Table des matières

1 Notions préliminiaires **6**
1.1 Espaces vectoriels et Normés 6
1.2 Quelques propriétés 9
1.3 Espaces de Hilbert et de Banach 11

2 Opérateurs linéaires **14**
2.1 Définition d'opérateur 14
2.2 Quelques propriétés des opérateurs 15
2.2.1 Composé de plusieurs opérateurs 15
2.2.2 Norme d'opérateur 16
2.2.3 Inverse d'un opérateur 16

3 Quelques classes d'opérateurs **20**
3.1 Adjoint d'un opérateur 20
3.2 Opérateurs auto-adjoints 22
3.3 Opérateurs isométriques 23
3.4 Opérateurs unitaires 24
3.5 Opérateurs normaux 25
3.6 Opérateurs compacts 26

4 Théorie spectrale des opérateurs bornés **30**
4.1 Valeurs propres et vecteurs propres 30
4.2 Spectre et résolvante 31
4.3 Type de Spectre 32
4.4 Propriétés du spectre et de la résolvante 34

4.5 Spectre de l'adjoint d'un opérateur 37
4.6 Spectre des opérateurs auto-adjoints 39
4.7 Spectre des opérateurs isométriques 42
4.8 Spectre des opérateurs unitaires 42
4.9 Spectre des opérateurs normaux 43
4.10 Spectre des opérateurs compacts 44

Notations

Tout au long de ce travail, nous avons utilisé les notations suivantes :
H : Espace de Hilbert.

$L(X,Y)$: Espace des opérateurs linéaires bornés de X vers Y.

$L(H)$: Espace des opérateurs linéaires et bornés défini sur l'espace H.

$\mathcal{I}L(E)$: Ensemble des opérateurs inversibles sur $L(E)$.
$K(X,Y)$: Espace des opérateurs compacts de X vers Y.

$K(H)$: Espace des opérateurs compacts de l'espace H.
$r(A)$: Rayon spectral de A.
$R(A)$: Image de A.

$\mathrm{Ker}(A)$: Noyau de A.
$\mathrm{Re}(A)$: Partie réelle de A.

$\mathrm{Im}\,(A)$: Partie imaginaire de A.
I : Application identité.

$\Bbbk$: Corps quelconque.
∂ : Frontiére.

$C\,[a,b]$: Espace des fonctions continues définies sur $[a,b]$.

$C^{\infty}\,([a,b])$: Espace des fonctions continûments dérivables (de classe C^{∞} sur $[a,b]$).
$l_2\,([a,b])$: Espaces des suites réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables.
$L^2_{\mathbb{N}}\,(\mathbb{R})$: Espace des fonctions de carrées intégrables sur $\mathbb{R}$.
$\mathrm{Vect}\,(v_1,v_2,...)$: Espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1,v_2.

$\{x_n\}$: Suite.

$\sum$: Symbole de sommation.

$M^{\perp}$: Complémentaire orthogonale de M.

$\langle .,. \rangle$: Produit scalaire.
$\overline{X}$: Fermeture de X.
$A_{/F}$: Restriction de A sur l'espace F.
$B(a,r)$: Boule de centre a et de rayon r.

A^{-1} : Inverse de A.

A^* : Adjoint de A.

$\sigma(A)$: Spectre de A.

$R_\lambda(A)$: Résolvante de A.

$\rho(A)$: Ensemble résolvant.

$\sigma_p(A)$: Spectre ponctuel de A.

$\sigma_r(A)$: Spectre residuel de A.

$\sigma_c(A)$: Spectre continu de A.

$\sigma_a(A)$: Spectre approché de A.

Introduction

Ce mémoire présente une synthèse des théories des opérateurs et spectrales, qui sont des domaines des mathématiques. Ils ont été développé dans la première moitié du $20^{éme}$ siècle grâce en particulier aux travaux de S. Banach, D. Hilbert et M.Fréchet.

Ces travaux ont permis de faire de grands progrés dans la résolution de plusieurs problèmes et fournissent les principaux outils encore utilisés actuellement dans ces domaines.

D'un point de vue purement mathématique ont peut voir la théorie des opérateurs comme une extension à la dimension infinie de la géométrie Euclidiènne en dimension finie.

Ce domaine d'apparence abstraite a beaucoup d'applications concrètes, notamment en physique quantique.

C'est d'ailleurs en partie pour donner un cadre mathématique adapté à la théorie quantique que D. Hilbert et J. Von Neumann ont développé la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert.

Pour terminer cette introduction je voudrais insister sur le point suivant :
La théorie des opérateurs étudie des concepts généraux, parfois loin de l'intuition géométrique, mais dont l'efficacité à été prouvée depuis presque un siécle.
Pour se familiariser en profondeur avec ses concepts et méthodes il faut constamment faire des aller-retour entre les concepts, les résultats généraux, d'une part, et les exemples qui les ont motivés d'autre part.

Ce mémoire est structuré de quatre chapitres :
Le premièr chapitre est consacré à les notions de bases de l'analyse fonctionnelle. Nous donnons un court résumé des théorèmes et définitions que nous allons utiliser dans les autres chapitres. Dans la premiere partie, nous parlons des espaces vectoriels, normés, Hilbert et Banach. Dans la deuxième partie, nous donnons quelques inigalités et leurs démonstrations qui serons nécessaires aux chapitres suivants. Nous avons pourtant préféré ne pas aller trop loin dans les généralisations.
Dans le deuxième chapitre on a présenté quelques notions des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert, qui représente les outils utilisés dans la théorie des opérateurs.
Le troixième chapitre tourne essentiellement autour de l'étude de différentes classes d'opérateurs normaux définis sur un espace de Hilbert et donner leurs propriétés.
Le quatriéme chapitre est consacré à la théorie spectrale où on introduit trois notions essentielles : la notion du spectre, la notion de la resolvante enfin les notions du spectre continu, residuel, ponctuel, approché, leurs propriétés et applications sur les differents types d'opérateurs.

Chapitre 1

Notions préliminiaires

A fin de simplifier la lecture de ce travail, le premier chapitre de ce mémoire est consacré à donner quelques rappels, définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent : espaces vectoriels, normés et espaces de Hilbert et Banach. Comme on va donner quelques inégalités et leurs démonstrations qui serons nécessaires aux chapitres suivants. Nous avons préféré ne pas aller trop loin dans les généralisations.

1.1 Espaces vectoriels et Normés

Dans ce chapitre tous les espaces considérés seront sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
$\overline{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *On appelle* ***espace vectoriel*** *topologique tout espace vectoriel E muni d'une topologie rendant continues les applications :*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y, \text{ et } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longrightarrow \lambda x.$$

On notera également qu'une application linéaire entre espace vectoriel topologique est continue si et seulement si elle l'est en 0.
Enfin, on rappelle qu'un espace topologique est séparé, si pour tout couple de points distincts posséde des voisinages disjoints.

Définition 1.2 *Un* ***produit scalaire*** *sur un espace vectoriel E, est une application qu'on notera $\langle ., . \rangle$; tel que*

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle & : & E \times E \to \mathbb{k} \\ (x,y) & \to & \langle x,y \rangle \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :
1) pour tout $(x,y) \in E \times E$*, l'application* $(x,y) \to \langle x,y \rangle \in \mathbb{k}$ *est une application linéaire.*
2) pour tout $x, y \in E$*, on a :*

$$\begin{cases} \langle y,x \rangle = \langle x,y \rangle \text{ ; si l'espace est réel.} \\ \langle y,x \rangle = \overline{\langle x,y \rangle}; \text{ si l'espace est complexe.} \end{cases}$$

3) pour tout $x \in E$*, on a :* $\langle x,x \rangle \geq 0$ *et* $\langle x,x \rangle = 0$*; si et seulement si* $x = 0$.
On note alors : $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} \geq 0$;et on vérifie que c'est une norme sur E.

Remarque 1.1 *Notons que dans le cas complexe, on a pour tout* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x,y \rangle$$

Exemple 1.1 *- Pour* $(x;y) \in \mathbb{R}^n$ *; le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$ *est défini par :*

$\langle x,y \rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$; tels que : $x = (x_1, ..., x_n)$; $y = (y_1, ..., y_n)$
- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par :
$\langle x,y \rangle = x_1\overline{y_1} + ...+ x_n\overline{y_n}$; tels que : $x = (x_1, ..., x_n)$; $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$.
- On peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{k}^n$ en se donnant des poids, c'est-à-dire des nombres $a_1, ..., a_n > 0$, et en posant

$$\begin{cases} \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k & \text{si } \mathbb{k} = \mathbb{R} \\ \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \overline{y_k} & \text{si } \mathbb{k} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Définition 1.3 *Soit* E *un espace vectoriel, on appelle* ***semi-norme*** *sur* E*, toute application* φ *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant aux trois conditions suivantes :*

$[c_1]$ $\forall x \in E : \varphi(x) \geq 0$,
$[c_2]$ $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E; \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$,
$[c_3]$ $\forall x, y \in E : \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.
pour tout x de E on note :

$$\varphi(x) = \|x\|.$$

Le couple $(E, \|.\|)$ s'appelle un espace semi-normé.

Exemple 1.2 *1- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des semi-normes.*

2- L' application φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) = |x-y| \end{array}$$

est une semi-norme.

Proposition 1.1 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace semi-normé sur $\mathbb{k}$, alors :*

1- $\|0\| = 0$,
2- $\forall\, x, y \in E : \|x-y\| = \|y-x\|$,
3- $\forall\, x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

Preuve. 1- Soit λ un élément de $\mathbb{k}$; tel que $|\lambda| \neq 1$.On a : $\lambda.0 = 0$. En vertu de la condition $[c_2]$, on obtient :

$$\|0\| = \|\lambda.0\| = |\lambda| \, \|0\| .$$

D'où :

$$\|0\| (1 - |\lambda|) = 0.$$

Comme $|\lambda| \neq 1$, il en resulte que :

$$\|0\| = 0.$$

2- Pour tout x et y de E, on a :

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|-1\| \, \|(y-x)\| = \|(y-x)\| .$$

3- On a :

$$y = y - x + x \Rightarrow \|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| .$$

D'où :

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| . \qquad (*)$$

De même, on a :

$$x = x - y + y \Rightarrow \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| .$$

D'où :

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| . \qquad (**)$$

Les inégalités (*) et (**) prises simultanément donnent l'égalité cherchée. ■

Définition 1.4 *On appelle* ***norme*** *sur un espace vectoriel E, toute application N de E dans $\mathbb{R}$,vérifiant, en sus des trois conditions $[c_1]$, $[c_2]$ et $[c_3]$ précitées, la quatrième condition suivante :*

$$[c_4] \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Le couple (E, N) s'appelle espace normé. Comme précédemment, la norme N est désignée par $\|.\|$.

Exemple 1.3 *1- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.*

2- L'application citée dans l'exemple (1.2) ci-dessus n'est pas norme. Elle ne vérifié pas la condition $[c_4]$.
En effet, on a : $\|(1,1)\| = |1-1| = 0$ et $(1,1) \neq (0,0)$.
3- **Exemples des Normes sur $\mathbb{R}^n$**
a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
b) $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$.
c) $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$.
d) $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty$

1.2 Quelques propriétés

1- Inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition 1.2 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soit $\|.\|$ la norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$; pour $x, y \in E$; alors : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$.*

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.
Preuve. a- Posons, pour tout réel t, $P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$
Comme y est non nul, $\|y\|^2$est non nul également.
Par construction, cette expression polynomiale du second degré est positive ou nulle pour tout réel t. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul : i.e $\langle x, y\rangle^2 - \|y\|^2\|x\|^2 \leq 0$; d'où l'inégalité annoncée.
b- Cas d'égalité :
Si (x, y) est lié alors $x = \lambda y$ pour un certain scalaire λ et l'on en déduit immédiatement :
$|\langle x, y\rangle| = |\lambda| . \|y\|^2 = \|x\| . \|y\|$.

Réciproquement, si $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$; alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine réelle (double) t, et pour ce t on a :
$\|x+ty\|^2 = P(t) = 0$,donc $x = -ty$, si bien que (x,y) est lié. Ou plus directement (avec le t_0 de la variante ci-dessus) : l'hypothèse équivaut à $P(t_0) = 0$, donc à $x = -t_0 y$. ■

2- **Identité du Parallélogramme**

Proposition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tous $(x,y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Preuve. Soient $x, y \in E$. On sait que :
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$,
en sommant les deux équations : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. ■

3- **Identité de polarisation**

Proposition 1.4 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tous $(x;y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

Preuve. On a : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$
$-\|x-y\|^2 = -\langle x-y, x-y\rangle = -\|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$
$i\|x+iy\|^2 = i\langle x+iy, x+iy\rangle = i\|x\|^2 + i\|y\|^2 + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$
$-i\|x-iy\|^2 = -i\langle x-iy, x-iy\rangle = -i\|x\|^2 - i\|y\|^2 + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$
Par l'addition, On obtient l'égalité de polarisation. ■

Remarque 1.2 *Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ l'égalité précédente devient*

$$\forall x,y \in H;\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée de E est compacte ; alors E est de dimension finie.*

Preuve. Désignons par B la boule unité de E et par $B(a,r)$ la boule de centre a et de rayon r. De la compacité de la boule unité il résulte, qu'il existe $a_1, ..., a_n \in B$, tels que : $B \subset \cup_{1\le j\le n} B\left(a_j, \frac{1}{2}\right)$.
Soit V le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, ..., a_n\}$, montrons que $V = E$; raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $b \in E$ et $b \notin V$ et puisque V est fermé ; donc $dist(b, V) = \alpha \geq 0$.
Il existe donc $c \in V$ tel que : $\alpha \leq \|b - c\| \leq \frac{3\alpha}{2}$.
Posons $u = \frac{b-c}{\|b-c\|}$. Il existe $i : 1 \leq i \leq n$; tel que : $\|u - a_i\| \leq \frac{1}{2}$.
D'autre part on a $b = c + \|b - c\| u = c + \|b - c\| a_i + \|b - c\| (u - a_i)$;
où $c + \|b - c\| a_i \in V$ et $\|b - c\| (u - a_i) \leq \frac{3\alpha}{4}$.
Ce qui implique : $dist(b, V) \leq \frac{3\alpha}{4}$, ce qui contredit la définition. ■

Définition 1.5 *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont **orthogonaux**, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h \rangle = 0$.*

Si M est une partie de H, l'**orthogonal** de M défini par :

$$M^{\perp} = \{h \in H \ : \ \forall g \in M, \ h \perp g\}$$

La remarque suivante est souvent utile :

Remarque 1.3 *Un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus M^{\perp}$.*

On peut énoncer le **théorème de Pythagore** : si $f_1, ..., f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors :

$$\|f_1 + ... + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + ... + \|f_n\|^2 .$$

Lemme 1.1 *Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H. Alors, on a :*

1. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ coïncide avec l'adhérence $\overline{F}$ de F dans H.
2. F est dense dans H si et seulement si ; $F^{\perp} = \{0\}$.

Critère de fermeture : Soit H un espace de Hilbert. Un sous ensemble $F \subset H$ est fermé si et seulement s'il existe une application linéaire $f : H \to \mathbb{k}$ continue telle que $F = \mathrm{Ker}(f)$.

1.3 Espaces de Hilbert et de Banach

Définition 1.6 ***Un espace de Hilbert** est la donnée d'un espace vectoriel H complexe et d'une forme sesquilinéaire, i.e. linéaire en la première variable :*

$$\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle \ ; \ \forall x, y \in E; \ \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}.$$

Et anti-linéaire en la seconde :

$$\langle x, \beta y + \beta' y' \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle + \overline{\beta'} \langle x, y' \rangle \ ; \ \forall x, y \in E; \ \beta, \beta' \in \mathbb{C}.$$

Cette forme sesquilinéaire est de plus hermitienne : $\langle x, \ y \rangle = \overline{\langle x, \ y \rangle}$ et strictement positive : $x \neq \ 0 \Rightarrow \langle x, \ y \rangle > 0$.

Exemple 1.4 *1- L'espace $\mathbb{k}^n$, muni du produit scalaire défini par : $\langle x,\ y\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} x_i\overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.*

2- L'espace $l_2(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{1\leq i\leq n} |u_n|^2 converge\right\}$, muni du produit scalaire $\langle u,\ v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\overline{v_n}$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.7 *Pour H un espace, muni de la norme $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$; H est un **espace de Banach,** s'il est complet pour la métrique associée à la norme. (On dit qu'un espace normé X est complet si toute suite de Cauchy a une limite dans X).*

Exemple 1.5 *(i) Pour n un entier tel que $n \geq 1$,alors $\mathbb{k}^n$est un espace de Banach* ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).

(ii) On désigne par $C_{\mathbb{k}}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{k}$ à valeurs dans K. $C_{\mathbb{k}}(K)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$.

Solution

(i) Il suffit de prouver que $\mathbb{k}$ est complet. On sait que tout produit fini d'espaces métriques complet est complet et que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets d'où $\mathbb{k}^n$ est complet, donc un espace de Banach.

(ii) Soit f_n une suite de Cauchy. Pour chaque $x \in K$ montrons successivement que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, tel que f est continue sur K puis que f_n converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$.

On a d'abord

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \qquad (1.^*)$$

pour tout n, m. On en déduit que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy. $\mathbb{k}$ étant complet, on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Il résulte de (1.*) que f_n converge uniformement vers f sur K, f est donc continue sur K.

Soient $\varepsilon > 0$ et N_ε tel que $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ on ait $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Il résulte alors de (1.*) que l'on a : $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon\ \ \forall n \geq N\varepsilon$.

Exemple 1.6 *Soit $L^1(\mathbb{R})$ l'epace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$; muni d'un produit défini comme suite :*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

est un espace de Banach.

Théorème 1.2 *Si P_M est une projection dans un sous-espace fermé M d'un espace de Hilbert H, alors P_M est un opérateur tel que $P_M^* = P_M$ et $P_M^2 = P_M$. Si P est un opérateur tel que $P^* = P$ et $P^2 = P$, alors ; $M = R(P)$ est un sous-espace fermé et $P = P_M$, i.e., P est un projection dans M.*

Preuve. ($\Rightarrow$) :On suppose que P_M est une projection dans H et de note $R(P_M)$ le rang de P_M par M.Soit $x_1 = y_1 \oplus z_1$ et $x_2 = y_2 \oplus z_2$, telle que $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^{\perp}$.
Alors $x_{1+}x_2 = (y_1 + y_2) \oplus (z_1 + z_2)$ avec $y_1 + y_2 \in M$ et $z_1 + z_2 \in M^{\perp}$, alors

$$P_M(x_1 + x_2) = (y_1 + y_2) = P_M x_1 + P_M x_2,$$

et il est evident que $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$, alors P_M est linéaire. La preuve de bornétude de P_M se vérifie d'aprés :

$$\|P_M x_1\|^2 = \|y_1\|^2 \leq \|y_1\|^2 + \|z_1\|^2 = \|x_1\|^2$$

P_M est un opérateur de H. De plus

$$(P_M x_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1 + P_M x_2),$$

Alors $P_M = P_M^*$. Pour tout $x \in H$ et $P_M x \in M$, on a

$$P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M x,$$

alors $P_M^2 = P_M$.
($\Leftarrow$) :On suppose que $P = P^* = P^2$ et de note $R(P_M)$ par M. Nous observons que M est un sous-espace fermé de H. Pour tout $x \in \overline{M}$, il existe une sequence $\{x_n\} \subset H$ telle que $Px_n \to x$, et $Px_n = P^2 x_n \to Px$ par la continuité de P et $P^2 = P$. A partir de $x = Px \in M$, alors $\overline{M} = M$. Depuis $P = P^* = P^2$,

$$(x - Px, Px) = (x, Px) - (x, P^* Px) = 0.$$

Il suit que $x = Px \oplus (I - P)x, Px \in M$ et $x - Px \in M^{\perp}$, donc P est la projection dans M. ■

Remarque 1.4 *Si $M \subset H$ est un sous-espace fermé, on peut définir la **projection orthogonale** sur M, notée P_M, de la manière suivante : pour $h \in H$, $P_M h$ est l'unique élément de M tel que*

$h - P_M h \perp M$. Alors P_M est une application linéaire telle que $P_M^2 = P_M$, $\|p_M\, h\| \leq \|h\|$ pour tout $h \in H$, $\ker P_M = M^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\ P_m = M$.

Définition 1.8 *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une **base orthonormale** d'un espace de Hilbert H si*

1) $\|e_i\| = 1$.
2) L' espace engendré $\mathrm{Vect}\{e_i\}$ est dense dans H.
3) $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.
Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Chapitre 2

Opérateurs linéaires

Dans ce chapitre on va rappeller un certain nombre de résultats, pour la plupart déja vus, sur les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert et Banach. Dans tout ce chapitre E et F désigneront des espaces de Banach, nous noterons $L(E,F)$ (respectivement $L(E)$) l'espace des applications linéaires continues de E dans F (respectivement des endomorphismes continus de E) muni de sa norme d'opérateur habituelle.

2.1 Définition d'opérateur

Définition 2.1 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur A est une application définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset H$ a valeurs dans H. $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur. A est un opérateur linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *Additive* : $A(x+y) = Ax + Ay$; $x, y \in H$.
(ii) *Homogène :* $A(\alpha x) = \alpha Ax$, $x \in H$ *et pour tout nombre complexe* α.

Exemple 2.1 *Soient X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; l'application $A : X \to X$ définie pour $x \in X$ par :*

$$A_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire.
En effet, pour $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$; On a :

$$A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2)$$

$$= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2)$$

$$= \alpha A_\lambda(x_1) + A_\lambda(x_2)$$

Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport λ de l'espace vectoriel X.

Remarque 2.1 *1) On notera* $\mathrm{Ker}\, A$ *le noyau de l'opérateur* A *i.e.* $\mathrm{Ker}\, A = \{x \in H;\ Ax = 0\}$.

2) $\mathrm{Im}A$ *désignera le sous-espace de* H_0 *image de* H *par* A. *On le notera aussi* $A(H)$.
3) $\mathrm{Ker}\, A$ *(resp.* $\mathrm{Im}A$*) est un sous-espace vectoriel de* H *(resp. de* H_0*). On notera que* $\mathrm{Ker}\, A$ *est toujours un sous-espace fermé de* H *mais* $\mathrm{Im}\, A$ *n'est pas forcément fermé dans* H_0.

Remarque 2.2 *- Opérateur identité noté* I *est défini par :* $Ix = x, \forall x \in H$.

- Opérateur nul 0 *est défini :* $0x = 0, \forall x \in H$.
- On note $L(H)$ *l'ensemble des opérateurs sur* H. *Si* $A \in L(H)$, *on définit la norme de l'opérateur* A *par :*

$$\|A\| = sup\left\{\|Ah\| \ ;\ h \in H;\ \|h\| \ \leq\ 1\right\}.$$

Proposition 2.1 *Voici quelques propriétés de la norme d'un opérateur :*

1. Si $A \in L(H)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.
2. Si $A; B \in L(H)$, alors $A + B \in L(H)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. Si $\alpha \in \Bbbk$ et $A \in L(H)$, alors $\alpha A \in L(H)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| \,.\, \|A\|$.
4. Si $A; B \in L(H)$, alors $AB \in L(H)$ et $\|AB\| \leq \|A\| \,.\, \|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$).

Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ définit une norme sur $L(H)$.

2.2 Quelques propriétés des opérateurs

2.2.1 Composé de plusieurs opérateurs

Soient H, H_0 et H_1 des espaces de Hilbert et $A_1 \in L(H, H_0)$ et $A_2 \in L(H_0, H_1)$ des opérateurs. Considèrons l'opérateur composé $A_2 \circ A_1 \in L(H, H_1)$.

Proposition 2.2 *1. On a :* $\|A_2 \circ A_1\| \leq \|A_2\| \,.\, \|A_1\|$

2. Soit $U \in L(H)$ un opérateur de l'espace de Hilbert H dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur U comme étant les opérateurs de H dans H définis de la manière suivante :

$$U^0 = I \text{ (l'opérateur identité)}, U^1 = U, U^2 = U \circ U, ..., U^n = U \circ U^{n-1} = U^{n-1} \circ U \quad (n \geq 1).$$

Corollaire 2.1 $\forall n \in \mathbb{N}; \|T^n\| \leq \|T\|^n$.

2.2.2 Norme d'opérateur

Définition 2.2 *Soit A un opérateur borné défini sur un espace de Hilbert H, on dit que A est un opérateur borné, s'il existe*

$$c \geq 0 : \|Ax\| \leq c \|x\| ; \forall x \in H;$$

$\|A\|$ est définie par :

$$\|A\| = inf \{c \geq 0; \ \|Ax\| \leq c \|x\| ; \ \forall x \in H\}.$$

Proposition 2.3 *Considérons deux espaces de Banach, E_i, $i = 1, 2$ et une application linéaire $A : E_1 \to E_2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A est continue sur E_1.
(ii) A est continue en 0.
(iii) Il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in E_1$ on a $\|Au\|_2 \leq C \|u\|_1$.
Preuve. Il suffit de montrer que (ii) entraîne (iii), les autres propriétés étant immédiates.
Il résulte de la continuité en 0, qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|u\|_1 \leq \eta \Longrightarrow \|Au\|_2 \leq 1$$

Maintenant pour $u \neq 0$ on applique l'inégalité précédente à $v = \frac{u}{\|u\|_1}\eta$ et on obtient (iii) avec $C = \frac{1}{\eta}$. ■

2.2.3 Inverse d'un opérateur

Définition 2.3 *Soient H et H'des espaces de Hilbert et $A \in L(H, H')$ un opérateur. On dit que A est inversible s'il existe $B \in L(H', H)$ tel que : $AB = I_{H'}$, et $BA = I_H$, où I_H (resp. $I_{H'}$) est l'opérateur identité de H (resp. de H'). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.*

Cas particulier où $H = H'$: Soit $T \in L(H)$. Dans le cas où H est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents.
Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant :

Théorème 2.1 *Si $\dim H < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) A est inversible.
2) A est injectif.
3) A est surjectif.

4) A admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in L(H)$ tel que $AU = I_H$).
5) A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in L(H)$ tel que $VA = I_H$).
Remarque et contre-exemple : Attention si $\dim H = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies :
Soit $H = \ell^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \; ; \; (x = (x_n)_{n\geq 1}).$$

Considérons l'application $S : \ell^2 \to \ell^2$ définie pour tout

$$x = (x_n)_{n\geq 1}, \text{ par } Sx = y = (y_n)_{n\geq 1} \text{ où; } y_1 = 0, \; y_2 = x_1, ..., \; y_n = x_{n-1}, ...(n \geq 1).$$

Autrement dit Sx est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un rang. L' application S est linéaire de ℓ^2 dans lui même et c'est une isométrie puisque $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$.
Donc $S \in L(\ell^2)$. On appelle S l'opérateur de décalage dans ℓ^2.
On voit alors facilement que :
1) S est injective (car isométrique),
2) S n'est pas surjective.
3) S admet un inverse à gauche $T : x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto Tx = (x_{n+1})_{n\geq 1}$ (c'est l'opérateur qui «efface» la première coordonnée donc on a clairement $TS = I_{\ell^2}$.
4) L' opérateur T n'est pas l'inverse à droite de l'opérateur S.
Le seul résultat simple valable quelle que soit la dimension de H est le suivant :

Théorème 2.2 *Soit $A \in L(H)$, tel que : $\|A\| < 1$, alors la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente et l'opérateur $(I - A)$ est inversible et son inverse $(I - A)^{-1}$ est donnée par : $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.*

Remarque 2.3 *Le théorème précédent est vrai aussi si H est remplacé par un espace de Banach quelconque E.*

Preuve. Pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=0}^{n} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k$.
La contrainte $\|A\| < 1$, assure la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \|A\|^k$. Il en résulte aussitôt que la série $\sum_{k\geq 0} \left\|A^k\right\|$ converge elle aussi. Comme E est supposé de Banach, la convergence de cette dernière série entraîne que la somme de la série $\sum_{k\geq 0} A^k$ est un opérateur continu.

Par ailleurs, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{n}A^k\,(I-A)=I-A^{n+1}.$$

En sachant que $\|A^{n+1}\|\leq\|A\|^{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, le passage à la limite dans la dernière égalité donne ;

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\,(I-A)=I.$$

D'où ;

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$$

■

Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème précédent sous la forme suivante :

Corollaire 2.2 *Soit $A\in L(H)$, tel que : $\|I-A\|<1$, alors l'opérateur A est inversible et son inverse $(A)^{-1}$ est donnée par :*

$$(A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k.$$

Théorème 2.3 *(i) Soit $A\in L(E)$; tel que $\|A\|<1$ alors $(I-A)$ est inversibe et*

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n.$$

(ii) Si A est inversible alors, $A+B$ est inversible pour tout $B\in L(E)$ tel que $\|B\|<\|A\|^{-1}$ et on a :

$$\begin{aligned}(A+B)^{-1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A^{-1}B\right)^nA^{-1}.\\(A+B)^{-1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}A^{-1-n}B^n,\ \text{si } A \text{ et } B \text{ commutent.}\end{aligned}$$

(ii) L ensemble des opérateurs inversibles sur $L(E)$ noté $\mathcal{I}L(E)$ est un ouvert de $L(E)$ et l'application $A\mapsto A^{-1}$ est continue et même C^∞ de $\mathcal{I}L(E)$ dans $\mathcal{I}L(E)$.

Théorème 2.4 *Un opérateur $A\in L(H_1,H_2)$ est inversible si et seulement si A^* est inversible*

et on a $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

Exemple 2.2 *1- L' application identité I est de toute évidence inversible*

2- Soit $E = L_N^2(\mathbb{R})$ et u une application définie de E dans E par

$$x \mapsto u(x) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^{n-1}}x_n, ... \right)$$

avec $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$.
u est trivialement linéaire. Elle est aussi injective car son noyau est réduit à $\{0\}$. Elle est enfin surjective et de plus

$$u^{-1}(x) = \left(x_1, 2x_2, ..., 2^{n-1}x_n, ... \right).$$

u^{-1} n'est pas bornée sur E. Elle est donc non continue. On conclus que u n'est pas inversible.

Chapitre 3

Quelques classes d'opérateurs

Dans ce chapitre nous proposons une brève étude de différentes classes d'opérateurs normaux définis sur un espace de Hilbert et donné leurs propriétés.
On commence avec la notion essentielle d'adjoint d'un opérateur linéaire, plusieurs des classes particuliéres d'opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert seront ensuite définies au moyen de cette notion.

3.1 Adjoint d'un opérateur

Définition 3.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in L(E,F)$; l'unique application linéaire $A^* \in L(F,E)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait : $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$ est appelée adjointe de A.*

Proposition 3.1 *Soient H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in L(H)$, appelé **adjoint** de A, vérifiant la relation suivante : pour tous $x, y \in H$:*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle .$$

De plus, on a : $\|A\| = \|A^*\|$.
Preuve. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a l'inégalité :

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \|A\| . \|x\| . \|y\| .$$

Ainsi, l'application $\ell_y : x \longmapsto \langle Ax, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, et par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément dans H notons-le $A^*(y)$ tel que :

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle .$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et $\lambda \in K$, $A^*(y) + \lambda A^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $A^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $A^*(y) + \lambda A^*(z) = A^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que A^*est linéaire. Enfin, on calcule la norme opérateur de A^*

$$\|A^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle A^* x, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle y, A^* x\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle Ay, x\rangle| = \|A\|.$$

■

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 3.2 *Soient $A, B \in L(H)$ et $\alpha \in \mathbb{k}$. Alors :*

1. $I^* = I$.
2. $(A^*)^* = A$.
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
4. $(AB)^* = B^* A^*$.
5. Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Proposition 3.3 *Soit $A \in L(H)$, Alors : $\|A\|^2 = \|AA^*\|$.*

Preuve. *Pour $h \in H$ avec $\|h\| \leq 1$, on a :*

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^* Ah, h\rangle \leq \|A^* Ah\| . \|h\| \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| . \|A\| .$$

d'où : $\|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| . \|A\|$. En simplifiant par $\|A\|$, on obtient $\|A\| \leq \|A^*\|$. En remplaçant A par A^* , on obtient $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$. Ainsi $\|A\| = \|A^*\|$, et la chaîne d'inégalités est en fait une chaîne d'égalités. ■

Exemple 3.1 *Soit $S : L^2 \to L^2$ un opérateur défini par*

$$S(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...), \text{ alors } S^*(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (\alpha_2, \alpha_3, ...).$$

(S est nomé le shift)

Solution 3.1 *Soient (α_n) et (β_n) deux suites dans L^2 et $S : L^2 \to L^2$. Alors :*

$$\langle S^*(\alpha_n), (\beta_n)\rangle = \langle (\alpha_n), S(\beta_n)\rangle$$

$$= \langle (\alpha_1, \alpha_2, ...), (0, \beta_1, \beta_2, ...)\rangle$$

$$= \alpha_2 \overline{\beta_1} + \alpha_3 \overline{\beta_2} + ...$$

$$= \langle (\alpha_2, \alpha_3, ...), (\beta_1, \beta_2, ...)\rangle .$$

Ainsi S^* est bien donné par la formule annoncée.

Proposition 3.4 *Soit $A \in L(H)$; Alors :*

$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ et $\overline{\operatorname{Im} A} = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

Preuve. (1). $\subset$. Soient $x \in \operatorname{Ker} A$ et $y \in \operatorname{Im} A^*$. Alors il existe $z \in H$ tel que : $y = A^* z$.
D'où $\langle x, y\rangle = \langle x, A^* z\rangle = \langle Ax, z\rangle = 0$; donc $x \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.
(2). $\supset$. Pour l'autre sense, si $x \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ et $z \in H$, alors $\langle Ax, z\rangle = \langle x, A^{*}\cdot z\rangle = 0$. mettons $z = Ax$ on aura $Ax = 0$, $x \in \operatorname{Ker} A$. D'où l'égalité est prouvé. Pour la deuxiéme relation en utilise une démonstration similaire.
D'après (1) on obtient :

$$[\operatorname{Ker}(A^*)]^\perp = [\operatorname{Im}(A)^\perp]^\perp = \overline{\operatorname{Im}(A)},$$

d'où, résulte l'égalité cherchée. ■

3.2 Opérateurs auto-adjoints

Définition 3.2 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $A \in L(H)$ est dit* ***auto-adjoint*** *ou*

hermitien si $A^* = A$.

Définition 3.3 *Un opérateur $P \in L(H_1)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in H_1$*

$$\langle P(x), x\rangle \geq 0, \forall x \in H_1.$$

Proposition 3.5 *Si A est auto-adjoint, alors :*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$$

Preuve. Soit $M = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$.
Si $\|h\| = 1$; alors : $|\langle Ah, h\rangle| \leq \|A\|$, et donc $M \leq \|A\|$.
D'autre part, remarquons d'abord que pour tout f dans H, $|\langle Af, f\rangle| \leq M\|f\|^2$. Si $\|h\| = \|g\| = 1$, alors :

$$\begin{aligned}\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, g\rangle \\ &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle g, A^* h\rangle + \langle Ag, g\rangle\end{aligned}$$

Puisque $A = A^*$, cela implique :

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm 2\operatorname{Re}\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, g\rangle$$

En soustrayant l'une de l'autre de ces inégalités, on obtient :

$$4\operatorname{Re}\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle \leq M\left(\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2\right).$$

On obtient alors, par l'identité du parallélogramme,

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle Ah, g\rangle \leq 2M\left(\|h\|^2 + \|g\|^2\right) = 4M.$$

Soit maintenant $\theta \in [0, 2\pi]$; tel que $\langle Ah, g\rangle = e^{i\theta}\,|\langle Ah, g\rangle|$. En appliquant l'inégalité précédente avec $e^{i\theta}h$ à la place de h, on obtient $|\langle Ah, g\rangle| \leq M$ dès lors que $\|h\| = \|g\| = 1$. On prenant le supremum sur g et h, on obtient $\|A\| \leq M$. ■

Corollaire 3.1 *Si $A = A^*$ et si $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout h, alors : $A = 0$.*

Remarque 3.1 *Ce corollaire n'est pas vrai si on ne suppose pas $A = A^*$. Par exemple, pour*

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Alors $\langle Ah, h\rangle = 0$; pour tout $h \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 3.1 *Si H est un espace de Hilbert complexe et si $A \in L(H)$, alors les opérateurs*

$B = \frac{(A+A^*)}{2}$ et $C = \frac{(A-A^*)}{2i}$ sont auto-adjoints et $A = B + iC$. Les opérateurs B et C sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de A.

Exemple 3.2 *Pour tout $A \in L(H_1, H_2)$, l'opérateur $A^*A \in L(H_1)$ est auto-adjoint, car*

$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$.

Proposition 3.6 *Soient $A \in L(H_1, H_2)$ et $B \in L(H_2, H_3)$ des opérateurs auto-adjoint, Alors :*

1. A^* est borné et $\|A^*\| = \|A\|$.
2. $(A^*)^* = A$.
3. $\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Im}\,A^*)^\perp$ et $\overline{\mathrm{Im}\,A} = (\ker A^*)^\perp$.
4. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.
6. $A^*A = 0$ *ou* $AA^* = 0$ *implique* $A = 0$.

3.3 Opérateurs isométriques

Définition 3.4 *Un opérateur $A \in L(H)$ est **isométrique** s'il préserve la norme, c'est-à-dire si*

$\|Ah\| = \|h\|$; pour tout $h \in H$.

Proposition 3.7 *Si $A \in L(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. A est une isométrique.
2. $A^*A = I$.
3. $\langle Ah, Ag\rangle = \langle h, g\rangle$; pour tout h, g dans H.

Preuve. Comme $\langle A^*Ah, g\rangle = \langle Ah, Ag\rangle$, on voit facilement que (2) et (3) sont équivalents.
On obtient (1) à partir de (3) en prenant $g = h$. Pour montrer (1) $\Longrightarrow$ (3), on utilise la formule de« polarisation »

$$\langle Ah, Ag\rangle = \frac{1}{4}\left(\|A(h+g)\|^2 - \|A(h-g)\|^2 + i\|A(h+ig)\|^2 - i\|A(h-ig)\|^2\right).$$

■

Proposition 3.8 *Soient E et F deux espaces de Hilbert, l'application $T \to T^*$ est isométrique de $L(E,F)$ sur $L(F,E)$; pour tout $T \in L(E,F)$ on a $(T^*)^* = T$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. Pour tout $S \in L(E,F)$ et pour tout $T \in L(F,H)$ on a : $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.*

3.4 Opérateurs unitaires

Définition 3.5 *Soient E et F deux espaces de Hilbert, un élément $U \in L(E,F)$ est appelé **unitaire** si $U^* \circ U = Id_E$ et $U \circ U^* = Id_F$ .i.e. U est un opérateur **unitaire** si U est inversible et $U^{-1} = U^*$.*

Proposition 3.9 *Soient $U, V \in L(H)$ des opérateurs unitaires. Alors :*

(i) U est isométrique .
(ii) $\|U\| = 1$.
(iii) U^{-1} et U^* sont unitaires.
(iv) UV est unitaire.

Preuve. (i) Pour tout $v \in H$, on a : $\|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv\rangle = \langle U^*Uv, v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$.
(ii) Si $\|Uv\| = \|v\|$ pour tout $v \in H$, alors : $\|U\| = \sup_{v\in H} \frac{\|Uv\|}{\|v\|} = 1$.
(iii) C'est une conséquence immédiate de la proposition (3.6).
(iv) On a bien $(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^*U^* = (UV)^*$.
Par contre, une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire. ■

Exemple 3.3 *Soit A un opérateur auto-adjoint, alors l'opérateur $U = (A-i)(A+i)^{-1}$ est unitaire.*

Solution

Calculons U^* :
$U^* = (A-i)^{-1}(A+i)$. Or $A-i$ et $(A+i)^{-1}$ commutent.
D'où $UU^* = U^*U = I$.

3.5 Opérateurs normaux

Définition 3.6 *Soient H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. On dit que A est un opérateur* ***normal*** *si $A^*A = AA^*$.*

Clairement, un opérateur $A \in L(H)$ auto-adjoint ou unitaires est normal, mais la réciproque est fausse .

Exemple 3.4 *1) Pour $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$, A est normal.*

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}a & 0 \\ 0 & \overline{b}b \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ 0 & b\overline{b} \end{pmatrix}$$

2) Soit $S : L^2 \to L^2$ tel que :

$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$

$\langle SX, Y\rangle = \langle X, S^*Y\rangle\,; \quad X, Y \in L^2$

On pose $X = (x_1, x_2, x_3, ...)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, ...)$

$\langle SX, Y\rangle = \langle (0, x_1, x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, y_3, ...)\rangle$

$= 0\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + \cdots$

On pose $S^*Y = (z_1, z_2, z_3, ...)$

$\langle X, S^*Y\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \cdots$

$$\begin{cases} \overline{z_1} = \overline{y_2} \to z_1 = y_2 \\ \overline{z_2} = \overline{y_3} \to z_2 = y_3 \\ \overline{z_3} = \overline{y_4} \to z_3 = y_4 \\ \qquad\vdots \\ \overline{z_n} = \overline{y_{n+1}} \to z_n = y_{n+1} \end{cases}$$

$(SS^*)X = S(S^*X) = S(x_2, x_3, x_4, ...)$

$= (0, x_2, x_3, x_4, ...)$

$(S^*S)X = S^*(SX) = S^*(0, x_1, x_2, x_3, ...)$

$= (x_1, x_2, x_3, ...)$

$SS^* \neq S^*S$

L'opérateur S n'est pas normal.

Proposition 3.10 *Soit $A \in L(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) A est normal.
(b) $\|Ah\| = \|A^*h\|$ pour tout h.
Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à (c).
(c) Les parties réelles et imaginaires de A commutent.

3.6 Opérateurs compacts

Soient E, F des espaces de Banach.

Définition 3.7 *Une application linéaire continue $A \in L(E,F)$ est dite **compacte** si l'image $A(\overline{B_E})$ par l'application A de la boule unité fermée $\overline{B_E}$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $K(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. Si $E = F$ alors, on note $K(E)$.*

On rappelle que si (X,d) est un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est dit relativement compact si son adhérence dans X est compacte.

Proposition 3.11 *Si A est un opérateur linéaire de E dans F. Alors ; les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $A \in K(E,F)$
2. Pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E, la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous suite convergente dans F.

Preuve. $\triangleright$ On suppose que A est un opérateur compact et on considère une suite bornée quelconque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \underset{n}{\text{Sup}} \|x_n\|$, alors la suite $(Ax_n)_n$ est contenue dans l'ensemble $A(B_E(0,\alpha))$.
Or $A(B_E(0,\alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $(Ax_n)_n$ une sous suite convergente.
$\triangleleft$ Soient maintenant M une partie bornée de E et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{A(M)}$. Alors il existe une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $A(M)$ telle que :

$$\| z_n - y_n \| \leq \frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ aussi. Il s'en suit que $A(M)$ est relativement compact. D'où A est compact. ■

Remarque 3.2 *Un opérateur compact est nécessairement continu, sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Ax_n\| \to +\infty$, ce qui contredit la compacité.*

On rappelle maintenant le théorème d'Ascoli, qui est un outil pour montrer la compacité.

Théorème 3.2 *(Théorème d'Ascoli) Soient (I,d) un espace métrique compact et (X,d') un espace métrique complet. Alors ; une partie H de $C(I,X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. H est équicontinue, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, \forall f \in H, (d(x,y) < \delta) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2. Pour tout $x \in I$, l'ensemble $H(x) = \{f(x), f \in H\}$ est relativement compact.

Exemple 3.5 *Soit $E = C([0,1], \mathbb{k})$. L'opérateur de Volterra $A : E \to E$ défini par :*

$$\forall f \in E : Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1]$$

est compact.
On va utiliser le théorème d'Ascoli avec $I = [0,1]$ et $X = \mathbb{k}$. On pose $H = A(B_E)$.
Soit $f \in B_E$, pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |Af(x) - Af(y)| &= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq |x-y| \, \|f\|_\infty \\ &\leq |x-y| \, . \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \varepsilon > 0; \ \forall f \in B_E, \ \forall y \in I, \ (|x-y| < \delta) \Rightarrow (|Af(x) - Af(y)| < \varepsilon).$$

Autrement dit, l'ensemble H est équicontinu. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $H(x)$ est une partie de $\mathbb{k}$ donc si $H(x)$ est borné alors, $H(x)$ est relativement compacte. Or, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \forall f &\in B_E : |Af(x)| \leq \int_0^x |f(t)| \, dt \\ &\leq x \, \|f\|_\infty \\ &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème d'Ascoli sont satisfaites, il s'en suit que A est compact.

Propriétés fondamentales des opérateurs compacts

Lemme 3.1 *$K(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(H)$. En particulier la somme de deux opérateurs compacts est un compact. Si $\{T_n\}_{n\geq 1}$ est une suite d'opérateurs compacts convergeant au sens de la norme des opérateurs vers T dans $L(H)$; alors T est compact.*

Preuve. La caractérisation par les suites permet de montrer que $K(H)$ est un sous-espace vectoriel de $L(H)$. Pour établir la stabilité de la compacité par convergence en norme d'opérateurs, on utilisera le critére de précompacité. Il existe n_ε tel que $\|T_{n_\varepsilon} - T\|$. Or T_{n_ε} étant compact, il existe une famille finie de vecteurs $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ de H, tel que $T_{n_\varepsilon}(B_H) \subset \underset{1\leq i\leq N}{\cup} B_H(v_i,\varepsilon)$, Il résulte alors de l'inégalité triangulaire, $T(B_H) \subset \underset{1\leq i\leq N}{\cup} B_H(v_i,2\varepsilon)$; d'où l'on déduit que T est compact. ■

Proposition 3.12 *Soient $A \in L(E,F)$ et $B \in L(F,G)$. Si A ou B est compact alors ; BA est compact.*

Preuve. Si A est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $\overline{A(M)}$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{A(M)})$ est compact. Il résulte que $B \circ A(M) \subset B(\overline{A(M)})$ est relativement compacte.
Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $A(M)$ est aussi borné et donc $B \circ A(M)$ est relativement compacte ■

Théorème 3.3 *Si E ou F est de dimension finie, alors $\mathcal{K}(E,F) = L(E,F)$.*

Preuve. Si E est de dimension finie, alors B_E sera compacte, d'où $A(B_E)$ est compacte pour tout $A \in L(E,F)$, car A est continu.
On suppose que F est de dimension finie alors, $A(B_E)$ est bornée donc relativement compacte (car F est de dimension finie). ■

Théorème 3.4 *Si T est un opérateur compact et positif alors ; $\sqrt{T}$ est compact.*

Exemple 3.6 *Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et (x_n) une base hilbertienne de H , et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexe décroissante, et $T \in L(H)$ tel que :*

$$T(x_n) = \lambda_n.x_n = (\lambda_1.x_1\ ,\ \lambda_2.x_2\ , \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Alors T est compact.
Pour démontrer que T est un opérateur compact, il suffit de montrer que T est un opérateur borné.
On a :

$$\| T(x_n) \|_{l^2} = \|\lambda_n.x_n\|_{l^2} = \| (\lambda_1.x_1\ ,\ \lambda_2.x_2\ , \ldots\ldots\ldots\ldots) \|_{l^2}$$

$$\| T(x_n) \|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\ \lambda_i\ |^2 |\ x_i\ |^2$$

$$\begin{aligned} &\leq (\max_{i\in\mathbb{N}}(\mid \lambda_i \mid))^2.\parallel x \parallel^2 \\ &= \lambda_1^2.\parallel x \parallel^2; \forall x \in l^2 \\ \text{donc} \quad &\parallel T \parallel \leq \mid \lambda_1 \mid . \end{aligned}$$

d'où T est un opérateur compact.

Chapitre 4

Théorie spectrale des opérateurs bornés

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale où on introduit trois notions essentielles : la notion du spectre, la notion de la resolvante et enfin les notions du spectre continu, residuel, ponctuel, approché, leurs propriétés et applications sur les différents types d'opérateurs.

4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 4.1 *Soit T un opérateur, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit :*

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de T s'il existe un vecteur $v \in V$ non nul tel que :

$$Tv = \lambda v.$$

Le vecteur v est alors appelé **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ
L' ensemble des valeurs propres noté : $V_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$.
$\mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)$ est **l'espace propre associé à λ.**

Exemple 4.1 *Trouvons les valeurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A est $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$
Les valeurs propres sont les racines de l'équation :

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

donc $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$

Trouvons maintenant les vecteurs propres correspondants.

Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $Av = \lambda v$

si $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = -2x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \Longrightarrow 2x_2 = -x_1, x_1 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = -1$

si $\lambda = 3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 2x_1 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 2x_2, \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 3$.

4.2 Spectre et résolvante

Définition 4.2 *Soit $T \in L(E)$.*

1. On appelle **ensemble résolvante** de T l'ensemble :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ est inversible}\}.$$

Un élément de $\rho(T)$, est appelé **valeur résolvante** de T.

2. Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(T)$ de T au point λ par :

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur T.

Définition 4.3 *Soit $T \in L(E)$.*

Le **spectre** de T noté $\sigma(T)$ est l'ensemble :

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \mathbb{C} \setminus \rho(T) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ est non inversible}\}. \end{aligned}$$

Un élément $\lambda \in \sigma(T)$ est une **valeur spectrale** de T.
On a :

$$\begin{aligned} \sigma(T) \cup \rho(T) &= \mathbb{C}. \\ \sigma(T) \cap \rho(T) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Lemme 4.1 *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$, on a :*

1. $\sigma({}^tT) = \sigma(T)$.
2. $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$
3. $\rho(T^n) = \rho(T)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.2 *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in L(E)$ et $\lambda \in \partial\sigma(T)$ (la frontière du spectre de T). Alors il existe une suite de vecteurs $(x_n) \subset E$ de norme 1, telle que $(T - \lambda I_E)(x_n)$ tend vers 0.*

Preuve. En posant $S = (T - \lambda I_E)$, on se ramène à montrer que si $0 \in \partial\sigma(S)$, il existe une suite $(x_n) \subset E$ de vecteurs de norme 1, telle que $S(x_n)$ tende vers 0. Puisque $\sigma(S)$ est fermé, sa frontière est contenue dans $\sigma(S)$, donc $0 \in \sigma(S)$ et S n'est pas inversible. Si on ne pouvait pas trouver la suite (x_n), on aurait $\|S(x)\| \geq c\|x\|$ pour un $c > 0$ et tout $x \in E$, donc $S(E)$ serait fermé et $S(E) \neq E$ puisque S n'est pas inversible.
On pourrait alors trouver $y \notin S(E)$; puisque 0 est à la frontière du spectre de S, il existe une suite (μ_n) hors du spectre et qui tende vers 0 ; alors $S - \mu_n I_E$ est inversible pour tout n. Il existe donc un vecteur $z_n \in E$ tel que $(S - \mu_n I_E)(z_n) = y$. Si (z_n) était bornée, on aurait $\mu_n z_n \to 0$ et y serait la limite de la suite $(S(z_n)) \subset S(E)$, ce qui est impossible puisque $S(E)$ est supposé fermé et $y \notin S(E)$. Il existe donc une sous-suite (z'_n) telle que $\|z'_n\|$ tende vers $+\infty$; en posant $x_n = \|z'_n\|^{-1} z'_n$, on voit que $S(x_n) - \mu_n x_n = \|z'_n\|^{-1} y$ tend vers 0, donc $S(x_n) \to 0$. ■

4.3 Type de Spectre

- On appelle **spectre ponctuel** de T l'ensemble des valeurs propres de T, noté $\sigma_p(T)$ tel que :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ (T - \lambda I) \text{ est non injectif}\}.$$

- On appelle **spectre continu** de T et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble :

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ est injectif et } \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = E\right\}.$$

- On appelle **spectre résiduel** de T et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble :

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ injectif et } \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq E\right\}.$$

Définition 4.4 *Soit $T \in L(E)$. On définit* ***le rayon spectral*** *de T noté $r(T)$ par :*

$$r(T) = \underset{\lambda \in \sigma(T)}{\text{Sup}} |\lambda| .$$

Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors ; $r(T) = 0$.

Remarque 4.1 *Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles :*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Définition 4.5 *Le* ***spectre approché*** *de T, noté $\sigma_a(T)$ est l'ensemble :*

$$\sigma_a(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ \exists \{x_n\} ; \|x_n\| = 1, \lim_{n \to \infty} \|(T - \lambda I) x_n\| = 0 \right\} .$$

Les $\lambda \in \sigma_a(T)$ sont des **valeurs propres approchés** de T.

Théorème 4.1 *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$. Alors :*

(i) $\lim_{n \to \infty} ||T^n||^{1/n}$ existe et égale à $r(T)$.
(ii) Si $E = H$ est un espace de Hilbert complexe et si $A \in L(H)$ est auto-adjoint, alors $r(A) = ||A||$.

Exemple 4.2 *Trouvons le spectre dans les cas suivants :*

(1) Pour $T = I$ on a :

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \ \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (1 - \lambda) I \ \text{n'est pas inversible}\} . \end{aligned}$$

$(1 - \lambda) I$ non inversible ssi $\lambda = 1$; alors $\sigma(I) = \{1\}$.
De même, si $\mu \in \mathbb{k}$, alors, $\sigma(\mu I_H) = \{\mu\}$.
(2) Soit S (le shift) l'opérateur défini par :
pour $x_n = (x_1, x_2, x_3, ...) : S(x_n) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$
S n'a pas de valeur propre. Supposons que λ est une valeur propre de S ; alors $\exists (x_n)$ telle que :

$$S(x_n) = \lambda (x_n) \Leftrightarrow \ \ (0, x_1, x_2, x_3, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ...) .$$

Si $\lambda = 0$; alors $x = 0$ contradiction, car il faut que $x \neq 0$.
Si $\lambda \neq 0$; alors $x = 0$ contradiction.

Exemple 4.3 *Soit A l'application linéaire définie sur $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ par : $Au(x) = xu(x)$,*

i) *Montrons que A est une application linéaire continue de $L^p[0,1]$ dans lui-même et donnons un majorant de sa norme.*
ii) Montrons que $\sigma(A) \subseteq [0,1]$.
iii) Soit $\lambda \in]0,1[$. Montrons que $\lambda \in \sigma(A)$.
Solution
(i) A est clairement linéaire et on a :

$$\int_0^1 |xu(x)|^p \, dx \leq \int_0^1 |u(x)|^p \ dx \text{ ; d'où } \|A\| \leq 1.$$

(ii) On a l'opérateur défini par $M_\lambda u(x) = \frac{u(x)}{x-\lambda}$ est linéaire continu si $\lambda \notin [0,1]$ et que M_λ est l'inverse de $A - \lambda I$.
(iii) Raisonner par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in]0,1[\cap \rho(A)$; alors il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^p[0,1]$ on a :

$$\int_0^1 |u(x)|^p \, dx \leq C \int_0^1 |(x-\lambda)u(x)|^p \, dx$$

Soit $u_\varepsilon(x) = (x-\lambda)^{-1/p} I_{[0,\lambda-\varepsilon]}(x)$, applicant l'inégalité précédente à u_ε on obtient :

$$\int_0^{\lambda-\varepsilon} |x-\lambda|^{-1} \, dx \leq C \int_0^1 |x-\lambda|^{p-1} dx$$

Le membre de droite étant indépendant de ε on obtient une contradition car le membre de gauche tend vers l'infini lorsque ε tend vers 0.

4.4 Propriétés du spectre et de la résolvante

Lemme 4.3 *Soit $T \in L(H)$; alors :*

1- $\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}$.
2- *Si T est inversible, alors* $\sigma(T^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\right\}$.
Preuve. 1- Si $\lambda \in \sigma(T)$; alors $(T - \lambda I)$ n'est pas inversible.
Soient $x, y \in H$; alors :

$$\begin{aligned} \langle (T-\lambda I)\, x, y\rangle &= \langle Tx, y\rangle - \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle - \left\langle x, \overline{\lambda} y\right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) y\right\rangle \\ &= \left\langle \left(T^* - \overline{\lambda} I\right)^* x, y\right\rangle \end{aligned}$$

Alors $\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)^*$ n'est pas inversible, donc $\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)$ n'est pas inversible, alors $\overline{\lambda} \in \sigma\left(T^*\right)$.
2- Soit T un opérateur inversible alors 0 n'appartient pas à $\sigma\left(T\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \lambda^{-1} \quad \in \quad & \rho\left(T\right) \iff T - \lambda^{-1} I \text{ est inversible} \\ \iff \quad & \left(\lambda I - T^{-1}\right) \lambda^{-1} T^{-1} \text{ est inversible} \\ \iff \quad & \left(\lambda I - T^{-1}\right) \text{ est inversible} \\ \iff \quad & \lambda \in \rho\left(T^{-1}\right) \end{aligned}$$

Alors : $\lambda^{-1} \in \sigma\left(T^{-1}\right) \iff \lambda \in \sigma\left(T\right)$. ■

Lemme 4.4 *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$; on a : $\sigma({}^tT) = \sigma(T)$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que ${}^t(T - \lambda I_E) = {}^t\left(T\right) - \lambda I_{E^*}$ pour tout nombre complexe λ. ■

Proposition 4.1 *Soient $T_1, T_2 \in L(E)$; alors : $\sigma(T_1T_2) = \sigma(T_2T_1)$.*

Preuve. Basée sur le fait que, si $I - T_1T_2$ est inversible d'inverse U, alors :

$$(I + T_2UT_1)(I - T_2T_1) = I - T_2T_1 - T_2UT_1T_2T_1 + T_2UT_1$$

$$= I - T_2T_1 + T_2U(I - T_1T_2)T_1 = I.$$

De même $(I - T_2T_1)(I + T_2UT_1) = I$, et donc $(I - T_2T_1)$ est inversible. ■

Proposition 4.2 *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé ; alors $\sigma(T) = \mathbb{C}$ (ou, de maniére équivalente, si $\rho(T) \neq \emptyset$) ; alors T est fermé.*

Preuve. Supposons que $\rho(T) \neq \emptyset$; et soit $z \in \rho(T)$ d'où : $(T - zI)^{-1}$ est borné, donc fermé et il en est de même pour $(T - zI)$ et T. ■

Théorème 4.2 *Soit $T \in L\left(H\right)$; on a :*

$\sigma\left(p\left(T\right)\right) = p\left(\sigma\left(T\right)\right)$; pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}\left[X\right]$.

Proposition 4.3 *Soit $A \in L(H)$. Alors, on a :*

1. $\rho(A^*) = \{\lambda \in \Bbbk : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$.
2. *Pour tout* $\lambda \in \rho(A^*), R_\lambda(A^*) = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$.

Preuve. 1. On a : $\lambda I_H - A^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda I_H - A^*)^*$ est inversible (d'après le

Théorème (2.4)). Or, $(\lambda I_H - A^*)^* = \overline{\lambda} I_H - A$; donc :

$$\begin{aligned}\rho(A^*) &= \{\lambda \in \Bbbk : \lambda I_H - A^* \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \Bbbk : \overline{\lambda} I_H - A \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \Bbbk : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}.\end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \Bbbk \backslash \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.
2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$; alors, on a :

$$\begin{aligned}R_\lambda(A^*) &= (\lambda I_H - A^*)^{-1} \\ &= ((\overline{\lambda} I_H - A)^*)^{-1} \\ &= ((\overline{\lambda} I_H - A)^{-1})^* = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*\end{aligned}$$

ceci découle du Théorème (2.4). D'où, résulte l'égalité attendue. ■

Exemple 4.4 *Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de multiplication $A : H \to H$ défini par :*

$$Af(t) = tf(t), t \in [0,1].$$

Alors, on a $\sigma(A) = [0,1]$. De plus, l'opérateur A n'a pas de valeurs propres.

Solutoin

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H$, $t \in [0,1]$, on a : $(\lambda I_H - A)f(t) = (\lambda - t)f(t)$.
On distingue deux cas :
Si $\lambda \notin [0,1]$; alors, la fonction $t \to \frac{1}{\lambda - t}$ est bornée et l'opérateur $(\lambda I_H - A)^{-1}$ défini par :

$$(\lambda I_H - A)^{-1} g(t) = \frac{1}{\lambda - t} g(t), g \in H.$$

est un opérateur borné.
Si $\lambda \in [0,1]$; alors, la fonction $t \to \frac{1}{\lambda - t}$ n'est pas dans H, car il y a la singularité non intégrable en $t = \lambda$. Il résulte que $(\lambda I_H - A)$ n'est pas inversible et tous les λ sont des points singuliers. D'où, on déduit que $\sigma(A) = [0,1]$.
On suppose maintenant que λ soit une valeur propre de A et f le vecteur propre associé dans H. Alors, on a :

$$(\lambda - t)f(t) = 0, t \in [0,1].$$

Il s'en suit que $f \equiv 0$ dans H. D'où, A n'a pas de valeurs propres et $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Théorème 4.3 *Soit $A \in L(E)$.*

1. *Si* $|\lambda| > \|A\|$; *alors* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, \|A\|)$.
2. $\rho(A)$ *est un ouvert non vide de* $\mathbb{k}$.
3. $\sigma(A)$ *est un compact non vide de* $\mathbb{k}$.

Preuve. 1. Si $|\lambda| > \|A\|$; alors $\lambda \neq 0$ et $\left\|\lambda^{-1}A\right\| < 1$. On en déduit du Théorème (2.3) que $\left(I_E - \lambda^{-1}A\right)$ est inversible, i.e., $\lambda \in \rho(A)$.
2. On a : $\rho(A)$ est non vide (d'après 1.) On considère l'application $f : \mathbb{k} \to L(E)$ définie pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ par $f(\lambda) = \lambda I_E - A$. On remarque que $\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{I}L(E))$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ on a :

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I_E\| \leq |\lambda - \mu| .$$

Il résulte que f est continue. Or, $\mathcal{I}L(E)$ est un ouvert de $L(E)$ (voir Théorème(2.3)). On en déduit que $\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{I}L(E))$ est un ouvert de $\mathbb{k}$.
3. On a : $\sigma(A) = \mathbb{k} \setminus \rho(A)$ est fermé (d'après 2.), il est borné (d'après 1.) ; alors il est compact. ■

Lemme 4.5 (*Identité de la résolvante*) *: Pour* $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$; *on a :*

$$R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T) = (\lambda_1 - \lambda_2)\left(R_{\lambda_1}(T).R_{\lambda_2}(T)\right).$$

De plus les résolvantes commutent.

Preuve. En utilisant le fait que $(T - \lambda_1 I)$ et $(T - \lambda_2 I)$ commutent, on a :

$$\begin{aligned}
& \left(R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T)\right)(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \\
= \;& R_{\lambda_1}(T)(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) - R_{\lambda_2}(T)(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \\
= \;& (T - \lambda_2 I) - (T - \lambda_1 I) \\
= \;& (\lambda_1 - \lambda_2) I \\
\text{D'où} \quad : \quad & R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T) = (\lambda_1 - \lambda_2)\left(R_{\lambda_1}(T).R_{\lambda_2}(T)\right)
\end{aligned}$$

■

4.5 Spectre de l'adjoint d'un opérateur

Commençons par énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.4 ***(théorème de Phillips)*** *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $T \in L(E)$ et $T^* \in L(E^*)$ l'adjoint de T, alors ;

$$\sigma(T^*) = \sigma(T) \;\text{ et }\; \forall \lambda \in \rho(T), \;\; R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*.$$

Ce résultat a comme conséquence immédiate, dans le cas particulier où $E = H$ est un espace de Hilbert complexe.

Proposition 4.4 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$ et $T^* \in L(H)$ l'adjoint hilbertien de T . Alors :*

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{\overline{\lambda} \backslash \lambda \in \sigma(T)\} \text{ et } \forall \lambda \in \rho(T), R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*.$$

Preuve. Observons d'abord que, $\forall S, T \in L(H)$,

$$(TS)^* = S^* T^*$$

si T est inversible, alors :

$$(T^{-1})^* T^* = \left(T(T^{-1})\right)^* = I^* = I$$
$$T^*(T^{-1})^* = \left((T^{-1})T\right)^* = I^* = I,$$

ce qui signifie que T^* est aussi inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Comme $T \mapsto T^*$ est une involution, la réciproque est immédiate, autrement dit : T est inversible ssi T^* est inversible. Donc

$$\lambda \in \rho(T) \iff (\lambda I - T) \text{ est inversible } \iff (\overline{\lambda} I - T^*) \text{ est inversible } \iff \overline{\lambda} \in \rho(T^*).$$

Et alors $\left((\lambda I - T)^{-1}\right)^* = \left(\overline{\lambda} I - T^*\right)^{-1}$. ■

Exemple 4.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} i-\lambda & 0 \\ 0 & i-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (i-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i$

alors ;

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{i\} \Rightarrow \sigma(A^*) = \{-i\} \\ \rho(A) &= \mathbb{C} \backslash \{i\} \Rightarrow \rho(A^*) = \mathbb{C} \backslash \{-i\} \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{-i\}$, alors

$$R_\lambda(A^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i+\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i+\lambda} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-i} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.5 *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$. Alors*

(i) *Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\mathrm{Im}(\lambda I - T^*)$ n'est pas dense dans E^* ;*
(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; tel que $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ n'est pas dense dans E, alors $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.

Exemple 4.6 *Considérons l'opérateur de décalage $T \in L(\ell^1)$ défini par :*

$$x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^1, \ T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

Rappelons que le dual de ℓ^1 est ℓ^∞. Or l'adjoint $T^* \in \ell^\infty$, qui satisfait :

$$\text{Pour } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell^\infty, \quad T^*(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...).$$

Notons qu'on a : $||T^n|| = ||(T^*)^n|| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, d'aprés le théorème (4.1) on a :

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = r(T^*) = \lim_{n\to\infty} ||(T^*)^n||^{1/n} = 1.$$

Nous allons établir les propriétés suivantes :

Spectre	Spectre ponctuel	Spectre résiduel	Spectre continu
$\sigma(T) = \overline{B(0,1)}$	$\sigma_p(T) = B(0,1)$	$\sigma_r(T) = \emptyset$	$\sigma_c(T) = \partial B(0,1)$
$\sigma(T^*) = \overline{B(0,1)}$	$\sigma_p(T^*) = \emptyset$	$\sigma_r(T^*) = \overline{B(0,1)}$	$\sigma_c(T^*) = \emptyset$

4.6 Spectre des opérateurs auto-adjoints

On s'intéresse dans la proposition suivante aux valeurs propres des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 4.6 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, on a :*

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I_H - A)} \neq H$.
3. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors, $\text{Ker}\,(\lambda I_H - A) \perp \text{Ker}\,(\mu I_H - A)$, i.e., les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve. 1. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$; alors il existe $x \in H\backslash\{0\}$, tel que $Ax = \lambda x$. D'où :

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$. D'aprés la proposition (3.4), on a :

$$\overline{\text{Im}(\lambda I_H - A)} = [\text{Ker}\,(\lambda I_H - A)^*]^\perp = \left[\text{Ker}\,\left(\overline{\lambda} I_H - A\right)\right]^\perp.$$

Comme $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A)$, ce qui équivaut à $\text{Ker}\left(\overline{\lambda} I_H - A\right) \neq \{0\}$, soit encore $\left[\text{Ker}\left(\overline{\lambda} I_H - A\right)\right]^\perp \neq H$. On déduit que $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I_H - A)} \neq H$.
3. Si $x \in \text{Ker}\,(\lambda I_H - A)$ et $y \in \text{Ker}\,(\mu I_H - A)$, alors, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$. Comme $A = A^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle x, Ay\rangle = 0.$$

Il résulte : $\langle x, y\rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. D'où, $\text{Ker}\,(\lambda I_H - A) \perp \text{Ker}\,(\mu I_H - A)$.
La démonstration de la proposition est ainsi terminée. ■
Les propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints sont réunies dans le théorème suivant :

Théorème 4.5 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$l = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \text{ et } L = \operatorname{Sup}_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle .$$

Alors, on a :

1. $l, L \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $l, L \in \sigma(A)$.
3. $\sigma(A) \subset [l, L]$.
4. $\|A\| = \operatorname{Sup}\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. En particulier, $\|A\| = \max(|l|, |L|)$.

Les points 2., 3. et 4. entraînent le corollaire suivant :

Corollaire 4.1 *1. Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors, $\|A\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$.*

2. Soit A un opérateur auto-adjoint sur H. Si $\sigma(A) = \{0\}$; alors $A = 0$.

Proposition 4.7 *Soit $T \in L(H)$, un opérateur auto adjoint alors :*

1. Le rayon spectral de T est égale à la norme de T : $r(t) = \|T\|$.
2. Le spectre de T est réel.
3. Le spectre résiduel de T est vide.
4. Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.
5. Si T est un opérateur auto-adjoint alors ; $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Preuve. Puisque T est un opérateur auto-adjoint donc $\|TT^*\| = \|T\|^2$, implique que : $\|T^2\| = \|T\|^2$. D'où par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|T^{2n}\right\| = \|T\|^{2n}$$

D'où $r(t) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|$.

2. Puisque $T = T^*$, $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, on a : $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\operatorname{Im}((T-\lambda)x, x) = -\operatorname{Im}\lambda \|x\|^2$$

Il en résulte :

$$\forall x \in H, \left|\operatorname{Im}\lambda \|x\|^2\right| \leq |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \leq \|(T-\lambda)x\| \|x\|$$

En divisant par $\|x\|$, on en déduit que $(T - \lambda I)$ est injectif d'image fermée si λ n'est pas réel. Mais l'image de $T - \lambda I$ est dense. Sinon, soit $y \neq 0$ orthogonal à cette image :

$$\forall x \in H, \langle (T-\lambda)x, y\rangle = \left\langle x, \left(T - \overline{\lambda}\right) y\right\rangle = 0$$

Donc $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T, avec pour tout vecteur propre y, et $\langle Ty, y\rangle = \overline{\lambda}\|y\|^2$, ce qui est absurde (le premier membre est réel, et pas le seconde).
$T - \lambda I$ est donc inversible, ce qui prouve le point 2.
3. Si λ est dans le spectre résiduel, prouve que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de T , et puisque λ est réelle (car dans le spectre de T), λ serait valeur propre de T, et donc n'appartiendrait pas au spectre résiduel.
4. Si λ n'appartient pas à $\sigma_a(T)$, alors il existe $C > 0$ avec :

$$\forall u \in H, \ \ \|u\| \leq C\|(\lambda I - T)u\|$$

Si un tel C n'existait pas on trouverait en effet une suite u_n de norme 1 avec $1 \geq n\|(T-\lambda)u_n\|$. ce qui fournirait $\lambda \in \sigma_a(T)$.
On en déduit comme dans cette preuve que soit λ est dans l'ensemble résolvant de T, soit $\overline{\lambda}$ une valeur propre de T^*.
Le point 5. en découle immédiatement puisque le spectre de $T = T^*$ est réel. ■

Exemple 4.7 *Soit $f \in H$; $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in [a, b]$.*

T est un opérateur auto-adjoint de H, calculons $\sigma(T)$.
On a : $T^*(f)(x) = xf(x)$. Donc $T^* = T$. D'où T est auto-adjoint.
Si $\lambda \notin [a, b]$, l'opérateur R_λ défini par :

$$R_\lambda(f)(x) = (x - \lambda)^{-1} f(x)$$

est un opérateur linéaire continu sur H et on a : $R_\lambda T = TR_\lambda = I$.
Par conséquent $\sigma(T) \subseteq [a, b]$.
Supposons qu'il existe $\lambda \in]a, b[$ telle que $(T - \lambda I)$ soit un isomorphisme bicontinu de H dans H.
Il existerait alors $C > 0$, tel que $\forall f \in L^2(a, b)$, on ait :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq C \int_a^b |x - \lambda|^2 |f(x)|^2 dx$$

Soit $\delta > 0$; tel que $\delta < \lambda - a$. Testons l'inégalité précédente avec $f(x) = \frac{I_{[a,\lambda-\delta]}(x)}{|x-\lambda|^{1/2}}$. On obtient alors :

$$\int_a^{\delta-\lambda} \frac{dx}{\lambda - x} \leq C(b-a)^2; \forall \delta > 0.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre δ vers 0.
Le spectre étant fermé on en déduit que $\sigma(T) = [a, b]$.

4.7 Spectre des opérateurs isométriques

Le spectre d'un opérateur isométrique est inclus dans $\{-1,+1\}$ et de ce fait on peut diagonaliser A comme la différence des projecteurs $\frac{(I+A)}{2}$ (espace propre de $+1$) et $\frac{(I-A)}{2}$ (espace propre de -1).

Proposition 4.8 *Si A un opérateur isométrique et $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors $|\lambda| = 1$.*

Preuve. Si A un opérateur isométrique ; alors $\|Ax\| = \|x\|$, et si $\lambda \in \sigma_p(A)$; alors : $\exists\ x \in H$ tel que :

$$Ax = \lambda x$$

donc

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = \|x\|,$$

i.e. $|\lambda| = 1$. ■

Remarque 4.2 *Si E est de dimension fini, alors, $(\lambda I_E - A)$ est inversible si et seulement si*

$\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A) = \{0\}$. On déduit que $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.
En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire A sur E peut être représenté par une matrice carée A, et que l'opérateur linéaire $(\lambda I_E - A)$ est inversible quand la matrice $(\lambda I_E - A)$ est inversible. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, l'un des cas suivants doit apparaître :
(i) λ est une valeur propre de A,
(ii) la matrice $(\lambda I_E - A)$ est inversible, i.e., la matrice $(\lambda I_E - A)^{-1}$ existe.
Il en résulte que le spectre $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice A,
et la dimension de l'espace vectoriel propre correspondant à toute valeur propre est finie.
Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe.

4.8 Spectre des opérateurs unitaires

Lemme 4.6 *Soit U un opérateur unitaire de $L(H)$. Alors $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.*

Preuve. On a : $\|U\| = 1$. Il en résulte que : si $|z| > 1$; alors $z \in \rho(U)$. On applique cela à U^{-1}. Si $|z| > 1$; alors $z \in \rho(U^{-1})$ donc $z^{-1} \in \rho(U)$. On en déduit que $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. ■

Proposition 4.9 *Soient H un espace de Hilbert complexe, T est un opérateur positif, son spectre est contenu dans $[0, +\infty[$.*

4.9 Spectre des opérateurs normaux

Théorème 4.6 *Soit A un opérateur normal de $L(H)$; alors :*

1. *En dimension finie $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.*
2. *Si $\lambda \in \sigma(A)$; alors $|\lambda| \leq \|A\|$.*
3. $r(A) = \|A\|$.

Proposition 4.10 *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Proposition 4.11 *Soit H un espace de Hilbert complexe, le rayon spectral de tout élément normal T de $L(H)$ est égal à sa norme, $r(T) = \|T\|$.*

Preuve. Soit A un élément hermitien, on a $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$, on en déduit par récurrence que $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $r(A) = \|A\|$. Soit maintenant T un élément normal de $L(H)$, par récurrence pour n, on a : $(T^*T)^n = (T^*)^n T^n$ donc $\|(T^*T)^n\| = \|T^n\|^2$ et $r(T^*T) = r(T)^2$. Or $A = T^*T$ est hermitien, donc $r(T)^2 = r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2$. ■

Proposition 4.12 *Le spectre d'un opérateur normal est l'ensemble de ses valeurs propres approchées.*

Exemple 4.8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; *tel que A est normal* $\Rightarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2i - \lambda & 0 \\ 0 & -i - \lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2i - \lambda)(-i - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -i, \lambda = 2i$

alors ;

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{-i, 2i\} = \sigma_p(A) \\ \rho(A) &= \mathbb{C} \backslash \{-i, 2i\} \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{-i, 2i\}$, alors

$$R_\lambda(A^*) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \{2\}$$

4.10 Spectre des opérateurs compacts

Lemme 4.7 *Soient A un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $(A - \lambda I)$ n'est pas inferieurement borné. Alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

Proposition 4.13 *Le spectre d'un opérateur compact est constitué du 0 et des valeurs propres de l'opérateur*

Exemple 4.9 *Soit $T = \mathrm{diag}(c_n)$; où $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 2$, alors T est compact*

et $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

Exemple 4.10 *On Consider l'opérateur de Volterra V sur $C[0,1]$ comme suit :*

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,\ 0 \leq x \leq 1.$$

Cet opérateur est inversible et son spectre est $\{1\}$, V est injectif et son image n'est pas fermé.

Théorème 4.7 *Soit $A \in K(E)$.*

1. Si E est de dimension infinie alors ; $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \sigma(A)\backslash\{0\}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, le sous-espace vectoriel propre associé $\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A)$ est de dimension finie.
3. $\sigma(A)$ est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ forment une suite $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{k}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n = 0.$$

Preuve. 1. Si $0 \notin \sigma(A)$, alors, A est inversible dans $L(E)$ et $I_E = A^{-1}A \in \mathcal{K}(E)$, d'après la Proposition (3.12), l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.
2. On a $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda I_E - A$ est non inversible dans $L(E)$, ce qui est équivalent à, $\lambda \neq 0$ et $I_E - \lambda^{-1}A$ est non inversible dans $L(E)$. appliqué à $\lambda^{-1}A$, $I_E - \lambda^{-1}A$ n'est pas inversible dans $L(E)$ si et seulement si $I_E - \lambda^{-1}A$ n'est pas injectif. D'où, $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$. De plus, $\mathrm{Ker}(I_E - \lambda^{-1}A)$ est de dimension finie, donc $\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A)$ est de dimension finie.
3. D'après (2), pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble

$$\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, l'ensemble

$$\left\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

est fini. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante

$$|\lambda_0| \geq ... \geq |\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{n}$$

De même, l'ensemble

$$L_n = \left\{\lambda \in \sigma(A) : \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\right\}$$

est fini. On pose $L_n = \{\lambda_{n_0+1}, ..., \lambda_{n_1}\}$ où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq ... \leq |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq ... \leq |\lambda_0|.$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_n$ qui décroît en module vers 0.
Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 4.3 *Etant donnée une suite réelle $(\lambda_n)_n$, telle que : $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. On peut construire un opérateur compact A tel que $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suffit de considérer l'opérateur A sur H défini par $A((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$. Cet opérateur est compact car il existe une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis telle que $\|A_n - A\|$ tend vers 0. On remarque ici que 0 peut appartenir, ou ne pas appartenir à $\sigma_p(A)$. Si $0 \in \sigma_p(A)$, l'espace propre associé $\mathrm{Ker}(A)$ peut être de dimension infinie.*

Conclusion

La théorie spectrale est une branche essentielle de l'analyse fonctionnelle, elle s'applique en mathématique pures et appliquées (équation différentielle ou aux dérivée partielle, théorie des algèbres de Von Neumann.....), en physique et en chimie (mécanique quantique, mécanique Statistique, Spectroscopie .....), on a essayé briévement de présenter les outils mathématiques de la théorie spectrale : passage de la dimension finie à la dimenssion infinie pour des opérateurs linéaires continus . De nombreux exemples on été présentés d'application.

Bibliographie

[1] J. H. Anderson, C. Foias, *Properties which share with normal derivation and related operators*, Pacific J. Math.,61(1976) 313-325.

[2] G. Aubrun, *Théorie des Opérateurs M1 Mathématiques*, Université de la Réunion.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson Paris. 1983 Collection Mathematiques Appliquées pour la Maîtrise.

[4] P.L. Bruhl, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, Paris, 2003.

[5] I. Chalendar, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, 2011.

[6] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, New york, Springer. 1990.

[7] R. Didier, *Présentation du cours d'Analyse Fonctionnelle, polycopie univ* Nantes, Juillet 2005.

[8] N. Dunford and J.T. Shcwarz, *Linear Operators, part I, II et III Interscience*, Newyork, 1964.

[9] J. L. Ferrand et J.M. Arnaudiés, *Cours de Mathématiques, tome 2 analyse*. Dunod.1972.

[10] M. Hazi, *Introduction aux espaces normés*, OPU,1994.

[11] F. Helein, *Notes pour le cours de théorie spectrale*, Polycopie Université de Paris 7, 2009.

[12] S. Maingot et D.Manceau, *Théorie spectrale*, Université de Harve, 2011.

[13] B. Maurey, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*, MT404, 2001-2002.

[14] S. Schnaubelt, *Lecture Notes Spectral theory*, Kharlsruhe, 06 Août 2012.

[15] L. Schwartz, *Analyse I*. Collection Enseignement des Sciences, Vol.42. Hermann, Paris, 1991.

[16] M. Soussane, Sur *Inéga*lités d'opérateurs auto-adjoints, ; Mémoire Magister en mathématiques, univ*e*rsité d'Oran, juin 2014.

[17] A.Yger, *Analyse complexe et distributions*, Collection Mathématiques 2eme édition. Ellipses, 2001.