue alors elle est uniforérmement continue.*

(ii) *Si* g *absolument continue, alors* g *à variation bornée.*

(iii) *Si* $f,g \in AC[\alpha,\beta]$, *donc* $f+g$ *et* $\lambda f \in AC[\alpha,\beta]$.

(iv)*Si* $f \in AC[\alpha,\beta]$, *alors ils existent* $\varphi,\psi \in AC[\alpha,\beta]$ *croissantes telles que*

$$f = \psi - \varphi.$$

Théorème 1.1 *Soit* $g \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$, *alors* $\phi(x) = \int_0^x g(t)\,dt \in AC[\alpha,\beta]$.

- $AC[\alpha,\beta]$ *munit de la norme* $\|.\|_{AC}$ *est un espace de Banach, avec*

$$\|g\|_{AC} = |g(\alpha)| + \int_\alpha^\beta g'(s)\,ds.$$

1.2.2 Caractérisation des fonctions absolument continues

Proposition 1.3

$$f \in AC([\alpha,\beta],\mathbb{R}) \Longleftrightarrow g(x) = g(\alpha) + \int_\alpha^\beta g'(s)\,ds \quad g \in L^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}).$$

Définition 1.7 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note par* $AC^n([\alpha,\beta])$, *l'espace des fonctions à valeurs complexes qui ont dérivées contiunes jusque à l'order* $n-1$*sur* $[\alpha,\beta]$ *avec* $g^{(n-1)} \in ([a,b])$

$$AC^n([\alpha,\beta],\mathbb{C}) = \left\{g : [\alpha,\beta] \longmapsto \mathbb{C} : g,...,g^{(n-1)} \text{ sont absolument continue}\right\},$$

$$g \in AC([\alpha,\beta],\mathbb{R}) \Longleftrightarrow g(x) = \sum \frac{(x-\alpha)^k}{k!} g^{(k)}(a) + \int_\alpha^x g^{(n)}(s)\,ds.$$

1.3 Espace de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Les fonctions test

Définition 1.8 *$D(\Omega)$ est l'espace des fonctions test définit par*

$$D(\Omega) = \left\{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \mid \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}.$$

où : $C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \cap_{m=0}^\infty C^m(\Omega) : \varphi \text{ a support compact}\}$

La distribution

Définition 1.9 *$D'(\Omega)$ L'espace de toutes les distributions T définies sur Ω :*

$$T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle = T(\varphi),$$

Linéarité :Si T et S sont deux distributions,la somme $T+S$ est définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T+S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle,$$

et pour $\lambda \in K$ on définit λT par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle.$$

Continuité : Soit $(T_n)_{n\in N}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que (T_n) tend vers T dans $D'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle, \ n \to \infty.$$

Distribution régulière

Définition 1.10 *Soit $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$. La distribution :*

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \text{pour tout } x \in D(\Omega),$$

est appelèe distribution régulière associèe à la fonction f.

Définition 1.11 *On appelle espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,/\, \forall \alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n,}\right) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$, .

L'espace vectoriel $W^{m,p}(\Omega)$ est munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L\infty}, \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on a $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Proposition 1.4 *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$, est de Banach. L'espace $H^m(\Omega)$ est de Hilbert .*

Théorème de Point fixe

Soit X un espace de Banach, et $T : X \to X$.

Définition 1.12 *T est contractante si T est lipschitzienne de rapport $K < 1$:*

$$\forall x, y \in X : \|T(x) - T(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Théorème 1.2 *[Kilbas et al.2006]Si $T : X \to X$ est contractante alors $\exists! u^* \in X$ tel que :*

$$Tu^* = u^*.$$

De plus, Si $T^0 = T$ et $T^k = T\ T^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; alors pour tout $u_0 \in X$,

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\| T^k u_0 - u^* \right\| = 0.$$

Chapitre 2

Intégrale et Dérivation fractionnaire

Aujourd'hui, le calcul fractionnaire et les équations différentielles fractionnaires (EDF) fournissent des outils puissants pour comprendre et décrire des phénomènes complexes avec mémoire et propriétés non locales. Les EDF ont joué un rôle important dans l'ingénierie, la science et l'économie. Récemment, de nombreuses activités se sont concentrées sur les équations de diffusion, car ces équations ont de nombreuses applications intéressantes.

2.1 Intégral fractionnaire

2.1.1 Fonction de Gamma

Définition 2.1 *Pour $Re(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

avec

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(0^+\right) = +\infty,$$

Lemme 2.1 *$i-$ pour $0 < z < 1$, $\Gamma(z)$ est monotone et strictement décroissante*

$ii-$ On a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Preuve qu'on peut démontré comme suit

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{b\longrightarrow+\infty}\int_0^b t^z e^{-t}dt \\ &= \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left[-zt^{z-1}e^{-t}\right]_0^b + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).\end{aligned}$$

■

Et en particulier

· $\Gamma(1) = 1$

· $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1) = n!$

· Pour $z = \frac{1}{2}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

· Pour $z = \frac{3}{2}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

· Pour $z = -n$,on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(-n) &= -\frac{\Gamma(1-n)}{n} \\ &= \frac{\Gamma(2-n)}{n(n-1)} = -\frac{\Gamma(3-n)}{n(n-1)(n-2)} = \cdots = (-1)^n\frac{\Gamma(0^+)}{n!} = (-1)^n\infty.\end{aligned}$$

Pour : $-n < z < -(n-1)$, On obtient :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}.$$

Posons $z + n = \alpha$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)} \\ &= \frac{(-1)^n\Gamma(z+n)}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\cdots(n-\alpha)},\end{aligned}$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \text{ pour un } z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2.1 *On peut réprésenté la fonction Gamma comme une limite :*

$$\Gamma(z) = \lim_{z \longrightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z\,(z+1)\,(z+2)\cdots(z+n)}.$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2 *Pour $z, w \in \mathbb{R}$ tels que $z > 0$ et $w > 0$, on définit la fonction Bêta comme suit*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{w-1}\,dt.$$

Propriétés de la fonction Bêta :

Proposition 2.2 *Si $t, s > 0$,alors :*

$$B(t,s) = B(s,t),$$

et

$$B(t,s) = \frac{t-1}{t+s-1} B(t,s-1).$$

Proposition 2.3 *On a :*

$$B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\,\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}.$$

Preuve Premiére méthode :[Jacobian].On a :

$$\begin{aligned} \Gamma(t)\,\Gamma(s) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{t-1}d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{s-1}ds\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(\tau+u)}t^{z-1}s^{w-1}dsdt. \end{aligned}$$

Pour : $\tau + u = x, \tau = xy$,on a : $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$

et $dud\tau = xdxdy$, Il s'en suit

$$\begin{aligned}\Gamma(t)\Gamma(s) &= \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-x}(xy)^{t-1}x^{t-1}(1-y)^{s-1}xdxdy \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t+s-1}dx\right)\left(\int_0^1 y^{t-1}(1-y)^{s-1}dy\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\Gamma(t)\Gamma(s) = \Gamma(t+s)B(t,s).$$

Deuxième méthode :

Considérons l'intégrale suivante

$$h_{t,s}(\tau) = \int_0^{\tau}\rho^{t-1}(1-\rho)^{s-1}d\rho,$$

on voit bien que

$$h_{t,s} = \rho^{t-1} * (1-\rho)^{s-1},$$

et on a

$$h_{t,s}(1) = B(t,s).$$

■

2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 2.3 *La fonction Mittag-Leffler à un paramètre est définie par*

$$E_\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad \mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta), > 0\ , \beta \in \mathbb{C}.$$

On a

$$E_{0,1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(1)}=\sum_{k=0}^{\infty}u^k,$$

$$E_{1,1}(u)=e^u,$$

$$E_{1,2}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^u-1}{u},$$

$$E_{1,3}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(k+3)}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-u-1}{u^2}.$$

et en géneral :

$$E_{1,p}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(k+p)}=\frac{1}{u^{p-1}}\left[e^u-\sum_{k=0}^{k-2}\frac{u^k}{k!}\right],$$

$$E_{2,1}\left(u^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\cosh(u),$$

$$E_{2,2}\left(u^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(u)}{u}.$$

Les fonctions hyperboliques généralisées d'ordre n sont représentées ci dessous :

$$z^{r-1}E_{n,r}(z^n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!},\qquad(r=1,2...,n).$$

2.2 L'intégrales fractionnaire sur un intervalle

Soit $g\in C[\alpha,\beta]$. On pose

$$\left(I_{+a}^{(1)}g\right)(\rho)=\int_{\alpha}^{\rho}g(\tau)\,d\tau.$$

Pour une primitivede de g est donnée par l'expression

$$\begin{aligned}\left(I_{+a}^{(2)}g\right)(\rho) &= \int_{\alpha}^{\rho} d\rho_1 \int_{\alpha}^{\rho_1} g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\rho} (\rho-\tau)\, g(\tau)\, d\tau,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left(I_{+a}^{(3)}g\right)(\rho) &= \int_{a}^{\rho} d\rho_1 \int_{a}^{\rho_1} dt_2 \int_{a}^{\rho_2} g(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\rho} (\rho-\tau)^2\, g(\tau)\, d\tau.\end{aligned}$$

Et par récurrence, on a

$$\left(I_{+a}^{n}g\right)(\rho) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{\alpha}^{x} \frac{g(\rho)}{(x-\rho)^{1-n}} d\rho,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$\left(I_{b-}^{n}g\right)(\rho) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_{b}^{\rho} \frac{g(\tau)}{(\rho-\tau)^{1-n}} d\tau,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette formule calcule n-fois l'intégrale répétée d'une fonction causale g.

Si on remplace la factorielle par Gamma, on trouve la généralisation a un ordre réel positif :

$$\left(I_{+a}^{(n)}g\right)(\rho) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{\rho} \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 2.4 *Soit $g \in C[\alpha, \beta]$. Les intégrales*

$$\left(I_{a^+}^{(\alpha)}g\right)(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{\rho} \frac{g(\tau)}{(\rho-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,\ \ (\alpha > 0)$$

et

$$\left(I_{b-}^{(\alpha)}g\right)(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\rho}^{\beta} \frac{g(\tau)}{(\tau-\rho)^{1-\alpha}} d\tau,\ \ (\alpha > 0)$$

sont appelées intégrale fractionnaire à gauche et à droite d'ordre α de Riemann-Liouville.

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.5 *Soit g intégrable sur $[\alpha, \rho]$, alors la dérivée d'ordre μ, avec $n-1 \leq \mu < n$, de Riemann-Liouville est définie par*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a|\rho} g(\rho) &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{d\rho^n} \int_{\alpha}^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\mu-1} g(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{d^n}{d\rho^n} \left(I^{n-\mu} g(\rho) \right). \end{aligned}$$

Exemple 2.1 *On a*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\mu} C &= \frac{d^n}{d\rho^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^t (\rho-s)^{n-\mu-1} C\ ds \right) \\ &= \frac{C}{(n-\mu)\,\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{d\rho^n} \left((\rho-s)^{n-\mu} \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} {}^{RL}_{a}D^{\mu}_{\rho} C &= \frac{C}{\Gamma(n-\mu+1)} \frac{(n-\mu)!}{(-\mu)!} (\rho-s)^{-\mu} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\mu)} (\rho-s)^{-\mu}. \end{aligned}$$

2) -La dérivée de la fonction $g(\rho) = (\rho-a)^{\eta}$:

avec $0 \leq n-1 \leq \mu < n$ et $\eta > -1$, alors on a

$${}^{RL}D^{\mu}_{a|\rho} (\rho-a)^{\eta} = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{d\rho^n} \left[\int_a^{\rho} (\rho-s)^{n-\mu-1} (s-a)^{\eta}\, d\tau \right].$$

On pose $\tau = a + s(\rho-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a|\rho} (\rho-a)^{\eta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{d\rho^n} \left[(\rho-a)^{n-\mu-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\mu-1} s^{\eta} (\rho-a)^{\eta+1}\, ds \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{dt^n} \left[(\rho-a)^{n-\mu+\eta} \right] B(\eta+1, n-\mu) \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\mu+1)} (\rho-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

3)-**La dérivée de la fonction** $f(\rho) = e^{\lambda\rho}$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\mu}_{a|\rho}e^{\lambda\rho} &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_a^{\rho}(\rho-\tau)^{n-\mu-1}e^{\lambda\tau}d\tau\right] \\ &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{n--\mu-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_a^t\left(1-\frac{\tau}{\rho}\right)^{n-\mu-1}\tau^k d\tau\right]. \end{aligned}$$

Pour $s = \frac{\tau}{\rho}$, on trouve

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\mu}_{a|\rho}e^{\lambda\rho} &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{n-\mu-1}}{\Gamma(n-\mu)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1(1-s)^{n-\mu-1}(s\rho)^k\rho ds\right] \\ &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{n-\mu-+k}}{\Gamma(n-\mu)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1(1-s)^{n-\mu-1}s^k ds\right] \\ &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{n-\mu+k}}{\Gamma(n-\mu)}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)}\beta(k+1,n-\mu)\right] \\ &= \frac{d^n}{d\rho^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\rho^{n-\mu+k}}{\Gamma(k+1+n-\mu)}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{k-\mu}\lambda^k}{\Gamma(k-\mu)} \end{aligned}$$

À titre d'exemple

$${}^{RL}D^{\frac{1}{2}}\sqrt{t} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Propriétés

1)-On a

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a|\rho}\left(I^{\alpha}_{0|\rho}g(\rho)\right) = g(\rho).$$

En générale

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a|\rho}\left(I^{\beta}_{0|\rho}g(\rho)\right) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta}_{a|\rho}g(\rho).$$

et si $\alpha - \beta < 0$,

$$^{RL}D^{\alpha-\beta}g(\rho) = I^{\beta-\alpha}g(\rho).$$

− Les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne commutent pas

$$^{RL}D^{-\alpha}\left(^{RL}D^{\beta}g\left(\rho\right)\right) = ^{RL}\ D_{a|\rho}^{\beta-\alpha}g(\rho) - \sum_{k=1}^{m}\left(^{RL}D_{a|\rho}^{\beta-k}g(\rho)\right)_{\rho=a}\frac{(\rho-a)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)},$$

avec $m-1 \leq \beta < m$.

2)- Si $g^{(k)}\left(a\right) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n$, on a

$$\frac{d^n}{d\rho^n}\left(^{RL}D_{a|\rho}^{\alpha}g\left(\rho\right)\right) = ^{RL}\ D_{a|\rho}^{n+\alpha}g\left(\rho\right),$$

et

$$^{RL}D_{a|\rho}^{\alpha}\left(\frac{d^n}{d\rho^n}g\left(\rho\right)\right) = ^{RL}\ D_{a|\rho}^{n+\alpha}g\left(\rho\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)(\rho-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma\left(k-\alpha-n+1\right)}.$$

3)-Soit $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, alors

$$^{RL}D_{a|\rho}^{\alpha}\left(_{a}^{RL}D_{\rho}^{\beta}g\left(\rho\right)\right) = ^{RL}\ D_{a|\rho}^{\alpha+\beta}g(\rho) - \sum_{k=1}^{m}\left[^{RL}D^{\beta-k}g(\rho)\right]_{\rho=a}\frac{(\rho-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)},$$

et

$$^{RL}D_{a|\rho}^{\beta}\left(^{RL}D_{a|\rho}^{\alpha}g\left(\rho\right)\right) = ^{RL}\ D_{a|\rho}^{\beta+\alpha}g(\rho) - \sum_{k=1}^{m}\left[^{RL}D^{\alpha-k}g(\rho)\right]_{\rho=a}\frac{(\rho-a)^{-\beta-k}}{\Gamma\left(\beta-k+1\right)}.$$

Pour que $^{RL}D_{a|\rho}^{\beta}$ et $^{RL}D_{a|\rho}^{\alpha}$ $(\alpha \neq \beta)$, commutent, il faut que

$$\left[^{RL}D^{\beta-k}g(\rho)\right]_{\rho=a} = 0, \text{et } \left[^{RL}D^{\alpha-k}g(\rho)\right]_{\rho=a} = 0,$$

pour tout k.

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.6 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < \mu < n$. Si $\frac{d^n}{d\rho^n} g \in L_1[a,b]$, La dérivée de Caputo de g d'ordre μ, est définie par*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho} g(\rho) &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\mu-1} g^{(n)}(\tau)\, d\tau \\ &= I^{n-\mu}\left(\frac{d^n}{d\rho^n} g(\rho)\right). \end{aligned}$$

Proposition 2.4 *i− On suppose que $n-1 < Re(\mu) < n$, $m,n \in \mathbb{N}^*$ et que ${}^{C}D^{\mu} g(\rho)$ existe, alors :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\mu} D^{m} g(\rho) &= {}^{C}D^{\mu+m} g(\rho) \\ &\neq D^{m}\, {}^{C}D^{\mu} g(\rho). \end{aligned}$$

ii− *Soient $T > 0$ et $0 < \mu < 1$. Si ${}^{C}D^{\mu}_{0|\rho} f \in L^1(0,T), g \in C^1([0,T])$ et $g(T) = 0$, alors*

$$\int_0^T g(\rho)\, {}^{C}D^{\mu}_{0|\rho} f(\rho) d\rho = \int_0^T (f() - f(0))\, {}^{C}D^{\mu}_{\rho|T} g(t) dt, \tag{1.3}$$

où

$${}^{C}D^{\mu}_{\rho|T} g(\rho) = -\frac{d}{d\rho} I^{1-\mu}_{\rho|T} g(\rho),$$

$$I^{1-\mu}_{\rho|T} g(\rho) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_{\rho}^{T} (s-\rho)^{-\mu} g(s) ds,$$

iii− *Si f est continue, on a :*

$${}^{C}D^{\mu}_{a|\rho}\left({}^{RL}I^{\mu}_{a|\rho} f(\rho)\right) = f(\rho) \;\; et \;\; {}^{RL}I^{\mu}_{a|\rho}\left({}^{C}D^{\mu}_{a|\rho} f(\rho)\right) = f(\rho) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(\rho-a)^{k-\mu}}{k}.$$

iv− *Si f et g sont continues sur $[a,\rho]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule de Leibniz est*

$$ {}^{C}D^{\mu}(f(\rho)g(\rho)) = \sum_{k=o}^{n} \binom{\mu}{k} f^{(k)}(\rho)\, {}^{C}D^{(\mu-k)}g(\rho). $$

Exemple 2.2 ∴ *On a*

$$ {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho} C = 0. $$

· *Soit $f(\rho) = (\rho - a)^{\eta}$, on a*

$$ \begin{aligned} {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho}\,(\rho-a)^{\eta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\mu-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\eta-n+1)} \int_a^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\mu-1} (\tau-a)^{\eta-n}\, d\tau. \end{aligned} $$

Pour $\tau = a + s(\rho - a)$, on obtient

$$ \begin{aligned} {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho}\,(\rho-a)^{\eta} &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\eta-n+1)} \int_0^{1} (\rho-a-s(\rho-a))^{n-\mu-1} (s(\rho-a))^{\eta-n} (\rho-a)\, ds \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\eta-n+1)} (\rho-a)^{\eta-\mu} \int_0^{1} (1-s)^{n-\mu-1} s^{\eta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1)\,\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\eta-n+1)}{\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\eta-n+1)\,\Gamma(\eta-\mu+1)} (\rho-a)^{\eta-\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\mu+1)} (\rho-a)^{\eta-\mu}. \end{aligned} $$

Soit $f(\rho) = e^{\lambda\rho}$, on a

$$ \begin{aligned} {}^{C}_{a}D^{\mu}_{\rho}\left(e^{\lambda\rho}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\mu-1} \frac{d^n}{d\tau^n}\left(e^{\lambda\tau}\right) d\tau \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^{\rho} (\rho-\tau)^{n-\alpha-1} e^{\lambda\tau} d\tau. \end{aligned} $$

Posons $y = \rho - \tau$, on obtient

$$ {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho}\left(e^{\lambda\rho}\right) = \frac{\lambda^n e^{\lambda\rho}}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^{\rho-a} y^{n-\mu-1} e^{-\lambda y} dy. $$

et pour $s = \lambda y$, on trouve

$$ {}^{C}D^{\mu}_{a|\rho}\left(e^{\lambda\rho}\right) = \frac{\lambda^{n}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{0}^{\lambda(\rho-a)}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{n-\mu-1}e^{-s}\frac{ds}{\lambda}. $$

On pose $a = -\infty$, alors

$$ \begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}\left(e^{\lambda\rho}\right) &= \frac{\lambda^{n}e^{\lambda\rho}}{\Gamma\left(n-\mu\right)}\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\mu-n}s^{n-\mu-1}e^{-s}ds \\ &= \frac{\lambda^{\mu}e^{\lambda\rho}}{\Gamma\left(n-\mu\right)}\Gamma\left(n-\mu\right) \\ &= \lambda^{\mu}e^{\lambda\rho}. \end{aligned} $$

Quelques propriétés

Proposition 2.5 *Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $n-1 < Re(\mu) < n, n \in \mathbb{N}^{*}$ et supposons ${}^{C}D^{\mu}\ f(\rho)$ et ${}^{C}D^{\mu}\ g(\rho)$ existent. On a*

$$ {}^{C}D^{\mu}\left(\lambda f+g\right)(\rho) = \lambda\left({}^{C}D^{\mu}f\right)(\rho) + \left({}^{C}D^{\mu}g\right)(\rho), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. $$

Preuve On a

$$ {}^{C}D^{\mu}\left(\lambda f+g\right)(\rho) = I^{n-\mu}\,{}^{C}D^{n}\left(\lambda f+g\right)(\rho), $$

donc

$$ I^{n-\mu}\,{}^{C}D^{n}\left(\lambda f+g\right)(\rho) = I^{n-\mu}\,{}^{C}D^{n}\left(\lambda f\right)(\rho) + I^{n-\mu}\,{}^{C}D^{n}g\left(\rho\right), $$

alors

$$ {}^{C}D^{\mu}\left(\lambda f+g\right)(\rho) = \lambda\ {}^{C}D^{\mu}f\left(\rho\right) + \ \left({}^{C}D^{\mu}g\right)(\rho). $$

D'oú le résultat. ■

Lemme 2.2 *Soit $0 \leq \mu < 1$.Alors*

$$ {}^{C}_{a}D^{\mu}_{\rho}\,{}^{C}_{a}D^{\mu}_{\rho}f\left(\rho\right) = {}^{C}_{a}D^{2\mu}_{\rho}f\left(\rho\right), \qquad si\ 0 \leq \mu < \frac{1}{2}. $$

$$ {}_a^C D_\rho^\mu \, {}_a^C D_t^\mu f(\rho) = {}_a^C D_\rho^{2\mu} f(\rho) + f'(a) \frac{(\rho-a)^{1-2\mu}}{\Gamma(2-2\mu)}, \quad si \ \frac{1}{2} \leq \mu < 1. $$

Preuve On a:

$$ {}_a^C D_\rho^\mu \, {}_a^C D_\rho^\mu f(\rho) = \frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2} \int_a^\tau (\rho-\tau)^{-\mu} \frac{d}{d\tau} \left[\int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f'(u) \, du \right] d\tau. \tag{2.1} $$

implique

$$ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f'(u) \, du \right] &= \left[\int_a^\tau \frac{\partial}{\partial\tau} (\tau-u)^{-\mu} f'(u) \, du \right] \\ &= -\mu \int_a^\tau (\tau-u)^{\mu--1} f'(u) \, du. \end{aligned} $$

entraine

$$ \begin{aligned} \int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu-1} f'(u) \, du &= \left[\frac{(\tau-u)^{-\mu} f\prime(u)}{\mu} \right]_a^\tau - \frac{1}{\mu} \int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f''(u) \, du \\ &= -\frac{(\tau-a)^{-\mu} f\prime(a)}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f''(u) \, du. \end{aligned} $$

Alors

$$ \frac{d}{d\tau} \left[\int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f'(u) \, du \right] = (\tau-a)^{-\mu} f'(a) + \int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f''(u) \, du, $$

par substitution dans $(2,1)$, nous obtenons :

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_\rho^\mu \, {}_a^C D_\rho^\mu f(\rho) &= \frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2} \int_a^\tau (\rho-\tau)^{-\mu} \frac{d}{d\tau} \left[(\tau-a)^{-\mu} f'(a) + \int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f''(u) \, du \right] d\tau \\ &= \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\mu)]^2} \int_a^\rho (\rho-\tau)^{-\mu} (\tau-a)^{-\mu} \, d\tau \\ &+ \frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2} \int_a^\rho (\rho-\tau)^{-\mu} \left[\int_a^\tau (\tau-u)^{-\mu} f''(u) \, du \right] d\tau. \end{aligned} \tag{2.2} $$

Posons $\tau = \rho - (\rho-a)\,u$,on arrive à :

$$\frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\mu)]^2}\int_a^\rho(\rho-\tau)^{-\mu}(\tau-a)^{-\mu}d\tau=\frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\mu)]^2}(\rho-a)^{1-2\mu}\int_a^\rho(u)^{-}(1-u)^{-\mu}du$$
$$=\frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\mu)]^2}(\rho-a)^{1-2\alpha}\beta(1-\mu,1-)\mu\mu$$
$$=\frac{f'(a)}{[\Gamma(2-2\mu)]}(\rho-a)^{1-2\mu}.$$

et pour le second terme.

$$\frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2}\int_a^\rho(\rho-\tau)^{-\mu}\left[\int_a^\tau(\tau-u)^{-\mu}f''(u)du\right]d\tau$$
$$=\frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2}\int_a^\rho\int_a^\tau(\rho-\tau)^{-\mu}(\tau-u)^{-\mu}f''(u)dud\tau$$
$$=\int_a^t\left[\frac{1}{[\Gamma(1-\mu)]^2}\int_u^\rho(\rho-\tau)^{-\mu}(\tau-u)^{-\mu}d\tau\right]f''(u)du$$
$$=\int_a^\rho\frac{(\rho-u)^{1-2\mu}}{[\Gamma(1-\mu)]^2}\beta(1-\mu,1-\mu)f''(u)du$$
$$=\frac{1}{\Gamma(2-2\mu)}\int_a^\rho(\rho-u)^{1-2\mu}f''(u)du.$$

Donc,deux cas sont à considérer :

·Si $0\leq\mu<\frac{1}{2}$,c'est -à-dire $0\leq2\mu<1$,on a :

$$\frac{1}{\Gamma(2-2\mu)}\int_a^\rho(\rho-u)^{1-2\mu}f''(u)du={}_a^C D_\rho^{2\mu}f(\rho)\tag{2.3}$$

·Si $\frac{1}{2}\leq\mu<1$,c'est -à-dire $1\leq2\mu<2$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(2-2\mu)}\int_a^\rho(\rho-u)^{1-2\mu}f''(u)du=\int_a^\rho\frac{(\rho-u)^{-2\mu}}{\Gamma(1-2\mu)}f''(u)du+\left[\frac{(\rho-u)^{-2\mu}}{\Gamma(2-2\mu)}f'(u)\right]_a^\rho$$
$$={}_a^C D_\rho^{2\mu}f(\rho)-\frac{(t-a)^{-2\mu}}{\Gamma(2-2\mu)}f'(a).\tag{2.4}$$

Par subtitution de $(2,3)$ et $(2,4)$ dans $(2,2)$,on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_\rho^\mu \, {}_a^C D_\rho^{\alpha\mu} f(\rho) &=_a^C D_\rho^{2\mu} f(\rho), \quad si\ 0 \le \mu < \frac{1}{2} \\ {}_a^C D_\rho^\mu \, {}_a^C D_t^\mu f(\rho) &=_a^C D_\rho^{2\mu} f(\rho) - \frac{(\rho-a)^{-2\mu}}{\Gamma(2-2\mu)} f\prime(a), \qquad si\ \frac{1}{2} \le \mu < 1. \end{aligned}$$

■

Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Théorème 2.1 *Soit $Re(\mu) > 0$ avec $n-1 < Re(\mu) < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, et assumons que ${}^C D^\mu g(\rho)$ et $D^\mu g(\rho)$ existent alors*

$${}^C D^\mu g(\rho) =^{RL} D^\mu g(\rho) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{\Gamma(n-k+1)} \rho^{n-k}.$$

Remarque 2.1 *Si pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on a $g^{(k)}(0) = 0$, alors*

$${}^{RL} D^\mu g(t) =^C D^\mu g(\rho).$$

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si g est une fonction continue sur$[0,T]$, on a

$${}^C D^\mu I^\mu g(\rho) = g(\rho) \ \text{ et } I^\mu \left({}^C D^\mu g(\rho)\right) = g(\rho) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \rho^k.$$

Chapitre 3

Résolution d'une equation aux dérivées par différentes methodes

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDPF) sont une généralisation des équations aux dérivées partielles classiques, où certaines dérivées sont de nature fractionnaire. Elles sont utilisées pour modéliser des phénomènes physiques impliquant des effets de mémoire et des comportements non locaux, comme la diffusion anormale, la dynamique des fluides et la propagation des ondes.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles fractionnaires typique $(EDPF)$ s'écrit sous la forme

$$D_t^{\alpha} u\left(x,t\right) + Lu\left(x,t\right) = f\left(x,t\right),$$

où D^{α} est le dérivé fractionnaire en temps (Caputo ou Riemann-Liouville), L est un opérateur différentiel fractionnaire en espace,est un terme source. (ex : Laplacien Δu).

3.1 La méthode de transformation de Fourier

3.1.1 Transformée de Fourier

Définition 3.1 *Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de g, est la fontion notée $\hat{g}$ ou encore $\mathcal{F}(g)$ défnie par*

$$u \longrightarrow \hat{g}(u) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-2\pi i u t} dt$$

Lemme 3.1 *L'application $g \longrightarrow Fg$ est appelée transformation de Fourier.Il est clair que cette transformation est linéaire et qu'on a*

$$\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt.$$

Preuve La transformée $\hat{g}(u)$ est bien définie pour tout u .La fonction $\hat{g} \in C_0(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\|\hat{g}\|_\infty \leq \|g\|_1 .$$

La fonction $t \longrightarrow e^{-2\pi i t u} g(t)$ est mesurable elle est le produit d'une fontion continue et d'une fonction mesurable. Son module est égal à $|g(t)|$ qui est intégrable. Elle est donc intégrable et on a la ma joration :

$$\|\hat{g}\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}} \left| g(t)\, e^{-2\pi i u t} \right| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \|g\|_1 .$$

Montrons que $\hat{g}$ est continue. On a :

$$|\hat{g}(u+h) - \hat{g}(u)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-2\pi i h t} - 1 \right| |g(t)|\, dt.$$

La fonction dans l'intégrale, à droite, est ma jorée par la fonction intégrable $2|g(t)|$ et tend vers 0, pour t fixé, quand h tend vers 0. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que l'intégrale tend vers 0, quand h tend vers 0.La convergence $\lim_{|u| \longrightarrow \infty} \hat{g}(u) = 0.$ est montrée dans le lemme ci-dessous. ■

Lemme 3.2 *(Riemann-Lebesgue) Pour toute fonction f intégrable, on a*

$$\lim_{|u|\longrightarrow\infty} \hat{g}(u) = 0.$$

Preuve : *Pour* $g = 1_{[a,b]}$, *nous avons*:

$$\hat{1}_{[a,b]}(u) = \int_a^b e^{-2\pi iut} dt = \frac{e^{-2\pi iau} - e^{-2\pi ibu}}{-2\pi iu},$$

d'où :

$$\left|\hat{1}_{[a,b]}(u)\right| \leq \frac{1}{\pi u} \longrightarrow 0, \text{ quand } |u| \text{ tend vers l 'infini}$$

Cette propriété s'étend par linéarité aux fonctions en escalier, i.e. aux combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'intervalles.Montrons qu'elle s'étend, par densité à $L^1(\mathbb{R})$ *.Soit* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *.Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe f en escalier tel que* $\|g - f\|_1 < \varepsilon$*.Soit A tel que* $|u| > A$ *implique* $\hat{f}(u) < \varepsilon$ *. Nous avons, pour* $|u| > A$, *la ma joration :*

$$\hat{g}(u) \leq \left\|\hat{g} - \hat{f}\right\|_\infty + \left|\hat{f}(u)\right| \leq \|g - f\|_1 + \left|\hat{f}(u)\right| \leq \varepsilon + \left|\hat{f}(u)\right| \leq 2\varepsilon.$$

■

3.1.2 Régularité et transformée de Fourier

Montrons maintenant que la régularité de $\hat{g}$ est liée à la grandeur à l'infini de la fonction g.

Proposition 3.1 *Si f est intégrable et si* $\int_{\mathbb{R}} |t| |g(t)| dt < \infty$, *alors* $\hat{g} \in C^1$ *et*

$$\frac{d}{du}\hat{g}(u) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} te^{-2\pi itu} g(t) dt.$$

Preuve : Nous avons, pour $h \neq 0$,

$$\frac{1}{h}\left[\hat{g}(u+h) - \hat{g}(u)\right] \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi iut}.\left[\frac{e^{-2\pi iht} - 1}{h}\right] dt.$$

L'inégalité $\left|\frac{e^{ia}-1}{a}\right| < 1$, vérifiée pour tout $a \in \mathbb{R}$, et l'hypothèse d'intégrabilité de $t \longrightarrow tg(t)$ permettent de passer à la limite quand h tend vers 0 dans la relation précédente, en appliquant le théorème de Lebesgue.Ainsi $\frac{d}{du}\hat{g}$ existe et est, au coefficient $-2\pi i$ près, la transformée de Fourier de la fontion $t \longrightarrow tg(t)$ qui est intégrable par hypothèse. De plus elle est dans $C_0(\mathbb{R})$, puisque transformée de Fourier d'une fonction intégrable. ■

Plus généralement, par réurrene, on a, pour p entier ≥ 1:

Proposition 3.2 *Si g est une fonction intégrable et si $\int_{\mathbb{R}} |t|^p |g(t)|\, dt < \infty$, $\hat{g}$ est de classe C^p*

$$\frac{d^p}{du^p}\hat{g}(u) = (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p e^{-2\pi i t u} g(t)\, dt, \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Notons que la fontion f_r définie par $f_r(t) = t^r g(t)$ est intégrable, pour $r = 1, 2, ..., p$, car l'inégalité $|t|^r \leq 1 + |t|^p$, permet de la majorer

$$f_r(t) \leq |g(t)| + |t^p g(t)|, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On raisonne alors par récurrence sur $r = 1, 2, ..., p$, en appliquant le résultat de la proposition précédente. ■

Sous les conditions de la proposition, on a donc montré qu'on obtient les dérivées sucessives de $\hat{g}$ en dérivant sous le signe somme . Permutant maintenant le rôle de la dérivation et de la multipliation par t, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Si g est une fonction intégrable et de classe C^1 telle que g' soit intégrable,la transformée de Fourier de sa dérivée est donnée par* :

$$\hat{g\prime}(u) = 2\pi i u \hat{g}(u), \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g'(t)\, e^{-2\pi i u t} dt &= \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int_{-A}^{A} g'(t)\, e^{-2\pi i u t} dt \\ &= \lim_{A \longrightarrow +\infty} \left(\left[g(t)\, e^{-2\pi i u t} \right]_{-A}^{A} + 2\pi i u \int_{-A}^{A} g(t)\, e^{-2\pi i u t} dt \right).\end{aligned}$$

Montrons que $\lim_{A\longrightarrow\pm\infty} g(A) = 0$, ce qui entraînera, en passant à la limite, le résultat. On peut écrire:

$$g(A) = g(0) + \int_0^A g'(y)\, dy;$$

d'où :

$$\lim_{A\longrightarrow+\infty} g(A) = g(0) + \int_0^{+\infty} g'(y)\, dy.$$

Donc la limite de $g(A)$, pour A tendant vers $+\infty$, existe. Cette limite est néessairement nulle : dans le cas contraire, en la supposant par exemple > 0, on aurait $g(t) \geq \varepsilon > 0$, pour $t \geq L$, , pour un L convenable ; ce qui impliquerait

$\int_L^{+\infty} g(t)\, dt = +\infty$.On montre de même que $\lim_{A\longrightarrow+\infty} g(A) = 0$. ■

En raisonnant par récurrence sur l'ordre de la dérivation, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.4 *Si g est de classe C^p et si les fonctions g, g', . . . ,$g^{(p)}$ sont intégrables, nous avons* :

$$\widehat{g^{(p)}}(u) = (2\pi i u)^p\, \hat{g}(u), \ \forall u \in \mathbb{R}$$

Sous les hypothèses de la proposition (3.3.4)*, nous avons donc la ma joration* :

$$\hat{g}(u) \leq |(2\pi u)|^{-p} \left\| \widehat{g^{(p)}}(u) \right\|_1, \ \forall u \neq 0,$$

et nous pouvons écrire, puisque $\lim_{u\longrightarrow+\infty} \left| \widehat{g^{(p)}}(u) \right| = 0$ *et* $\hat{g}(u) = \circ\left(|(u)|^{-p}\right)$*, pour* $|u|$ *tendant vers* $+\infty$.

Proposition 3.5 *Si g et f sont intégrables, on a*:

$$\mathcal{F}(g * f) = \mathcal{F}g \times \mathcal{F}f \cdot$$

Preuve : La fontion $(t,s) \longrightarrow g(t-s) f(s) e^{-2\pi iut}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Fubini. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g*f)(u) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-s) f(s) ds \right) e^{-2\pi iut} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-s) e^{-2\pi iut} dt \right) f(s) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-s) e^{-2\pi iu(t-s)} dt \right) e^{-2\pi ius} f(s) ds \\
&\left(\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi iut} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ius} f(s) ds \right).
\end{aligned}$$

■

Formule d'inversion

Soit g une fonction intégrable. Nous avons vu que sa transformée de Fourier $\hat{g}$ est bien définie, continue, bornée et vérifie :$\|\hat{g}\|_\infty \leq \|g\|_1$ .En général,$\hat{g}$ n'est pas à son tour intégrable.Par exemple, si l'on prend $g = 1_{[-A,A]}$,on obtient $\hat{g}(u) = \frac{\sin(2\pi A)}{\pi u}$, fonction qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.Noter que l'intégrale généralisée $\lim_{L\longrightarrow+\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\sin(2\pi A)}{\pi u} du$ du existe mais que

$$\lim_{L\longrightarrow+\infty} \int_{-L}^{L} \left| \frac{\sin(2\pi A)}{\pi u} \right| du = +\infty.$$

La non-intégrabilité de $\hat{g}$ dans cet exemple est liée au fait que g n'est pas suffisamment régulière (discontinuité en $\pm A$).Si l'on fait l'hypothèse additionnelle que $\hat{g}$ est à son tour intégrable, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{2\pi ius} du$ est bien définie pour tout t réel.

Théorème 3.1 [*Kilbas et al.*2006] *Théorème d'inversion : Si g est intégrable et si sa transformée de Fourier $\hat{g}$ est intégrable, on a, pour presque tout réel t (pour tout t, si g est continue)) :*

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut} \hat{g}(u) du.$$

Avant de démontrer e résultat, faisons quelques remarques.

Exemple 3.1 *Résolvons l'équation différentièlle fractionnaire en utilisant la transformée de Fou-*

rier

$$D^{\alpha}y\left(t\right)+y\left(t\right)=e^{-t^{2}}...,0<\alpha\leq1.$$

où $D^{\alpha}y(t)$ *est la dérivée fractionnaire de Caputo.*

Appliquons la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation donnée

$$\mathcal{F}\left[D^{\alpha}y\left(t\right)\right]+\mathcal{F}\left[y\left(t\right)\right]=\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right].$$

Utilisation de la propriété de la transformée

$$\left(iw\right)^{\alpha}Y\left(w\right)+Y\left(w\right)=\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right],$$

La transformée de Fourier de e^{-t^2} *est*

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right]=\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}},$$

Ainsi, nous obtenons

$$\left(\left(iw\right)^{\alpha}+1\right)Y\left(w\right)=\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}},$$

Résoudre pour

$$Y\left(w\right)=\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}}}{\left(iw\right)^{\alpha}+1}.$$

Appliquons la transformée de Fourier inverse Pour trouver $y(t)$*, prenons la transformée de Fourier inverse*

$$y\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}}}{\left(iw\right)^{\alpha}+1}\right]$$

Cette intégrale peut être calculée numériquement ou en utilisant des techniques d'intégration pour des valeurs spéciales de α*. Nous approchons*:

$$y\left(t\right)\approx\mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}}\left(1-\left(iw\right)^{\alpha}\right)\right]$$

ce qui donne lieu à une série asymptotique.

Remarque 3.1 •*La méthode de transformée de Fourier convertit l'équation différentielle fractionnaire en une équation algébrique dans le domaine fréquentiel.*

•La solution consiste à calculer la transformée de Fourier inverse, ce qui peut nécessiter une intégration numérique de α

Exemple 3.2 *Résolvons l'équation différentièlle fractionnaire*

$$D^{\frac{\delta}{2}}y\left(t\right)+D^{\theta}y\left(t\right)=e^{-t^{2}}...,0<\delta\leq2,0<\theta\leq1.$$

où $D^{\frac{\delta}{2}},D^{\theta}$ *sont les dérivées fractionnaire de Caputo.*

Appliquons la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation donnée

$$\mathcal{F}\left[D^{\frac{\delta}{2}}y\left(t\right)\right]+\mathcal{F}\left[D^{\theta}y\left(t\right)\right]=\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right].$$

Utilisation de la propriété de la transformée

$$\left(iw\right)^{\frac{\delta}{2}}Y\left(w\right)+\left(iw\right)^{\theta}Y\left(w\right)=\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right],$$

La transformée de Fourier de $e^{-t^{2}}$ *est*

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^{2}}\right]=\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}},$$

Ainsi, nous obtenons

$$\left(\left(iw\right)^{\frac{\delta}{2}}+\left(iw\right)^{\theta}\right)Y\left(w\right)=\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}},$$

Résoudre pour

$$Y\left(w\right)=\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}}}{\left(iw\right)^{\frac{\delta}{2}}+\left(iw\right)^{\theta}}.$$

Appliquons la transformée de Fourier inverse Pour trouver $y(t)$*, prenons la transformée de Fourier inverse*

$$y\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\left(iw\right)^{-\theta}\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^{2}}{4}}}{\left(iw\right)^{\frac{\delta}{2}-\theta}+1}\right]$$

Cette intégrale peut être calculée numériquement ou en utilisant des techniques d'intégration pour des valeurs spéciales. Nous approchons:

$$y(t) \approx \mathcal{F}^{-1}\left[(iw)^{-\theta}\sqrt{\pi}e^{\frac{-w^2}{4}}\left(1-(iw)^{\frac{\delta}{2}-\theta}\right)\right]$$

ce qui donne lieu à une série asymptotique.

Remarque 3.2 •*La méthode de transformée de Fourier convertit l'équation différentielle fractionnaire en une équation algébrique dans le domaine fréquentiel.*

•La solution consiste à calculer la transformée de Fourier inverse, ce qui peut nécessiter une intégration numérique de αExistence local et Explosion de la solution d'une équations différentièlle fractionnaire avec un terme source non linéaire

3.2 Méthode de la transformée de Laplace

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDPF) sont une généralisation des équations aux dérivées partielles classiques, où certaines dérivées sont de nature fractionnaire. Elles sont utilisées pour modéliser des phénomènes physiques impliquant des effets de mémoire et des comportements non locaux, comme la diffusion anormale, la dynamique des fluides et la propagation des ondes.

3.2.1 Transformée de Laplace

Définition 3.2 *La transformée de Laplace de* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue par morceaux est donnée par*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, s \in \mathbb{C},$$

Comme la transformée de Laplace de convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, en a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(h_{z,w},s\right) &= \mathcal{L}\left(\rho^{z-1}*\left(1-\rho\right)^{w-1},s\right)\\ &= \mathcal{L}\left(\rho^{z-1},s\right)\mathcal{L}\left(\left(1-\rho\right)^{w-1},s\right)\\ &\left[\int_0^{+\infty}\rho^{z-1}e^{-s\rho}d\rho\right]\left[\int_0^{+\infty}\left(1-\rho\right)^{w-1}e^{-s\rho}d\rho\right]\\ &= \frac{\Gamma\left(z\right)}{s^z}\times\frac{\Gamma\left(w\right)}{s^w}\\ &= \frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{s^{z+w}}.\end{aligned}$$

par la transformée de Laplace inverse du côté droit de $(3,1)$ on a

$$h_{z,w}\left(t\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)}\rho^{z+w+1},$$

pour $\rho=1$, nous obtenons l'expression de Beta.

Définition 3.3 *On définit l'intégrale généralisée d'une fonction f ■ valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ continue par morceaux sur cet intervalle par :*

$$\int_0^{+\infty}f\left(\rho\right)d\rho=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_0^{x}f\left(\rho\right)d\rho,$$

Définition 3.4 *f est d'ordre exponentiel, s'il existent M et T telles que*

$$\left|f\left(\rho\right)\right|\leq Me^{\rho},\qquad \textit{pour tout } \rho>T.$$

Les Conditions d'existence de $F(s)$ sont :

1.f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

2.$\exists\rho\in]0;1[$ tel que

$$\lim_{\rho\longrightarrow+\infty}\rho^{\beta}\left|f\left(\rho\right)\right|=0.$$

3. La fonction f est d'ordre exponentiel :$\left|f\left(\rho\right)e^{-s\rho}\right|\leq Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\mu)\rho}$.

Remarque 3.3 *La fonction* $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$ *ne respecte pas la deuxiéme condition d'existence, aussi* $g(\rho) = e^{\rho^2}$ *qui n'est pas d'ordre exponentiel.*

3.2.2 Application de la méthode de la transformée de Laplace

Utilisant la méthode de la transformée de Laplace.

Exemple 3.3 *Considérons l'équation de réaction-diffusion suivante avec une dérivée fractionnaire de l'ordre* α

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \lambda u(x,t),$$

Où $u(x,t)$ est la concentration du produit chimique à la position x et au temps t, $\frac{\partial^\alpha}{\partial^\alpha t^\alpha}$est la dérivée fractionnaired'odre α $(0 < \alpha \leq 1)$, μ est le coefficient de diffusion,λ est la constante de vitesse de réaction.

Appliquons maintenant la transformée de Laplace à chaque terme de l'équation de réaction-diffusion

On a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}\right\} = s^\alpha \hat{u}(x,s) - s^{\alpha-1} u(x,0),$$

où $u(x,0)$ est la condition initiale.

Aussi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 \hat{u}(x,s)}{\partial^2 x^2}.$$

Ce terme reste dans le domaine spatial car la transformée de Laplace ne s'applique que dans le temps.

La transformée de Laplace du terme de réaction $\lambda u(x,t)$ est :

$$\mathcal{L}\{\lambda u(x,t)\} = \lambda \hat{u}(x,s).$$

Remplacer la transformée de Laplace dans l'équation d'origine

$$s^{\alpha}\hat{u}\left(x,s\right)-s^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=\mu\frac{\partial^{2}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{2}}+\lambda\hat{u}\left(x,s\right),$$

Alors

$$s^{\alpha}\hat{u}\left(x,s\right)-\lambda\hat{u}\left(x,s\right)=\mu\frac{\partial^{2}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{2}}+s^{\alpha-1}u\left(x,0\right),$$

Ainsi, l'équation transformée de Laplace devient

$$\hat{u}_{h}\left(x,s\right)\left(s^{\alpha}-\lambda\right)=\mu\frac{\partial^{2}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{2}}+s^{\alpha-1}u\left(x,0\right).$$

Résoudre l'équation transformée de Laplace

Nous résolvons maintenant cette équation pour $\hat{u}\left(x,s\right)$

• Solution homogène :

Tout d'abord, résolvez la partie homogène de l'équation

$$\hat{u}_{h}\left(x,s\right)\left(s^{\alpha}-\lambda\right)=\mu\frac{\partial^{2}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{2}}.$$

La transformée de Laplace du terme de réaction $\xi u\left(x,t\right)$ est :

$$\mathcal{L}\left\{\xi u\left(x,t\right)\right\}=\xi\hat{u}\left(x,s\right).$$

Remplacer la transformée de Laplace dans l'équation d'origine

$$s^{\alpha}\hat{u}\left(x,s\right)-s^{\alpha-1}u\left(x,0\right)=\xi\frac{\partial^{3}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{3}}+\xi\hat{u}\left(x,s\right),$$

Alors

$$s^{\alpha}\hat{u}\left(x,s\right)-\xi\hat{u}\left(x,s\right)=\mu\frac{\partial^{3}\hat{u}\left(x,s\right)}{\partial x^{3}}+s^{\alpha-1}u\left(x,0\right),$$

Ainsi, l'équation transformée de Laplace devient

$$\hat{u}_h(x,s)(s^\alpha - \xi) = \mu \frac{\partial^3 \hat{u}(x,s)}{\partial x^3} + s^{\alpha-1} u(x,0).$$

Résoudre l'équation transformée de Laplace

Nous résolvons maintenant cette équation pour $\hat{u}(x,s)$

• Solution homogène :

Tout d'abord, résolvez la partie homogène de l'équation

$$\hat{u}_h(x,s)(s^\alpha - \xi) = \mu \frac{\partial^3 \hat{u}(x,s)}{\partial x^3}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire standard du second ordre en x. La solution générale est de la forme

$$\hat{u}(x,s) = Ae^{\sqrt{\frac{s^\alpha - \lambda}{\mu}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{s^\alpha - \lambda}{\mu}}x}.$$

• Solution particulière

Ensuite, nous résolvons la solution particulière en considérant le terme non homogène $s^{\alpha-1}u(x,0)$.

En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, on devine une solution de la forme

$$\hat{u}_p(x,s) = \frac{s^{\alpha-1}u(x,0)}{s^\alpha - \lambda}.$$

Une fois que nous avons la solution dans s-domaine.La transformée de Laplace inverse de $\hat{u}(x,s)$ est

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{u}(x,s)\right\}.$$

Cette démarche consiste à utiliser des techniques inverses de Laplace standard.

Rappellons que

$$\mathcal{L}\left\{{}^C D^\alpha y(t)\right\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0),$$

où $Y(s)$ est la transformée de Laplace de $y(t)$.

Étapes à suivre pour résoudre le problème à l'aide de la transformation de Laplace nous le verrons dans cet exemple..

Exemple 3.4 *Résoudre l'équation différentielle fractionnaire*

$$D^{\frac{1}{2}}y\left(t\right)+y\left(t\right)=1,\qquad y\left(0\right)=0.$$

Appliquons la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}y\left(t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{1\right\}.$$

En utilisant la formule

$$\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}y\left(t\right)\right\}=s^{\frac{1}{2}}Y\left(s\right)-y_0=s^{\frac{1}{2}}Y\left(s\right),$$

donc

$$s^{\frac{1}{2}}Y\left(s\right)+Y\left(s\right)=\frac{1}{s},$$

alors

$$\left(s^{\frac{1}{2}}+1\right)Y\left(s\right)=\frac{1}{s}.$$

Résoudre pour Y

$$Y\left(s\right)=\frac{1}{\left(s^{\frac{1}{2}}+1\right)s}.$$

Par conséquence

$$y\left(t\right)=E_{\frac{1}{2},1}\left(-t^{\frac{1}{2}}\right).$$

3.3 Méthode de la fonction exponentielle et l'analyse de la transformée de Laplace

Exemple 3.5 *Considérons l'équation de réaction-diffusion non linéaire fractionnaire*

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \lambda u^n(x,t), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

où n est un paramètre de non-linéarité, λest un coefficient de réaction.

Nous cherchons une solution en utilisant la méthode de la fonction exponentielle.

Suppose une solution exponentielle de la forme

$$u(x,t) = e^{ax+bt^{\alpha}},$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

•Calcul des dérivés

Dérivée du temps fractionnaire ,en utilisant la formule dérivée de Caputo,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^{\alpha} e^{bt^{\alpha}}}{\partial t^{\alpha}}\right\} = s^{\alpha}\hat{u}(x,s) - s^{\alpha-1}u(x,0).$$

Prendre la dérivée fractionnaire

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = be^{ax+bt^{\alpha}}.$$

Dérivée spatiale seconde,différenciation double par rapport à x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} = a^2 e^{ax+bt^{\alpha}}.$$

Terme non linéaire,Si nous supposons $n = 2$, le terme non linéaire est

$$u^2 = e^{2\left(ax+bt^2\right)}.$$

Substitution dans l'équation de réaction-diffusion

$$be^{ax+bt^{\alpha}} = \mu a^2 e^{ax+bt^{\alpha}} + \lambda e^{2\left(ax+bt^2\right)}.$$

Divisons par $e^{ax+bt^{\alpha}}$

$$b = \mu a^2 + \lambda e^{ax+bt^{\alpha}}.$$

Résoudre pour a et b. Pour une solution cohérente, nous admettons que :

$\cdot b = \mu a^2$ pour la linéarité.

$\cdot\ e^{ax+bt^{\alpha}}$doit rester borné pour tous les x,t , alors on peut supposer que $\lambda = 0$ ou limitons les conditions de croissance.

Ainsi, un choix convenable de a et b permet d'obtenir des solutions comme

$$u\left(x,t\right) = e^{ax+\mu a^2 t^{\alpha}}.$$

Si les conditions initiales $u\left(x,0\right) = u_0 e^{ax}$ sont données, appliquons la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{u\left(x,t\right)\right\} = \frac{u_0 e^{cx}}{s^{1-\beta} - \mu a^2}.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$u\left(x,t\right) = u_0 e^{cx} E_{1-\beta}\left(\mu a^2 t^{1-\beta}\right),$$

où E_{α} est la fonction Mittag-Leffler.

Exemple 3.6 *Considérons l'équation*

$$\frac{\partial^{1-\beta} u\left(x,t\right)}{\partial t^{1-\beta}} = \sigma \frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \lambda u^4\left(x,t\right), \quad 0 < \beta \leq 1$$

où σ est un coefficient de réaction.

Nous cherchons une solution en utilisant la méthode de la fonction exponentielle.

Suppose une solution exponentielle de la forme

$$u\left(x,t\right)=e^{cx+dt^{1-\beta}},$$

où c et d sont des constantes à déterminer.

•Calcul des dérivés

Dérivée du temps fractionnaire ,en utilisant la formule dérivée de Caputo,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^{1-\beta}e^{dt^{1-\beta}}}{\partial t^{1-\beta}}\right\}=s^{1-\beta}\hat{u}\left(x,s\right)-s^{\beta}u\left(x,0\right).$$

Prendre la dérivée fractionnaire

$$\frac{\partial^{1-\beta}u}{\partial t^{1-\beta}}=de^{cx+dt^{1-\beta}}.$$

Dérivée spatiale seconde,différenciation double par rapport à x

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial^{2}x^{2}}=c^{2}e^{ax+dt^{1-\beta}}.$$

Donc

$$u^{2}=e^{2\left(cx+dt^{2}\right)}.$$

Substitution dans l'équation de réaction-diffusion

$$be^{cx+dt^{1-\beta}}=\mu a^{2}e^{cx+dt^{1-\beta}}+\sigma e^{2\left(cx+dt^{2}\right)}.$$

Divisons par $e^{ax+bt^{\alpha}}$

$$b=\mu a^{2}+\lambda e^{cx+dt^{1-\beta}}.$$

Résoudre pour c et d. Pour une solution cohérente, nous admettons que :

$\cdot d=\mu c^{2}$ pour la linéarité.

· $e^{cx+dt^{1-\beta}}$doit rester borné pour tous les x,t , alors on peut supposer que $\sigma = 0$ ou limitons les conditions de croissance.

Ainsi, un choix convenable de c et d permet d'obtenir des solutions comme

$$u(x,t) = e^{cx+\mu c^2 t^{1-\beta}}.$$

Si les conditions initiales $u(x,0) = u_0 e^{cx}$ sont données, appliquons la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{u_0 e^{cx}}{s^{1-\beta} - \mu a^2}.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$u(x,t) = u_0 e^{cx} E_\alpha\left(\mu c^2 t^{1-\beta}\right),$$

où $E_{1-\beta}$ est la fonction Mittag-Leffler.

3.4 Méthode de décomposition adomienne

Les équations différentielles fractionnaires impliquent des dérivées d'ordre non entier, généralement représentées à l'aide de dérivées de Caputo ou de Riemann-Liouville. Une forme générale d'équation différentielle fractionnaire est

$$D^\alpha y(t) + a_1 D^\beta y(t) + a_2 y(t) = f(t),$$

où D^α représente une dérivée fractionnaire d'ordre α et $f(t)$ est une fonction donnée.

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) est une technique puissante pour résoudre des équations différentielles fractionnaires. Elle permet de trouver des solutions sous forme de séries convergentes sans avoir besoin de discrétisation ou de linéarisation. Voici comment l'appliquer à une équation différentielle fractionnaire :

Nous allons résoudre l'équation différentielle fractionnaire suivante en utilisant la méthode de

décomposition d'Adomian (ADM)

Exemple 3.7 *Equation donnée*

$$D^{\alpha}y(t) = t^3 + y(t). \quad 0 < \alpha < 1$$
$$y(0) = 0,$$

où ,$D^{\alpha}y(t)$ *est le dérivé fractionnaire de Caputo*

Nous l'appliquons l'opérateur inverse de l'intégrale fractionnaire d'ordre α *est défini par :*

$$I^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau.$$

En appliquant I^{α} *des deux côtés de l'équation* :

$$I^{\alpha}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}\left(t^3 + y(t)\right).$$

Sachant que $I^{\alpha}D^{\alpha}y(t) = y(t)$, *nous obtenons* :

$$y(t) = I^{\alpha}t^3 + I^{\alpha}y(t).$$

Etape 2 : Décomposition d'Adomian .On suppose que la solution $y(t)$ est développée en une série infinie :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t).$$

De même,$y(t)$ dans le membre de droite est aussi développé en série :

$$I^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I^{\alpha}y_n(t).$$

On choisit

$$y_0(t) = I^{\alpha}t^3.$$

Les autres termes sont obtenus par récurrence :

$$y_{n+1}(t) = I^{\alpha} y_n(t).$$

En suite,nous calculons les premiers termes

Calcul de $y_0(t)$

L'intégrale fractionnaire de t^3 est donnée par :

$$I^{\alpha} t^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3}.$$

Alors

$$y_0(t) = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3}.$$

·Calcul de $y_1(t)$

En appliquant I^{α} sur $y_0(t)$:

$$y_1(t) = I^{\alpha} y_0(t) = I^{\alpha} \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} t^{\alpha+3} d\tau, \tag{3.1}$$

en utilisant la propriété de l'intégrale de convolution :

$$I^{\alpha} t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} t^{\alpha+p},$$

on trouve

$$y_1(t) = \frac{6\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)} t^{2\alpha+3}.$$

Calcul de $y_2(t)$

De la même manière

$$y_2(t) = I^{\alpha} y_1(t) = I^{\alpha} \frac{6\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)\Gamma(\alpha)} t^{2\alpha+3} = \frac{6\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} t^{2\alpha+3} d\tau$$
$$= \frac{6\Gamma(\alpha+4)\Gamma(2\alpha+4)}{\Gamma(3\alpha+4)} t^{3\alpha+3}.$$

Et enfin La solution finale est approximativement en utilisant les premiers termes, nous obtenons

$$y(t) \approx \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{6\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)} t^{2\alpha+3} + \frac{6\Gamma(\alpha+4)\Gamma(2\alpha+4)}{\Gamma(3\alpha+4)} t^{3\alpha+3} + ...$$

Ce qui donne une solution en série pour $y(t)$

La méthode d'Adomian permet de trouver une solution sous forme de série pour l'équation fractionnaire donnée.

Exemple 3.8 *Equation donnée*

$$D^{1-\alpha} y(t) = \nu t^5 + y(t). \quad 0 < \alpha < 1$$
$$y(0) = 0,$$

où ,$D^{1-\alpha} y(t)$ est le dérivé fractionnaire de Caputo et ν est une constante.

Nous l'appliquons l'opérateur inverse de l'intégrale fractionnaire d'ordre α est défini par :

$$I^{1-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau.$$

En appliquant $I^{1-\alpha}$ des deux côtés de l'équation :

$$I^{1-\alpha} D^{1-\alpha} y(t) = I^{1-\alpha} \left(\upsilon t^3 + y(t) \right).$$

Sachant que $I^{1-\alpha} D^{1-\alpha} y(t) = y(t)$, nous obtenons :

$$y(t) = \nu I^{1-\alpha} t^3 + I^{1-\alpha} y(t).$$

Etape 2 : Décomposition d'Adomian .On suppose que la solution $y(t)$ est développée en une série infinie :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t).$$

De même,$y(t)$ dans le membre de droite est aussi développé en série :

$$\begin{aligned} I^{1-\alpha} y(t) &= I^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I^{1-\alpha} y_n(t). \end{aligned}$$

On choisit

$$y_0(t) = \nu I^{1-\alpha} t^3.$$

Les autres termes sont obtenus par récurrence :

$$y_{n+1}(t) = I^{1-\alpha} y_n(t).$$

En suite,nous calculons les premiers termes

Calcul de $y_0(t)$

L'intégrale fractionnaire de t^3 est donnée par :

$$\begin{aligned} I^{1-\alpha} t^3 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(-\alpha+3)} t^{-\alpha+2} \\ &= \frac{2}{\Gamma(-\alpha+3)} t^{-\alpha+2}. \end{aligned}$$

Alors

$$y_0(t) = \frac{2}{\Gamma(-\alpha+3)} t^{-\alpha+2}.$$

·Calcul de $y_1(t)$

En appliquant $I^{1-\alpha}$ sur $y_0(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= I^{1-\alpha} y_0(t) && (3.2)\\ &= I^{1-\alpha} \frac{2}{\Gamma(-\alpha+3)} t^{-\alpha+2} && (3.3)\\ &= \frac{2}{\Gamma(-\alpha+3)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} t^{-\alpha+2} d\tau, && (3.4) \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de l'intégrale de convolution :

$$I^{1-\alpha} t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-\alpha+p)} t^{1-\alpha+p},$$

on trouve

$$y_1(t) = \frac{2\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+4}.$$

Calcul de $y_2(t)$

De la même manière

$$\begin{aligned} y_2(t) &= I^{1-\alpha} y_1(t) \\ &= I^{1-\alpha} \frac{6\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(2\alpha+4)\Gamma(\alpha)} t^{2\alpha+3} \\ &= \frac{6\Gamma(-\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+5)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} t^{\alpha+4} d\tau \\ &= \frac{6\Gamma(-\alpha+5)\Gamma(\alpha+5)}{\Gamma(2\alpha+5)} t^{2\alpha+4}. \end{aligned}$$

Et enfin La solution finale est approximativement en utilisant les premiers termes, nous obtenons

$$y(t) \approx \frac{2}{\Gamma(-\alpha+5)} t^{-\alpha+4} + \frac{6\Gamma(-\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+5)} t^{\alpha+4} + \frac{6\Gamma(-\alpha+5)\Gamma(\alpha+5)}{\Gamma(2\alpha+5)} t^{2\alpha+5} + ...$$

Ce qui donne une solution en série pour $y(t)$

3.5 La méthode de développement en série

La méthode de développement en série est une technique analytique permettant de résoudre les équations différentielles fractionnaires (EDF). L'idée de base est de développer la solution de l'équation sous forme de série, généralement une série entière, autour d'un point connu, généralement $t = 0$, ou d'un autre point pertinent. Cette méthode est particulièrement utile lorsque l'on s'attend à ce que la solution ait une forme analytique lisse, et elle peut fournir des approximations ou des solutions exactes dans certains cas.

Supposons un développement en série pour la solution : Nous commençons par supposer que la solution de l'équation différentielle fractionnaire peut être écrite sous la forme d'une série entière de la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

où a_n sont les coefficients à déterminer et t la variable indépendante.

Substitution de la série dans l'équation différentielle fractionnaire : Nous substituons ensuite le développement en série supposé dans l'équation différentielle fractionnaire. Selon la forme de l'équation, nous pouvons être amenés à utiliser une représentation spécifique pour la dérivée fractionnaire (comme les définitions de Caputo ou de Riemann-Liouville).

Calculer la dérivée fractionnaire de la série : La dérivée fractionnaire d'une série entière est également une série entière. L'expression générale de la dérivée fractionnaire d'un terme t^n est

$$D^{\alpha} t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} t^{n-\alpha}$$

Égalisation des coefficients : Après avoir substitué la série dans l'équation différentielle fractionnaire, nous égalisons les coefficients des puissances de t des deux côtés. Cela nous donne une relation de récurrence ou un ensemble d'équations algébriques permettant de déterminer les coefficients.a_n.

résoudre les coefficients : En résolvant la relation de récurrence, nous pouvons trouver les

valeurs des coefficients a_n, qui nous donnent la solution approximative ou exacte sous forme de série.

Prenons un exemple pour illustrer cette méthode dans le contexte d'une équation différentielle fractionnaire.

Résolvez l'équation différentielle fractionnaire :

$$D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t\right),0<\alpha<1$$

avec la condition initiale

$$y\left(0\right)=0$$

et supposons que $f\left(t\right)=t$

On suppose que la solution $y\left(t\right)$ a la forme

$$y\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}t^{n}$$

Nous calculerons la dérivée fractionnaire de $y\left(t\right)$ terme à terme. À l'aide de la formule générale de la dérivée fractionnaire d'une fonction puissance,t^n

$$D^{\alpha}t^{n}=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}t^{n-\alpha}$$

On obtient

$$\begin{aligned}D^{\alpha}y\left(t\right) &= D^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}t^{n}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}t^{n-\alpha}\end{aligned}$$

Maintenant, remplacez cette expression par $D^{\alpha}y\left(t\right)$ dans l'équation différentielle fractionnaire d'origine, donc l'équation devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}t^{n-\alpha}=t$$

Nous égalisons maintenant les puissances de t des deux côtés. Le membre de droite est simplement $t = t^1$; il faut donc exprimer le membre de gauche sous la forme d'une série où chaque terme est une puissance de t. Cela peut être réalisé en décalant les indices de la série afin que les puissances de t des deux côtés correspondent.

Sur le côté gauche, le terme général est $\frac{a_n\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha++1)}$ pour que la puissance de t soit égale des deux côtés, il faut que les exposants de t soient identiques. Plus précisément, nous voulons des termes où $n - \alpha = 1$, car le côté droit a . Cette condition donne la relation suivante :

$$n - \alpha = 1 \Rightarrow n = \alpha + 1$$

À ce stade, nous pouvons calculer les coefficients a_n à l'aide de la relation de récurrence dérivée de l'égalisation des puissances de t. Par exemple, pour $n = 1$, nous avons :

$$a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-\alpha)} = 1$$

Cela conduit à une valeur spécifique pour a_n, et vous pouvez ensuite répéter ce processus pour les termes d'ordre supérieur, ce qui donne une solution approximative sous forme de série entière.

Format général de la solution :

Pour cet exemple, la solution pourrait prendre la forme d'un développement en série :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Chaque a_n peut être calculé de manière récursive, et dans certains cas, cela conduit à une expression sous forme fermée pour la série

Prenons un cas simple et spécifique où $f(t) = t$ et $\alpha = \frac{1}{2}$,

Nous supposons que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

La dérivée fractionnaire de $D^{\frac{1}{2}} t^n$, nous donnera des termes impliquant $t^{n-\frac{1}{2}}$

Égaliser la série des deux côtés de l'équation $D^{\frac{1}{2}}y(t) = t$, Nous pouvons résoudre les coefficients a_n.

Chapitre 4

Existence locale et explosion de la solution d'une équations différentièlle fractionnaire avec un terme source non linéaire

4.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires ouvrent la voie à des applications plus riches et complexes. Les opérateurs fractionnaires, tels que ceux de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov, permettent de mieux capturer les dynamiques à mémoire et les phénomènes non locaux qui apparaissent dans des systèmes à caractère complexe.

Le calcul fractionnaire, qui étend les concepts de dérivée et d'intégrale aux ordres non entiers, est une branche des mathématiques qui a évolué sur plusieurs siècles. Ses origines remontent aux pionniers du calcul différentiel et intégral, et il a connu un développement significatif grâce à des contributions majeures de mathématiciens au fil du temps.

Aujourd'hui, le calcul fractionnaire et les équations différentielles fractionnaires (EDF) fournissent des outils puissants pour comprendre et décrire des phénomènes complexes avec mémoire et propriétés non locales. Les EDF ont joué un rôle important dans l'ingénierie, la science et l'éco-

nomie. Récemment, de nombreuses activités se sont concentrées sur les équations de diffusion, car ces équations ont de nombreuses applications intéressantes.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude de l'existence de solutions positives pour le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \vartheta_\rho + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta = \jmath_{0/\rho}^{1-\alpha} \left[e^{\vartheta} + |\vartheta|^{p-1}\vartheta \right] & x \in \mathbb{R}^N, \rho > 0 \\ \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $\vartheta_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, $N \geq 1$, $\theta \in [0,2]$, $\alpha \in [0,1]$, où $(-\triangle)^{\frac{\theta}{2}}$ désigne l'opérateur laplacien fractionnaire défini par

$$(-\triangle)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\zeta|^{\theta} \mathcal{F}(\vartheta)(\zeta) \right),$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée l'inverse de Fourier, pour $\vartheta \in D\left((-\triangle)^{\frac{\theta}{2}}\right) = H^{\theta}\left(\mathbb{R}^N\right)$, où $H^{\theta}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est l'espace homogène de Sobolev définie par

$$H^{\theta}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{ \vartheta \in S' : (-\triangle)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right) \right\}, \; if \; \theta \in \mathbb{N}$$
$$H^{\theta}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{ \vartheta \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right) : (-\triangle)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right) \right\}, \; if \; \theta \notin \mathbb{N}$$

S'est l'espace de Schwartz et

$$C_0\left(\mathbb{R}^N\right) = \{ \vartheta \in C\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que}$$
$$\vartheta(x) \longrightarrow 0 \text{ si } |x| \longrightarrow \infty \}$$

Si $\jmath_{0/\rho}^{1-\alpha}|\vartheta|^{p-1}\vartheta$ est supprimé, nous avons le problème suivant publié par B. Ahmad et al.

$$\begin{cases} \vartheta_\rho + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta = \jmath_{0/\rho}^{1-\alpha} e^{\vartheta} & x \in \mathbb{R}^N, \rho > 0, \\ \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.2}$$

Sous des conditions appropriées sur les données initiales, B. Ahmad et al ont montré l'existence d'une solution locale unique de (2), ils ont découvert que la solution explose en un temps fini et ont analysé son profil d'explosion dans le temps.

Fino et Kirane ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} \vartheta_\rho + (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \vartheta = \jmath_{0/\rho}^{1-\alpha} |\vartheta|^{p-1}\vartheta & x \in \mathbb{R}^N, \rho > 0 \\ \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.3}$$

Ils ont validé le problème ci-dessus par un résultat d'existence et d'unicité. Ils ont démontré que la solution explose et ont analysé leur profil d'explosion dans le temps.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 1 examine l'explosion des solutions pour le problème présenté. La section 2 présente les résultats d'existence locale pour le problème et la section 3 introduit le taux d'explosion des solutions pour $\theta = 2$.

4.2 Explosion de la solution

Définition 4.1 *Soient ϑ_0 dans $\overset{\infty}{L_{LOC}}(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{T} > 0$, on dit que $\vartheta \in \left(L_1(0,\mathcal{T}),\ \overset{\infty}{L_{LOC}}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ est une solution faible du problème $(4,1)$ si elle vérifié l'équation*

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta_0 \psi(x,0)\, dxd\rho + \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^N} \jmath_{0/\rho}^{1-\alpha} \left[e^{\vartheta} + |\vartheta|^{p-1}\vartheta\right] \psi(x,\rho)\, dxd\rho \\ &= \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta(x,\rho) (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \psi(x,\rho)\, dxd\rho + \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta(x,\rho) \psi_\rho(x,\rho)\, dxd\rho, \end{aligned}$$

pour toute fonction test $\psi \in C^1\left([0,\mathcal{T}], H^\theta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que $\psi(x,\mathcal{T}) = 0$.

Théorème 4.1 *Soient $\vartheta_0 \in C^0\left(\mathbb{R}^N\right)$ avec $\vartheta_0 \geq 0, \vartheta_0 \neq 0$, et $0 < \theta \leq 2$. Si*

$$\frac{(N-\theta)}{\theta(\alpha+1)} \leq q,$$

alors la solution de (4.1) explose en temps fini.

Preuve Par contradiction. Assumons que ϑ est une solution faible globale de (4.1), alors $\vartheta \in \left([0,\mathcal{T}], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ pour tout $\mathcal{T} \gg 1$,telle que $\vartheta(\rho) > 0$ pour tout $\rho \in [0,\mathcal{T}]$.

Assumons que $\psi(x,\rho) = {}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi(x,\rho)$ avec $\varphi \in C^1\left([0,\mathcal{T}] \text{ et } H^{\theta}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ tels que

$$\varphi(x,\rho) = \varphi_1(\rho)\,\varphi_2^l(x), \qquad l \gg 1, \tag{4.4}$$

$$\varphi_1(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{\mathcal{T}}\right)_+^{\gamma}, \qquad \gamma \gg 1, \tag{4.5}$$

$$\varphi_2(x) = \phi\left(\frac{|x|}{\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}}\right). \tag{4.6}$$

et ϕ est régulière, telle que

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 \text{ si} & r \leq 1, \\ \searrow \text{ si} & 1 \leq r \leq 2, \\ 0 \text{ si} & r \geq 2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Du lemme 1.1.1, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta_0(x)\,{}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi(x,0)\,dx \\ &+ \int_0^{\mathcal{T}}\int_{\mathbb{R}^N} \left[e^{\vartheta} + |\vartheta|^{p-1}\vartheta\right]{}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi(x,\rho)\,dxd\rho \\ &= \int_0^{\mathcal{T}}\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta(x,\rho)\,(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}\,C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi(x,\rho)\,dxd\rho \\ &- \int_0^{\mathcal{T}} \vartheta(x,\rho)\,{}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_{\rho}(x,\rho)\,dxd\rho, \end{aligned} \tag{4.8}$$

et si on pose

$$\sum_{\mathcal{T}} = [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 2\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}\right\}$$

on trouve

$$\begin{aligned} &C\mathcal{T}^{-\alpha}\int_{\Omega} \vartheta_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)\,dx \\ &+ \int_{\sum_{\mathcal{T}}} \left[e^{\vartheta} + |\vartheta|^{p-1}\vartheta\right]\varphi(x,\rho)\,dxd\rho \\ &= \int_{\sum_{\mathcal{T}}} \vartheta(x,\rho)\,(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\,\varphi_2^l(x)\,{}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho \\ &- \int_{\sum_{\mathcal{T}}} \vartheta(x,\rho)\,\varphi_2^l(x)\,{}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho, \end{aligned} \tag{4.9}$$

en utilisant $\varphi_1(0)=1$, on a

$$\begin{aligned}
&C\mathcal{T}^{-\alpha}\int_\Omega \vartheta_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\sum_{\mathcal{T}}} e^{\vartheta}\varphi(x,\rho)\,dxd\rho\\
&+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}|\vartheta|^{p-1}\vartheta\varphi(x,\rho)\,dxd\rho\\
&=\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\,(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2^l(x)\,{}^C D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho\\
&+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\,\varphi_2^l(x)\,{}^C D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho,
\end{aligned}\tag{4.10}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}^{-\alpha}\int_\Omega \vartheta_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\sum_{\mathcal{T}}} e^{\vartheta}\varphi(x,\rho)\,dxd\rho\\
&+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}|\vartheta|^{p-1}\vartheta\varphi(x,\rho)\,dxd\rho\\
&\le l\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\,\varphi_2^{l-1}(x)\,(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2(x)\,D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho\\
&+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\,\varphi_2^l(x)\,D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho.
\end{aligned}\tag{4.11}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \vartheta_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)\,dx+\\
&\int_{\sum_{\mathcal{T}}} e^{\vartheta}\varphi(x,\rho)\,dxd\rho+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}|\vartheta|^{p-1}\vartheta\varphi(x,\rho)\,dxd\rho\\
&\le l\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\left|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2(x)\right|^C D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho\\
&+\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\left|D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi(x,\rho)\right|dxd\rho\\
&=lI+J,
\end{aligned}\tag{4.12}$$

On pose

$$I=\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\vartheta(x,\rho)\left|(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2(x)\right|^C D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho)\,dxd\rho,\tag{4.13}$$

et

$$J = \int_{\sum_{\mathcal{T}}} \vartheta(x,\rho) \left| {}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}} \varphi(x,\rho) \right| dx d\rho. \tag{4.14}$$

En utilisant l'inégalitée de Young, pour I :

$$fg \leq \varepsilon e^{f} + g \ln \frac{g}{e\varepsilon}. \tag{4.15}$$

avec

$$\begin{aligned} &f = \vartheta(x,\rho), g = \left| (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \varphi_2(x) \right|^{C} D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}} \varphi_1(\rho), \\ &\varepsilon = \frac{1}{4}\varphi(x,\rho). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I \leq & \int_{\sum_{\mathcal{T}}} \left| (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \varphi_2(x) \right| \\ & {}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}} \varphi_1(\rho) \ln \left[\frac{4 \left| (-\Delta)^{\frac{\theta}{2}} \varphi_2(x) \right|^{C} D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}} \varphi_1(\rho)}{e\varphi_2^{l}(x)\varphi_1(\rho)} \right] dx d\rho \\ & + \frac{1}{4} \int_{\sum_{\mathcal{T}}} e^{\vartheta} \varphi(x,\rho) dx d\rho. \end{aligned}$$

De la même manière , en utilisant l'inégalitée de Young, pour J :

$$AB \leq \varepsilon \frac{A^{p}}{p} + \varepsilon^{1-q} \frac{B^{q}}{q},\ p + q = pq.$$

avec

$$A = \vartheta(x,\rho)$$

et

$$B = \left| {}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}} \varphi(x,\rho) \right|, \varepsilon = \frac{1}{4}\varphi(x,\rho),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
J &\leq \frac{1}{4p}\int_{\sum_{\mathcal{T}}} \vartheta^{p}\varphi\left(x,\rho\right)dxd\rho+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left(\varphi\left(x,\rho\right)\right)^{1-q}\\
&\left|{}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi\left(x,\rho\right)\right|^{q}dxd\rho\\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\sum_{\mathcal{T}}} \vartheta^{p-1}\vartheta\varphi\left(x,\rho\right)dxd\rho+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left(\left[\varphi_2^{l}\left(x\right)\varphi_1\left(\rho\right)\right]\right)^{1-q}\\
&\left|\varphi_2^{l-}\left(x\right){}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\right|^{q}dxd\rho\\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\sum_{\mathcal{T}}} \left|\vartheta\right|^{p-1}\vartheta\varphi\left(x,\rho\right)dxd\rho+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\varphi_2^{l}\left(x\right)\left|{}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\right|^{q}\varphi dxd\rho, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

finallement, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\vartheta_0\left(x\right)\varphi_2^{l}\left(x\right)dx+\frac{3}{4}\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left[e^{\vartheta}+\left|\vartheta\right|^{p-1}\vartheta\right]\varphi\left(x,\rho\right)dxd\rho\\
&\leq l\int_{\sum_{\rho}}\left|\left(-\Delta\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(x\right)\right|^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\ln\left[\frac{4\left|\left(-\Delta\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(x\right)\right|^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)}{e\varphi_2^{l}\left(x\right)\varphi_1\left(\rho\right)}\right]dxd\rho\\
&+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left[\varphi_2^{l-}\left(x\right)\varphi_1\left(\rho\right)\right]^{1-q}\left|{}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\right|^{q}dxd\rho\\
&\leq l\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left|\left(-\Delta\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(x\right)\right|^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\ln\left[\frac{4\left|\left(-\Delta\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(x\right)\right|^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)}{e\varphi_2^{l}\left(x\right)\varphi_1\left(\rho\right)}\right]dxd\rho\\
&+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\int_{\sum_{\mathcal{T}}}\left[\varphi_2^{l}\left(x\right)\varphi_1\left(\rho\right)\right]^{1-q}\left|{}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)\right|^{q}dxd\rho.
\end{aligned}$$

Par des changement de variables , on trouve

$$\rho=\mathcal{T}\tau \text{ et } x=\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y,$$

$$dxd\rho=\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}N+1}dyd\tau,$$

$$\left(-\Delta_x\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2=\mathcal{T}^{-1}\left(-\Delta_y\right)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2,$$

$${}^{C}D^{\alpha}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1\left(\rho\right)=\frac{\left(1-\alpha+\gamma\right)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)}\mathcal{T}^{-\alpha}\left(1-\tau\right)_{+}^{\gamma-\alpha},$$

$$ {}^{C}D^{\alpha+1}_{\rho/\mathcal{T}}\varphi_1(\rho) = \frac{(1-\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)}\mathcal{T}^{-\alpha-1}(1-\tau)_+^{\gamma-\alpha-1}. $$

Maintenant, on pose $\sum = [0,1]\times\left\{y\in\mathbb{R}^N, |y|\leq 2\right\}$,alors

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \vartheta_0(x)\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int_\sum \left[e^\vartheta + |\vartheta|^{p-1}\vartheta\right]\varphi(x,\rho)\,dxd\rho \\
&\leq \frac{(1-\alpha+\gamma)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)} l\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}N-\alpha} \\
&\int_\sum \left|(-\Delta_y)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma-\alpha} \\
&\times \ln\left[\frac{\frac{4(1-\alpha+\gamma)\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(2-\alpha+\gamma)}\mathcal{T}^{-\alpha}\left|(-\Delta_y)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)(1-\tau)_+^{-\alpha}\right|}{\varphi_2^l\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)}\right] dyd\tau \\
&+ \left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\left[\frac{(1-\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)}\right]^q \mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}N-1+(-\alpha-1)q} \\
&\times \int_\sum \left(\mathcal{T}^{\frac{\alpha}{\theta}}y\right)(1-\tau)_+^{(\gamma-\alpha-1)q}\left[\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)\right]^{l(1-q)} dyd\tau \\
&\leq C_1^{\frac{1}{\theta}N-\alpha}\mathcal{T}\int_\sum \left|(-\Delta_y)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma-\alpha} \\
&\times \ln\left[\frac{C_2^{-\alpha}\mathcal{T}\left|(-\Delta_y)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)(1-\tau)_+^{-\alpha}\right|}{\varphi_2^l\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)}\right] dyd\tau \\
&+ C_3\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}N-1+(-\alpha-1)q} \\
&\int_\sum \left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)(1-\tau)_+^{(\gamma-\alpha-1)q}\left[\varphi_2\left(\mathcal{T}^{\frac{1}{\theta}}y\right)\right]^{l(1-q)} dyd\tau.
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(1-\alpha+\gamma)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)}l,\ C_2 = \frac{4(1-\alpha+\gamma)\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(2-\alpha+\gamma)}, \\
C_3 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{1-q}\left(\frac{1}{q}\right)\left[\frac{(1-\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\gamma)}\right]^q,
\end{aligned}
$$

nous avons donc deux fonctions φ_2 et $(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}\varphi_2(x)$ qui sont bornées dans $\sum$ et $\varphi_2 \longrightarrow 1$ quand $\rho \longrightarrow +\infty$.

Le théorème de convergence dominées entraine que le membre de droite diverge$-\infty$ quand

$\rho \longrightarrow +\infty$. Contradiction.. ■

4.3 Existence Local

Définition 4.2 (*Solution douce*) *Soient* $\vartheta_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, $p > 1$ *et* $\mathcal{T} > 0$ *,On dit que* $\vartheta \in C\left([0,\mathcal{T}], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ *est une solution douce du problème* (4.1) *si* ϑ *satisfait l'équation intégral*

$$\vartheta(\rho) = \mathcal{T}(\rho)\vartheta_0 + \int_0^\rho \mathcal{T}(\rho - s) J_{0,\rho}^{1-\alpha}\left[e^\vartheta + |\vartheta|^{p-1}\vartheta\right] ds,$$
$$\rho \in [0,\mathcal{T}], \tag{4.17}$$

Théorème 4.2 (*Existence Local*)*Soient* $\vartheta_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $p > 1$; *il existe un temps maximal* $\mathcal{T}_{\max} > 0$ *et une solution douce unique* $\vartheta \in C\left([0,\mathcal{T}], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ *pour notre problème* (4.1).

De plus, nous avons une alternative soit $\mathcal{T}_{\max} = \infty$ *ou* $\mathcal{T}_{\max} < \infty$ *et* $\|\vartheta\|_{L^\infty}\left([0,\mathcal{T}_{\max}], L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \longrightarrow \infty$ *lorsque* $\rho \longrightarrow \mathcal{T}_{\max}$.

Aussi, si $\vartheta_0 \geq 0$,$\vartheta_0 \neq 0$, *alors* $\vartheta(\rho) > 0$ *pour tout* $0 < \rho < \mathcal{T}_{\max}$.

Preuve Pour tout $\rho > 0$,Définissons l'espace de Banach

$$E_{\mathcal{T}} = \left\{\vartheta \in C\left((0,\mathcal{T}), C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right),\ \|\vartheta\|_1 \leq 2\|\vartheta_0\|_\infty\right\}$$

oú $\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty((0,\mathcal{T}),C_0(\mathbb{R}^N))}$

$$\begin{aligned}
\psi(\vartheta) &= \mathcal{T}(\rho)\vartheta_0 \\
&\quad + \int_0^\rho \mathcal{T}(\rho - s) J_{0,\rho}^{1-\alpha}\left[e^\vartheta + \||\vartheta|^{p-1}\vartheta\right]\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty} \\
&= \mathcal{T}(\rho)\vartheta_0 + \int_0^\rho \mathcal{T}(\rho - s) J_{0,\rho}^{1-\alpha} e^\vartheta ds \\
&\quad + \int_0^\rho \mathcal{T}(\rho - s) J_{0,\rho}^{1-\alpha}\vartheta|^{p-1}\vartheta ds \\
&= \mathcal{T}(\rho)\vartheta_0 + I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \| \int_0^\rho \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \| e^{\vartheta(\sigma)} \|_\infty d\sigma ds \|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])} \\ &\leq \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} e^{\|\vartheta\|_1} \\ &\leq \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} e^{2\|\vartheta_0\|_\infty}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \| \int_0^\rho \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \| |\vartheta|^{p-1}\vartheta \|_\infty d\sigma ds \|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])} \\ &\leq \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \|\vartheta^p\|_1 \\ &\leq \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} 2^p \|\vartheta_0\|_\infty^p. \end{aligned} \tag{4.20}$$

de la définition de la fonction ψ on obtient

$$\begin{aligned} \|\psi(\vartheta)\|_1 &\leq \|\vartheta_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \| \int_0^\rho \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \| e^{\vartheta} \\ &\quad + |\vartheta|^{p-1}\vartheta \|_\infty d\sigma ds \|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])} \\ &\leq \|\vartheta_0\|_\infty + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} e^{\|\vartheta\|_1} \\ &\quad + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \|\vartheta^p\|_1 \\ &\leq \|\vartheta_0\|_\infty + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} e^{2\|\vartheta_0\|_\infty} \\ &\quad + \frac{\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} 2^p \|\vartheta_0\|_\infty^p \\ &\leq \|\vartheta_0\|_\infty \\ &\quad + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} \left[e^{2\|\vartheta_0\|_\infty} + 2^p \|\vartheta_0\|_\infty^p \right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Maintenant, si on prend $\mathcal{T}$ suffisamment petit tel que

$$\frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)}\left[\frac{e^{2\|\vartheta_0\|_\infty}}{\|\vartheta_0\|}+2^p\|\vartheta_0\|_\infty^{p-1}\right]<1, \tag{4.22}$$

on conclut que $\psi(\vartheta)\in E_{\mathcal{T}}$.

ψ est contractante ? Pour ϑ, $v\in E_{\mathcal{T}}$, on a

$$\begin{aligned}\|\psi(\vartheta)-\psi(v)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\|\int_0^\rho\int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|\left(e^\vartheta-e^v\right)\\ &\quad+\left(|\vartheta|^{p-1}\vartheta-|v|^{p-1}v\right)\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty([0,\rho])}\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\\ &\quad\|\int_0^\rho\int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|\left(e^\vartheta-e^v\right)\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\\ &\quad\|\int_0^\rho\int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|\left(|\vartheta|^{p-1}\vartheta-|v|^{p-1}v\right)\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])}\\ &\leq I_3+I_4,\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec

$$I_3=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\|\int_0^\rho\int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|\left(e^\vartheta-e^v\right)\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])}, \tag{4.24}$$

et

$$I_4=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\|\int_0^\rho\int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|\left(|\vartheta|^{p-1}\vartheta-|v|^{p-1}v\right)\|_\infty d\sigma ds\|_{L^\infty([0,\mathcal{T}])}. \tag{4.25}$$

On a

$$\begin{aligned}I_3&\leq\frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)}\|\left(e^\vartheta-e^v\right)\|_\infty\\ &\leq\frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)}e^M\|\vartheta-v\|.\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\|\left(e^\vartheta-e^v\right)\|\leq e^{2\|\vartheta_0\|}\|\vartheta-v\|.$$

grace à

$$\| \left(e^{\vartheta} - e^{v}\right) \| \leq e^{M} \|\vartheta - v\|, \ M \geq \max\left(\|\vartheta\|, \|v\|\right),$$

on a

$$I_4 \leq \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} \| \left(|\vartheta|^{p-1}\vartheta - |v|^{p-1}v\right) \|_1,$$

grace à l'négalitée suivante

$$\begin{aligned}
\| \left(|\vartheta|^{p-1}\vartheta - |v|^{p-1}v\right) \| &\leq 2p[\max\left(\|\vartheta\|, \|v\|\right)^{p-1} \\
&\quad + min\left(\|\vartheta\|, \|v\|\right)^{p-1}] \|\vartheta - v\| \\
&\leq 2p \|\vartheta - v\| \left(\|\vartheta\|^{p-1} + \|v\|^{p-1}\right) \\
&\leq 2p \|\vartheta - v\| \left[2max\left(\|\vartheta\|, \|v\|\right)\right]^{p-1} \\
&\leq 2p \|\vartheta - v\| \|\vartheta\|_1^{p-1} \\
&\leq 2p \|\vartheta - v\| \|(2\vartheta_0)\|^{p-1} \\
&\leq 2^p p \|\vartheta - v\| \|\vartheta_0\|^{p-1} \\
&= C\left(P\right) \|\vartheta - v\| \|\vartheta_0\|^{p-1}. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\psi\left(\vartheta\right) - \psi\left(v\right)\|_1 \leq &\left[\frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} e^{2\|\vartheta_0\|} + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} C\left(P\right) \|\vartheta_0\|^{p-1}\right] \\
&\|\vartheta - v\|.
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}$ est choisi tel que

$$\left[\frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} e^{2\|\vartheta_0\|} + \frac{\mathcal{T}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\gamma)} C\left(P\right) \|\vartheta_0\|^{p-1}\right] \leq 1, \qquad (4.28)$$

on obtient

$$\|\psi\left(\vartheta\right) - \psi\left(v\right)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|\vartheta - v\|, \qquad (4.29)$$

Alors, du théorème de point fixe de Banach, il existe une solution douce $\vartheta \in \left([0, \mathcal{T}], \ C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$pour le problème (4.1) .

Positivité de la solution. :

Si $\vartheta_0 \geq 0$,$\vartheta_0 \neq 0$, on a de (4.17)

$$\vartheta(\rho) \geq \mathcal{T}(\rho)\,\vartheta_0 > 0.$$

■

4.4 Taux d'explosion de la solution pour $\theta = 2$

Dans cette partie, on présente le taux d'explosition de la solution de (4.1) .

Théorème 4.3 *Soit $\vartheta_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$,$\vartheta_0 \geq 0$,$\vartheta_0 \neq 0$, et soit ϑ la solution explosée en temps $\mathcal{T}_{\max} = \mathcal{T}^*$. Alors il existe une constante positive k*

$$\ln\left(k\left(\mathcal{T}^* - \rho\right)^{-(2-\alpha)}\right) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \vartheta(x,s). \tag{4.30}$$

Preuve En prenant $\|\vartheta\|_1 \leq M$ à la place de $\|\vartheta\|_1 \leq 2\|\vartheta_0\|_\infty$ dans l'espace $E_{\mathcal{T}}$ pout toute constante positive $M > 0$ et $0 < \rho < \mathcal{T}$, donc l'estimation :

$$\|\vartheta_0\|_\infty + C\left[e^{2M} + 2^{p-1}M^{p-1}\right]\mathcal{T}^{2-\alpha} \leq M, \tag{4.31}$$

On déduit que $\|\vartheta(\rho)\|_\infty \leq M$ pour tout $0 < \rho < \mathcal{T}$. Par conséquence, ceci est satisfait pour toute trajectoire Clairement, si $0 \leq s < \mathcal{T}$ et

$$(\rho - s)^{2-\alpha} \leq C\frac{[M - \|\vartheta(s)\|_\infty]}{[e^{2M} + 2^{p-1}M^{p-1}]}, \tag{4.32}$$

alors $\|\vartheta(s)\|_\infty \leq M$, pour tout $0 < \rho < \mathcal{T}$, De plus, si $0 \leq s < \mathcal{T}^*$ et $\|\vartheta(\rho)\|_\infty \leq M$, alors

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}^* - s)^{2-\alpha} &\leq C\frac{[M - \|\vartheta(s)\|_\infty]}{[e^{2M} + 2^{p-1}M^{p-1}]} \\ &\leq C\frac{[M - \|\vartheta(s)\|_\infty]}{e^{2M}}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

En effet, par contradiction supposons que pour certains $M \geq \|\vartheta(\rho)\|_\infty$ and $(s, \mathcal{T}^*)$ nous ayons

$$(\rho - s)^{2-\alpha} \leq C\frac{[M - \|\vartheta(s)\|_\infty]}{e^{2M}}, \tag{4.34}$$

alors, en utilisant (4.32) nous en déduisons que $\|\vartheta(\rho)\|_\infty \leq M$ pour tout $\rho \in (S, \mathcal{T}^*)$ qui contredit le fait que $\|\vartheta(\rho)\|_\infty \longrightarrow \infty$ lorsque $\rho \longrightarrow \mathcal{T}^*$.

Finallement, on posons

$$M = \|\vartheta(s)\|_\infty + 1, \tag{4.35}$$

dans (4.33) ,pour $0 < s < \mathcal{T}^*$ on obtient

$$(\mathcal{T}^* - s)^{2-\alpha} > Ce^{-2\|\vartheta(s)\|_\infty},$$

comme ϑ est continue et positive, donc

$$\ln k\,(\mathcal{T}^* - s)^{\alpha-2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \vartheta(x, s), \tag{4.36}$$

pour tout $s \in [0, \mathcal{T}^*]$. ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié une équation aux dérivées partielles fractionnaire intégrant un terme source composé d'une puissance et d'une exponentielle. L'approche adoptée a permis de mettre en évidence l'influence de la dérivation fractionnaire sur la dynamique de la solution et la manière dont le terme source affecte la stabilité et l'évolution du système.

Nous avons tout d'abord établi l'existence et l'unicité des solutions sous certaines hypothèses appropriées, en utilisant les outils du calcul fractionnaire et des espaces de Sobolev généralisés. Ensuite, nous avons exploré le comportement asymptotique des solutions, en démontrant comment l'interaction entre l'opérateur différentiel fractionnaire et le terme source modifie la dissipation ou l'amplification des solutions. Des résultats analytiques ont été complétés par des simulations numériques illustrant les divers régimes de propagation.

L'étude menée confirme que l'introduction de la dérivation fractionnaire permet une meilleure modélisation des phénomènes à mémoire et des dynamiques non locales, ce qui ouvre de nouvelles perspectives dans la résolution de problèmes physiques et d'ingénierie complexes. Nos prochains travaux de recherche englobent les aspects clés suivants :

1. Plonger dans le domaine des équations différentielles fractionnaires d'ordre variable et leur application à la modélisation de divers phénomènes.

2. Étudier le principe de moyenne en conjonction avec les processus impulsifs pour démêler ses implications et ses applications potentielles.

Bibliographie

[1] A. C ordoba, D. C ordoba, A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations, Comm. Math. Phys. 249 (2004), 511{528.

[2] A. Fino, Critical exponent for damped wave equations with nonlinear memory, Hal Arch. Ouv. Id : 00473941v2, (2010).

[3] A. Hakem, Blow-up results for evolution problem on Rn, J. Math. Nachr. 278 (2005), 1033-1040.

[4] A. Hakem and M. Berbiche, On the blow-up behavior of solutions to semi-linear wave models with fractional damping, (IAENG) Int. J. Appl. Math. 41 (3) (2011).

[5] A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations , 2006.

[6] A. Martinez, An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis, Universit a di Bologna, Italy, 2001.

[7] A. Matsumura, On the asymptotic behaviour of solutions of semi-linear wave equa- tions, Publ. Res. Inst. Math. Sci (RIMS) 12, pp. 169-189 (1976).

[8] A. Vasy, Partial Di erential Equations, Theory and applications, Graduate studies in mathematics, Vol 169, 2010.

[9] C. Bandle, H. A. Levine and Q. S. Zhang, Critical exponents of Fujita type for inhomogeneous parabolic equations and systems, J. Math. Anal. Appl.251 (2000), 624 - 648.

[10] E. Mitidieri and S.I. Pohozaev, A priori estimates and blow-up of solutions to non-linear partial di erential equations and inequalities, Proc. Steklov. Inst. Math, (234), pp. 1-383, (2001).

[11] E. Mitidieri and S.I. Pohozaev, Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on RN ; J. Evol. Equations, pp. 189-220, (2001).

[12] G. Todorova and B. Yardanov, Critical exponent for a non linear wave equation with damping, Journal of Di erential equations, (174)(2001), pp. 464-489.

[13] H. Faour, A. Fino and M. Jazar, Local existence and uniqueness for a semilinear accretive wave equation, J. Math. Anal. Appl, (377), pp.534-539, (2011). 81

[14] H. Fujita, On the Blowing up of solutions of the problem for ut = u+u1+ ; Faculty of science, University of Tokyo13 (1966), pp. 109-124.

[15] H. Le Dret, Equations aux d eriv ees partielles elliptiques non lin eaires, Springer, 2012.

[16] I. Podlubny, Fractional Di eretial Equations, Mathematics in science and engineering, Volume 198, University of Kosice, Slovak republic. [17] J. L. Lions and W. A. Strauss, Some nonlinear evolution equations, Bull. Soc. Math. France, (93), pp. 43-96, (1965).

[17] K. B. Oldham, J. Spanier, The fractional calculs, London Academic Press (1974).

[18] K. Deng and H. A. Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems : The sequal, J. Math. Anal. Appl. 243 (2000), 85-126.

[19] K. M. Kowankar, A.D Gangal ; Fractional Di erentiability of nowhere differentiable functions and di-mensions, Chaos, V.6, No. 4, 1996, American Institute of Phyics.

[20] M. Abu Naim Sheikh and MD. Abdul Matin, Global Existence of Solution for semi- linear Dissipative wave Equation, Vietnam Journal of math. 34 :3 pp. 295-305, (2006).

[21] M. Berbiche and A. Hakem, Finite time blow-up of solutions for damped wave Equa- tion with non linear Memory, Comm. Math. Analysis, (14)(1), pp. 72-84, (2013).

[22] M. Caputo, Elasticita 'a e dissipazione, Zanichili Bologna (1969). [24] M. Caputo and F. Mainardi, Linear models of dissipation in anelastic solids, Riv. Nuovo Cimento. 1(1971), 161-198.

[23] M. D'Abbicco, The inuence of a nonlinear memory on the damped wave equation, Nonlinear Anal. 95 (2014), 130-145.

[24] M. E. Taylor, Partial di erential equations III, Nonlinear Equations, Springer, New York, 1996.

[25] M. M. Dzrbashjan and A. Nersesyan, On the application of some integro-di erential operators, Dokl. Akad. Nauk. 121 (1958), 210-213.

[26] M. Medkour, B. Rebiai, S. Alkhalaf, A. Alharbi, Blow-up solutions for fractional differential equations with nonlinear memory, Fractals (2025) 2540092 (09 *pages*)

[27] M. WU, S. LI and L. LU, Critical exponent for a damped wave system with fractional integral Elect. jour. of Di . Eq. Vol 2015 No. 211, (2015), pp. 1-10.

[28] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2-D quasi- geostrophic equations, Comm. Pure. Appl. Ana. (2005),161{181.

[29] N. S. Landkof, Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, New York,(1972).

[30] P. Amster, Topological methods in the study of boundary value problems, Universitext, Springer, 2014. 82

[31] P. Souplet, Monotonicity of solutions and blow-up for semilinear parabolic equations with nonlinear memory, Z. angew. Math. Phys. 55, pp. 28-31, (2004).

[32] Q. S. Zhang, A Blow up result for a nonlinear wave equation with damping , C.R. Acad. Sciences, Paris, 2001.

[33] R. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York-London, 1975.

[34] S. I. Pohozaev and A. Tesei, Blow-up of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Math. Natur. Rend. Lincei, 9 Math. App. 11, N2 ; pp. 99-109, (2000).

[35] S. Katayama, Md A. Sheikh and S. Tarama, The Cauchy and mixed problems for semilinear wave equations with damping terms, Math, Japonica 50 (3), (2000), pp.459-566.

[36] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and derivatives, Theory and application, Gordon and Breach Publishers, 1987.

[37] S. Selberg, Lecture Notes, Math. 632, PDE, http//www.math.ntnu.no/ sselberg, 2001

[38] T. Cazenave, F. Dickstein and F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Nonlinear anal. 68, pp. 862-874, (2008).

[39] T. Hadj Kaddour and A. Hakem, Local existence and su cient conditions of the non- global solution for weighted damped wave equations, Facta univ., Ser. Math. Info., Vol. 32, No5 (2017), 629-657.

[40] T. Hadj Kaddour and A. Hakem, Blow-up solutions to fractional damped wave equation with nonlinear memory, (Submitted to Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B).

[41] V. Barbu Partial Di erential Equations and Boundary Value Problems, Science +Business media, B.V.,Springer, Vol 441.

[42] V. Khac Khoan, Distribution, Analyse de Fourier et op erateurs aux d eriv ees partielles. Tome 2, 1967.

[43] . Georgiev and G. Todorova, Existence of solution of the wave equation with non-linear damping and source terms, J. Di . Eqs.109 (1994), 295-308.

[44] Y. Wakasugi, On the di usive structure for the damped wave equation with variable coe cients, doctoral thesis, Graduate school of science, Osaka University, JAPAN, (2014). 83